

第5章 振動とエネルギー

5.1 複素外力に対する複素表示の変位応答

前章までは、1自由度系の振動について学んできた。本章では、復習も兼ね、新しい視点で再度1自由度系の振動について議論する。

これまでは強制外力として実数、特に正弦振動だけを扱ってきた。ここは、外力を複素数まで拡張した質点系の応答を考えてみよう。すなわち、強制外力項を $f(t) \in \mathbb{C}$ として次のものを考える。

$$f(t) = Fe^{ipt} = F(\cos pt + i \sin pt) \quad \text{—— (5.1)}$$

F : 一定 p : 強制外力の円振動数

このような複素外力は多くの解析上の利点がある。例えば、複素数 $e^{i\theta}$ を用いることで、実数部は余弦振動で、虚部は正弦振動で表され、一度で2つの表現が可能になる。また、強制振動による応答も解の形が明快に記述できること、さらに実数では煩雑になりがちな演算がより簡単な演算で解析可能となることである。特に有利な点は、実数空間（時間領域）では入力振動に対する出力を導くために応答関数との合積を計算しなければならないが、複素空間（周波数領域）では伝達関数との積でそれを実現することができることだろう。これについては後節で詳細に述べるつもりである。

まず、1自由度質点系の挙動を考察しよう。運動方程式は次のように表現できる。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

$$\ddot{y} + 2h\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{F}{m}e^{ipt}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad h = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

—— (5.2)

上式の非同次二階常微分方程式を解くわけであるが、ここで注意すべき点は、 m, c, k （したがって ω_n, h ）は実数であるが、 $f(t)$ は複素数であるので、その変位解 y は複素数になるということである。このタイプの微分方程式の一般解は、同次の常微分方程式の自由振動解（余函数）と非同次の常微分方程式の定常解（特解）の一次結合で表すことができる。最初に、特解を導くことにする。今回の場合、外力項 $f(t)$ に e^{ipt} が含まれているために変位解も同様の振動数で揺れるものとして、次式で解を仮定する。

$$y = Ce^{ipt}$$

(5.3)

ここで $C_R, C_I \in \mathbb{R}$ 、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ として

$$C = C_R + iC_I = \sqrt{C_R^2 + C_I^2} e^{i\theta}$$

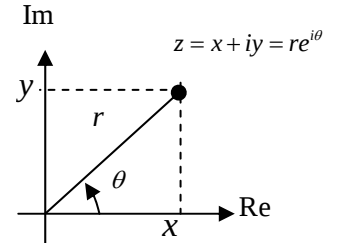
$$\tan \theta = \frac{C_I}{C_R}$$

$$|C| = \sqrt{C_R^2 + C_I^2}$$

$$\arg C = \theta = \tan^{-1} \frac{C_I}{C_R}$$

(5.4)

複素数のガウス平面表示
と極座標表示



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

C は複素振幅と呼ばれる複素数であり、その絶対値 $|C|$ が応答の振幅増減率を、その偏角 $\arg C$ が応答の位相遅れを表す。

速度と加速度は、式 (5.3) より、

$$\dot{y} = Cipe^{ipt}, \quad \ddot{y} = -Cp^2 e^{ipt} (\because i^2 = -1)$$

(5.5)

であり、式 (5.3) \ (5.5) を式 (5.2) へ代入すると次式が得られ、この恒等式から複素振幅 C を求めることができる。

$$C(-p^2 + 2h\omega_n ip + \omega_n^2) e^{ipt} = \frac{F}{m} e^{ipt}$$

$$\therefore C = \frac{\frac{F}{m}}{\omega_n^2 - p^2 + 2h\omega_n ip} \quad (\because e^{ipt} \neq 0)$$

(5.6)

・ 複素数の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{i\theta t} &= \frac{d}{dt} (\cos \theta t + i \sin \theta t) \\ &= \frac{d}{dt} \cos \theta t + i \frac{d}{dt} \sin \theta t \\ &= \theta (-\sin \theta t + i \cos \theta t) \\ &= i\theta (\cos \theta t + i \sin \theta t) \\ &= i\theta e^{i\theta t} \\ \therefore (e^{i\theta t})' &= i\theta e^{i\theta t} \end{aligned}$$

上式の分母・分子を $\omega_n^2 (= k/m)$ で割ると、

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{F}{m} \frac{1}{\omega_n^2}}{(\omega_n^2 - p^2 + 2h\omega_n ip) \frac{1}{\omega_n^2}} \\ &= \frac{\frac{F}{k}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + i2h \frac{p}{\omega_n}} \end{aligned}$$

静的荷重の変位 δ_s を利用すると、複素振幅 C は次式となる。

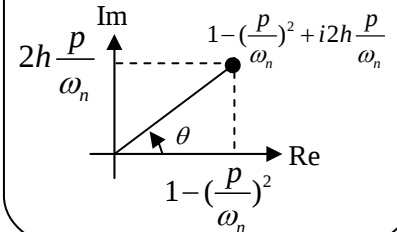
$$C = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + i2h\frac{p}{\omega_n}} \delta_s \quad \delta_s \equiv \frac{F}{k} \quad \text{--- (5.7)}$$

δ_s の s は static の頭文字で、 δ_s は静的な加重 F が加わったときのたわみの量を表す。

このままの式の形では分母に虚数単位があり極形式に直せないので、分母の有理化を行う。つまり、これは分母の極形式化を行うことと等価であり、次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + i2h\frac{p}{\omega_n}} &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} e^{-i\theta} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{2h\frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned} \quad \text{--- (5.8)}$$

・分母の複素平面上的表示



従って、複素振幅 C は

$$C = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot e^{-i\theta} \quad \text{--- (5.9)}$$

となる。従って、変位解 y は次式となる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot e^{-i\theta} \cdot e^{ipt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot e^{i(pt-\theta)} \end{aligned} \quad \text{--- (5.10)}$$

上式において、外力 $f(t)$ が余弦振動 $F \cos(pt)$ で与えられた場合、その質点の応答 y_c は次式で与えられ、

$$y_c = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot \cos(pt - \theta)$$

オイラーの公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

また、外力 $f(t)$ が正弦振動 $F \sin(pt)$ の場合、その応答 y_s は

$$y_s = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot \sin(pt - \theta)$$

・外力と応答の関係
複素外力の実部に対しては変位解の実部が対応し、複素外力の虚部に対しては変位解の虚部が対応する。

が対応している。

これまでに、複素外力 $F e^{ipt}$ が加わったとき、複素表示の変位応答を求めた。ここでは共振点 $p = \omega_n$ での挙動、特に非減衰の場合について考察しよう。今、式(5.8)において $p \rightarrow \omega_n$ とした時の極限を考えると、

$$\lim_{p \rightarrow \omega_n} \frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} = +\infty \quad \text{より} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (p \rightarrow \omega_n)$$

となる。従って、上式を考慮して、式(5.10)の変位は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \delta_s \cdot e^{i(pt - \theta)} \\ &\rightarrow \frac{1}{2h} \cdot \delta_s \cdot e^{i\left(pt - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (p \rightarrow \omega_n) \end{aligned} \quad \text{—— (5.11)}$$

となる。ここでは、振幅は $\delta_s / (2h)$ となり、外力に比べて共振時の応答は $\pi/2$ だけの位相遅れが生じている。

5.3 調和地動に対する定常応答

地震動に対する建物の応答は、強制外力に初期条件を加味した過渡応答を考えることが一般的である。これは質点の運動方程式より得られる非同次の常微分方程式の一般解(すなわち自由振動解を表す余関数と定

常解を表す特解の和)として表現できる。ここでは過渡応答のために必要な複素調和外力を受ける系の定常応答を、複素振幅を用いて導く。

1自由度系の質点の基礎に地動変位 $y_0(t)$ が加わった時の運動方程式は、相対変位を y として次式で表される。

$$\begin{aligned} & [-m(\ddot{y} + \ddot{y}_0)] + (-c\dot{y}) + (-ky) = 0 \\ & \therefore m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_0 \\ & \ddot{y} + 2h\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{y}_0, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad h = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \end{aligned}$$

—— (5.12)

地動を受ける場合の、地動慣性力 $-m\ddot{y}_0$ を見かけの外力とすれば式(5.2)とまったく同様にして扱うことができる。

ここでは、複素調和地動として

$$y_0 = a_0 e^{ipt} \quad \text{—— (5.13)}$$

に対する特解のみを考慮した定常応答解を調べよう。外力の加速度が

$$\ddot{y}_0 = (ip)^2 a_0 e^{ipt} = -a_0 p^2 e^{ipt}$$

として与えられるので、振動方程式(5.12)は次のように書ける。

$$\ddot{y} + 2h\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = a_0 p^2 e^{ipt} \quad \text{—— (5.14)}$$

上式は、式(5.2)において $F = ma_0 p^2$ としたものと同じであるから、その変位は式(5.10)より

$$y = \frac{\frac{m}{k} a_0 p^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot e^{i(pt - \theta)}$$

このとき位相 θ は

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

$$y = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot a_0 \cdot e^{i(pt-\theta)} \quad \left(\because \omega_n^2 = \frac{k}{m}\right)$$

—— (5.15)

上式と式(5.13)より、構造物の基礎からの相対変位に対する地動の変位の相対変位倍率は、次のように書ける。

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot e^{-i\theta}$$

$$= \left| \frac{y}{y_0} \right| \cdot e^{-i\theta}$$

—— (5.16)

・それぞれの複素振幅

$$|y| = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot a_0$$

$$|y_0| = a_0$$

次に、構造物の絶対加速度 $\ddot{Y} = \ddot{y} + \ddot{y}_0$ を求める。絶対加速度は式(5.14)より

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \ddot{y} + \ddot{y}_0 \\ &= -2h\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y \end{aligned}$$

である。速度は、 $\dot{y} = (Ce^{ipt})' = ipCe^{ipt} = ipy$ であるため、上式は、

$$\ddot{Y} = -(i2h\omega_n p + \omega_n^2)y \quad \text{—— (5.17)}$$

となり、上式に式(5.15)を代入すると、絶対加速度が得られる。

$$\ddot{Y} = \frac{-(i2h\omega_n p + \omega_n^2) \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot a_0 \cdot e^{i(pt-\theta)}$$

さらに、式を整理すると、

$$\ddot{Y} = \frac{1 + i2h \frac{p}{\omega_n}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot (-a_0 p^2 \cdot e^{i(pt-\theta)})$$

上式の分子を極形式で表すと、

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \frac{\sqrt{1^2 + \left(2h \frac{p}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot e^{i\theta'} \cdot (-a_0 p^2 \cdot e^{i(pt-\theta)}), \quad \theta' = \tan^{-1} 2h \frac{p}{\omega_n} \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + \left(2h \frac{p}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot (-a_0 p^2) \cdot e^{i(\theta'-\theta)} \cdot e^{ipt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi' &= \tan(\theta' - \theta) \\ &= \frac{\tan \theta' - \tan \theta}{1 + \tan \theta' \tan \theta} \\ &= \frac{2h \frac{p}{\omega_n} - \left[\frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \right]}{1 + 2h \frac{p}{\omega_n} \cdot \frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \\ &= \frac{-2h \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^3}{1 - (1 - 4h^2) \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi' = \theta' - \theta$ とすると、

$$\ddot{Y} = \frac{\sqrt{1 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} e^{i\varphi'} \cdot (-a_0 p^2 \cdot e^{ipt}), \quad \varphi' = \tan^{-1} \frac{-2h \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^3}{1 - (1 - 4h^2) \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

となる。ここで、改めて $\varphi = -\varphi'$ とおいて絶対加速度倍率 $\ddot{Y} / \ddot{y}_0$ を求めると、

$$\frac{\ddot{Y}}{\ddot{y}_0} = \frac{\sqrt{1 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{|\ddot{Y}|}{|\ddot{y}_0|} \cdot e^{-i\varphi} \quad \text{—— (5.18)}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2h \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^3}{1 - (1 - 4h^2) \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{—— (5.19)}$$

5.3 調和地動に対する過渡応答

初期条件を考慮した強制振動応答は、過渡応答と呼ばれる。ここでは、この応答について考える。調和形地動が初期に静止している構造物に作用する場合の過渡応答を考える。いま、地動を $y_0 = a_0 \cos pt$ とすると、振動方程式は以下のように表される。

$$\ddot{y} + 2h\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{y}_0 = a_0 p^2 \cos pt \quad \text{—— (5.19)}$$

この式の一般解は、特解と余関数の和として次のように表される。

$$y = A \cos(pt - \theta) + e^{-h\omega_n t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t); \quad \omega' = \sqrt{1 - h^2} \omega_n$$

$$A = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{ \left(1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 \right\}}} a_0$$

$$\theta = \frac{2h \frac{p}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{—— (5.20)}$$

初期条件として $t = 0$ で $y = 0; \dot{y} = 0$ を考慮すると、まず、初期変位から

$$y(0) = A \cos(-\theta) + a = 0$$

$$a = -A \cos(-\theta) = -A \cos(\theta) \quad \text{—— (5.21)}$$

次に、変位を1回微分して速度を求め、

$$\dot{y} = -Ap \sin(pt - \theta) - h\omega_n e^{-h\omega_n t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t)$$

$$+ e^{-h\omega_n t} (-a\omega' \sin \omega' t + b\omega' \cos \omega' t)$$

$$\dot{y}(0) = -Ap \sin(-\theta) + (-h\omega_n a + b\omega') = 0$$

これを、式(5.21)を考慮して、bについて解くと、

$$b = \frac{-Ap \sin \theta + h\omega_n (-A \cos \theta)}{\omega'}$$

$$= \frac{A(-p \sin \theta - h\omega_n \cos \theta)}{\omega'}$$

$$= \frac{-A}{\omega'} (p \sin \theta + h\omega_n \cos \theta) \quad \text{—— (5.22)}$$

となる。得られた a, b を変位に代入すると、次のような一般解が得られる。

$$\begin{aligned}
 y &= A \cos(pt - \theta) + e^{-h\omega_n t} (-A \cos \theta \cdot \cos \omega' t - \frac{A}{\omega'} (p \sin \theta + h\omega_n \cos \theta) \sin \omega' t) \\
 &= A \left\{ \cos(pt - \theta) - e^{-h\omega_n t} \left(\cos \theta \cdot \cos \omega' t + \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \left(\frac{p}{\omega_n} \sin \theta + h \cos \theta \right) \sin \omega' t \right) \right\}
 \end{aligned}
 \quad \text{—— (5.23)}$$

1) 共振時の過渡応答

共振状態の場合は、以下の値となる。

$$\boxed{\omega' = p \quad \frac{p}{\omega_n} = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1}$$

まず、変位(5.23)式は、上の値を考慮すると次式となる。

$$y = A \left\{ \cos\left(pt - \frac{\pi}{2}\right) - e^{-h\omega_n t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega' t \right) \right\}
 \quad \text{—— (5.24)}$$

$$A = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n} \right)^2 a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{p}{\omega_n}\right)^2 + \left(2h \frac{p}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{a_0}{2h}$$

従って、変位応答は、 $\cos(pt - \pi/2) = \sin pt = \sin \omega_n t$ (共振時) を考慮すると以下ようになる。

$$y(t) = \frac{a_0}{2h} \left(\sin \omega_n t - \frac{e^{-h\omega_n t}}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega' t \right)$$

さらに、通常の構造物では、 $h \ll 1$; $\omega' \approx \omega_n$ であることから、次の式が導かれる。

$$y(t) \approx \frac{a_0}{2h} (1 - e^{-h\omega_n t}) \sin \omega_n t
 \quad \text{—— (5.25)}$$

上式から、共振成分に対する応答は固有周期で振動しながらしだいに振幅が増加し、定常振幅に近づいていくことが分かる。

2) 特に非減衰の場合

次に、非減衰の場合について考える。ここでは、 p/ω_n が小から 1 に近づくものとする。この場合の各定数は、

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = 0; \quad \cos \theta = 1; \quad \sin \theta = 0; \quad \frac{p}{\omega} = 1 \\ h = 0; \quad \omega' = \omega_n \end{array}} \quad A = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 a_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

であり、この値を考慮すると、変位(5.23)式は、

$$y(t) = \frac{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 a_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \{\cos pt - \cos \omega' t\}$$

となる。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \frac{\cos x}{1} = 1$$

を考慮すると、

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{p}{\omega} \rightarrow 1} y(t) &= \frac{\omega_n^2 \cdot a_0}{(\omega_n - p)(\omega_n + p)} \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 \left\{ 2 \sin \frac{(\omega_n + p)t}{2} \sin \frac{(\omega_n - p)t}{2} \right\} \\ &= \frac{p^2 a_0 t}{2(\omega_n + p)} \left(2 \sin \frac{(\omega_n + p)t}{2} \frac{\sin \frac{(\omega_n - p)t}{2}}{\frac{(\omega_n - p)t}{2}} \right) \\ &= \lim_{\frac{p}{\omega} \rightarrow 1} \frac{\omega_n a_0 t}{2} \sin \frac{(p + \omega_n)t}{2} = \frac{1}{2} a_0 \omega_n t \sin \omega_n t \end{aligned}$$

となる。

最終的に、得られた非減衰で共振時の変位は次式となる。

$$y(t) = \frac{1}{2} a_0 \omega t \sin \omega t \quad \text{—— (5.26)}$$

非減衰で共振の場合は、振幅が時間と比例して増大し、 $t = \infty$ で振幅も無限大となる。

5.4 種々の過渡外力
に対する応答

本節では、種々の過渡外力に対する応答を求めてみる。

(a) ステップ外力

$t = 0$ で一定の力 F が静止の状態から急に加わる場合、このような外力をステップ外力という。振動方程式は以下で表される。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \quad \text{—— (5.27)}$$

単位質量あたりの外力を

$$\alpha = \frac{F}{m}$$

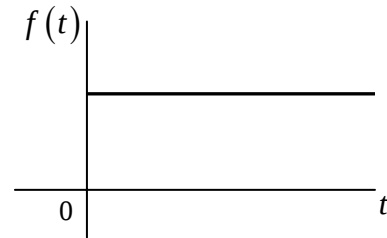


図 5.1 ステップ外力

とすれば、

$$\ddot{y} + 2h\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \alpha$$

上式の特解は右边が周期関数でないので、次の定数となる。

$$y = A; \dot{y} = 0; \ddot{y} = 0$$

これを、式(5.27)の振動方程式に代入し、この定数 A を以下のように求める。

$$\omega_n^2 A = \alpha; \quad A = \frac{\alpha}{\omega_n^2} = \frac{F}{m} \frac{m}{k} = \frac{F}{k} = \delta_s \quad \text{—— (5.28)}$$

この係数は、荷重 F が静的に加わったときの変位 δ_s であることが分かる。従って、上記を考慮すると、一般解は、

$$y = \delta_s + e^{-h\omega_n t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t) \quad \text{—— (5.29)}$$

となる。ここで、初期条件は $t = 0; y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ であるため、まず、 a は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} y(0) &= \delta_s + a = 0 \\ a &= -\delta_s \end{aligned} \quad \text{—— (5.30)}$$

次に、速度から b が求められる。

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -h\omega_n e^{-h\omega_n t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t) + e^{-h\omega_n t} (-a\omega' \sin \omega' t + b\omega' \cos \omega' t) \\ \dot{y}(0) &= -h\omega_n a + b\omega' = 0 \\ b &= \frac{h\omega_n (-\delta_s)}{\omega'} = \frac{-h\omega_n}{\omega'} \delta_s = \frac{-h\omega_n \delta_s}{\sqrt{1-h^2}\omega_n} = \frac{-h\delta_s}{\sqrt{1-h^2}} \quad \text{--- (5.31)}\end{aligned}$$

従って、変位は、

$$y = \delta_s \left\{ 1 - e^{-h\omega_n t} \left(\cos \omega' t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega' t \right) \right\} \quad \text{--- (5.32)}$$

となり、また、速度は式(5.28)を考慮すると

$$\dot{y} = \delta_s \left\{ h\omega_n e^{-h\omega_n t} \left(\cos \omega' t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega' t \right) - e^{-h\omega_n t} \left(-\omega' \sin \omega' t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \omega' \cos \omega' t \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}&= \delta_s e^{-h\omega_n t} \left\{ \left(h\omega_n - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \omega' \right) \cos \omega' t + \left(\frac{h^2 \omega_n}{\sqrt{1-h^2}} + \omega' \right) \sin \omega' t \right\} \\ &= \delta_s e^{-h\omega_n t} \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega' t = \frac{\alpha}{\sqrt{1-h^2} \omega_n} e^{-h\omega_n t} \cdot \sin \omega' t \\ &= \left(\frac{\alpha}{\omega'} \right) e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t \quad \text{--- (5.33)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&h\omega_n - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \omega' \\ &= h\omega_n - \frac{h\sqrt{1-h^2}\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \\ &\frac{h^2 \omega_n}{\sqrt{1-h^2}} + \omega' \\ &= \frac{h^2 \omega_n + (1-h^2)\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \\ &\alpha = \omega_n^2 \delta_s \\ &\delta_s = \frac{\alpha}{\omega_n^2}\end{aligned}$$

となる。ここで、減衰のない場合の変位と速度は、式(5.32)から $h=0$ とし以下ようになる。

$$y = \delta_s (1 - \cos \omega_n t); \quad \dot{y} = \delta_s \omega_n \sin \omega_n t \quad \text{--- (5.34)}$$

(b) 矩形パルス外力

矩形パルス外力に対する応力を考える。ここでは、減衰のない場合について扱う。継続時間を $T_0/2$ と置けば、次のように、 $t \leq T_0/2$ では(a)のステップ外力と同じ振動状態となる。ここでは、 $h=0$ とする。

$$y = \delta_s \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right); \quad t \leq T_0/2; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (固有周期)} \quad \text{--- (5.35)}$$

$t \geq T_0/2$ では、次の初期条件をもつ自由振動となる。ここでの初期条件は、式(5.34)で $t = T_0/2$ とすることで得られる。

$$\begin{aligned} y(t = T_0/2) &= y_0 = \delta_s \left(1 - \cos\left(\frac{\pi T_0}{T}\right) \right) \\ \dot{y}(t = T_0/2) &= v_0 = \delta_s \omega_n \sin\left(\frac{\pi T_0}{T}\right) \end{aligned} \quad \text{—— (5.36)}$$

自由振動の解は、上の初期条件を用いて、

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cos \omega_n \tilde{t} + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n \tilde{t}; \quad \tilde{t} = t - T_0/2 \\ &= A \sin(\omega_n \tilde{t} + \theta) \end{aligned} \quad \text{—— (5.37)}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} = \delta_s \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\pi T_0}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{1}{\omega_n^2} \sin^2 \frac{\pi T_0}{T}} \\ &= \delta_s \sqrt{1 - 2 \cos \frac{\pi T_0}{T} + \cos^2 \frac{\pi T_0}{T} + \sin^2 \frac{\pi T_0}{T}} \\ &= \delta_s \sqrt{2(1 - \cos \frac{\pi T_0}{T})} \\ &= 2\delta_s \sqrt{\sin^2 \frac{\pi T_0}{2T}} = 2\delta_s \sin \frac{\pi T_0}{2T} \end{aligned} \quad \text{—— (5.38)}$$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ \cos^2 \frac{\pi T_0}{T} + \sin^2 \frac{\pi T_0}{T} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\omega y_0}{v_0} \\ &= \frac{\omega(1 - \cos \frac{\pi T_0}{T})}{\omega \sin \frac{\pi T_0}{T}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi T_0}{T}}{\sin \frac{\pi T_0}{T}} = \frac{2 \sin^2(\frac{\pi T_0}{2T})}{2 \sin \frac{\pi T_0}{2T} \cos \frac{\pi T_0}{2T}} = \tan \frac{\pi T_0}{2T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi T_0}{2T} \quad \text{—— (5.39)}$$

以上をまとめると、一般解が得られる。

$$\begin{aligned}
y &= A \sin(\omega_n \tilde{t} - \theta) \\
&= 2\delta_s \sin \frac{\pi T_0}{2T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - T_0/2) + \frac{\pi T_0}{2T}\right) \\
&= 2\delta_s \sin \frac{\pi T_0}{2T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi T_0}{2T}\right) \quad \text{—— (5.40)}
\end{aligned}$$

(c) インパルス

力積 $F\Delta t$ を一定値 1 にしたまま、 Δt を無限に小さくすると、この外力は単位インパルスと呼ばれるものになり、デルタ関数 $\delta(t)$ によって表現される。

$\delta(t)$ の性質

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau)$$

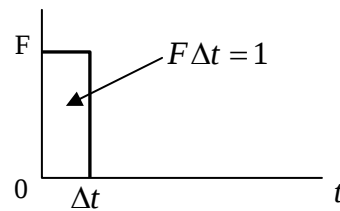


図 5.2 インパルス外力

インパルス外力は、 $t = 0$ で作用する大きさ F のステップ外力 $f(t)$ と $t = \Delta t$ で作用するステップ外力 $f(t - \Delta t)$ との差を、 $F\Delta t = 1$ として、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの極限と考えられる。したがって、インパルス外力に対する応答 $g(t)$ は、次のように、それぞれのステップ外力に対する応答 $y(t)$ と $y(t - \Delta t)$ との差の極限と考えればよい。

$$\begin{aligned}
g(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{y(t) - y(t - \Delta t)\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \dot{y}(t) \quad \text{—— (5.41)}
\end{aligned}$$

ここで、速度 $\dot{y}(t)$ は、式(5.33)で

$$\dot{y} = \left(\frac{\alpha}{\omega'} \right) e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t \quad \text{—— (5.42)}$$

と与えられており、 $\alpha = F/m$ を考慮して

$$\begin{aligned}
g(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F\Delta t}{m\omega'} e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t \\
&= \frac{1}{m\omega'} e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t, \quad \omega' = \sqrt{1 - h^2} \omega_n \quad \text{—— (5.43)}
\end{aligned}$$

となる。この単位インパルス外力に対する応答 $g(t)$ をインパルス応答という。また、地動加速度が単位インパルスの場合のインパルス応答は、初速度が -1 の自由振動となる。

$$\ddot{y} + 2h\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{y}_0(t) = -\delta(t)$$

$$g(t) = -\frac{1}{\omega'} e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t \quad \text{—— (5.44)}$$

(d) 任意外乱に対する応答

任意外力に対する応答は、外力を微小なインパルス外力の連続と考えることより得られる。図より、時刻 τ における力積 $f(\tau)d\tau$ のインパルスによって生ずる振動の時刻 t における値は次の式で与えられる。

$$y(t) = g(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad \text{—— (5.45)}$$

任意外力 $f(t)$ に対する応答 $y(t)$ は、上式に(5.43)式を適用し、 $\tau = 0 \sim t$ まで重ね合わせることで得られる。

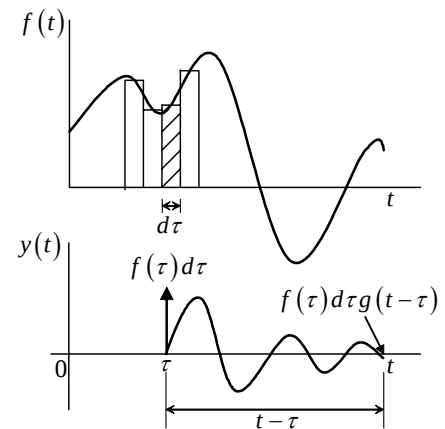


図 5.3 任意外力

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{m\omega'} \int_0^t f(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \quad \text{—— (5.46)}$$

また、任意地動加速度 $\ddot{y}_0(t)$ に対する応答は、

$$g(t) = -\frac{1}{\omega'} e^{-h\omega_n t} \sin \omega' t$$

であるため、任意地動加速度に対する応答は、

$$y(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \quad \text{—— (5.47)}$$

と書ける。なお、地動における速度および絶対加速度応答はそれぞれ次のようになる。速度は式(5.47)を t で一回微分することで得られる。

$$\dot{y}(t) = -\int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau$$

$$+ \frac{h\omega_n}{\omega'} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

初期条件 $y_{t=0} = \dot{y}_{t=0} = 0$
この形の解をデュアメル積分という

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= -\int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau \\
&\quad - h\omega_n \left(-\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \right) \\
&= -\int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau \\
&\quad - h\omega_n y(t)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

絶対加速度は、上式を考慮すると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) - \ddot{y}_0(t) &= -2h\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y \\
&= -2h\omega_n \left(-\int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau - h\omega_n y(t) \right) - \omega_n^2 y(t) \\
&= 2h\omega_n \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau + 2h^2 \omega_n^2 y(t) - \omega_n^2 y(t) \\
&= (2h^2 - 1) \omega_n^2 y(t) + 2h\omega_n \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau \\
&= \left(\frac{2h^2 - 1}{\sqrt{1 - h^2}} \right) \omega' \omega_n y(t) + 2h\omega_n \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 2h\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y &= -\ddot{y}_0(t) \\
\ddot{y}(t) - \ddot{y}_0(t) &= -2h\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y
\end{aligned}$$

ここで、式(5.47)の $y(t)$ を代入することで、絶対加速度が得られる。

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) - \ddot{y}_0(t) &= \frac{1 - 2h^2}{\sqrt{1 - h^2}} \omega_n \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \\
&\quad + 2h\omega_n \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{5.49}$$

5.5 地震応答スペクトル

任意の地震動に対する最大変位は、次式の変位

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-h\omega_n(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

を用いると、固有周期 T 及び減衰定数 h の関数となり、次式で表される。
これを変位応答スペクトルと呼ぶ。

$$\left| y(T, h, t) \right|_{\max} = \frac{T'}{2\pi} \left| \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\left(\frac{2\pi h}{T}\right)(t-\tau)} \sin \frac{2\pi}{T'}(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \tag{5.50}$$

同様に、速度、加速度においても応答スペクトルが定義される。

変位応答スペクトル： $S_D = y_{\max}$

速度応答スペクトル： $S_V = \omega_n S_D \approx \dot{y}_{\max}$

加速度応答スペクトル： $S_A = \omega_n^2 S_D = \omega_n S_V \approx (\ddot{y} + \ddot{y}_0)_{\max}$

$$S_A = \frac{2\pi}{T} S_V; \quad S_D = \frac{T}{2\pi} S_V \quad \text{—— (5.51)}$$

せん断力の最大値 $Q_{\max}$ は、応答スペクトルを用いると次式で表される。

$$Q_{\max} = ky_{\max} = kS_D = m\omega_n^2 S_D = mS_A \quad \text{—— (5.52)}$$

せん断力係数 q 及び作用震度 α は、重力加速度を g とすれば、

$$q = \frac{Q}{mg} = \frac{S_A}{g}; \quad \alpha = m(\ddot{y} + \ddot{y}_0)_{\max} / mg = \frac{S_A}{g} \quad \text{—— (5.53)}$$

また、運動エネルギーまたはポテンシャルエネルギーの最大値は、

$$E_{\max} = \frac{1}{2} k S_D^2 = \frac{1}{2} m S_V^2 \quad \text{—— (5.54)}$$

応答スペクトル値に対する減衰の影響は、周期によってかなり異なるが、簡単な近似式で表すと次のようになる。

$$\frac{S_h}{S_0} = \frac{1}{1 + \alpha h}; \quad \alpha = 10 \sim 20 \quad \text{—— (5.55)}$$

ここで、 S_0 は非減衰スペクトルで、 S_h は減衰スペクトルを表す。

地震動が構造物に及ぼす効果を全体としてとらえるために、Housner の速度スペクトルの面積からスペクトル強さ SI を定義した。これは地震動の強さを表す指標として、最大加速度、最大速度ともにしばしば用いられる量である。

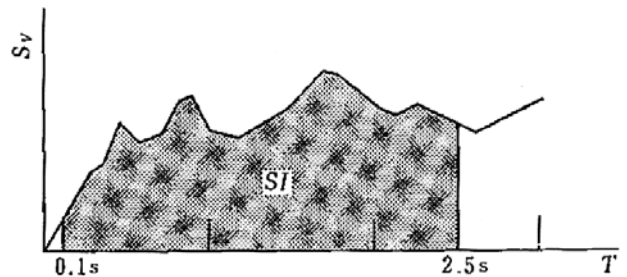


図5.4 ズベクトル強さ

$$SI = \int_{0.1s}^{2.5s} S_v(T, h) dT \quad \text{—— (5.56)}$$

Housner は $h = 0.2$ の場合を基準値として用いている。Housner はアメリカでの強震記録に基づいて、図のような平均速度応答スペクトルを作成した。平均速度応答スペクトルでは、短周期では周期とともに増加するが、ある周期以上では一定となる傾向を示す。Housner によって指摘された速度スペクトル一定の傾向は強震地動の応答スペクトルの大変重要な性質である。

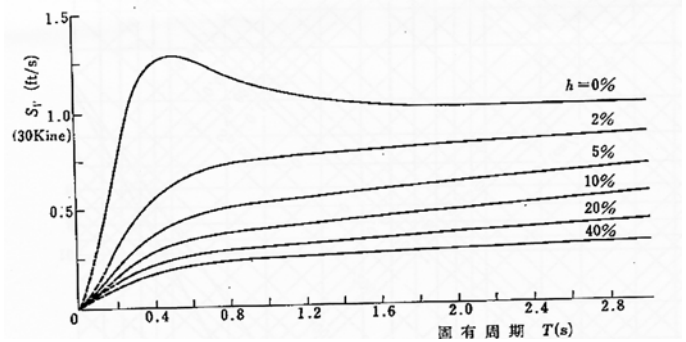


図 5.5 速度応答スペクトル

梅村魁は図のような標準応答スペクトルを提案した。この梅村スペクトルは、 $h = 0.05$ の応答スペクトルのほぼ上限値をとったものである。速度及び加速度スペクトルは、変位スペクトルに各々 $2\pi/T$ と $(2\pi/T)^2$ を掛けることで得られる。

$$S_D = \begin{cases} 90k_g T^2 \text{ cm} & T \leq 0.5 \text{ sec} \\ 45k_g T & 0.5 \leq T \leq 3 \\ 135k_g & 3 \leq T \end{cases} \quad \text{--- (5.57)}$$

$$S_V = \begin{cases} 566k_g T \text{ cm/sec} & T \leq 0.5 \text{ sec} \\ 283k_g & 0.5 \leq T \leq 3 \\ 894k_g / T & 3 \leq T \end{cases} \quad \text{--- (5.58)}$$

$$S_A = \begin{cases} 3.6gk_g \text{ cm/sec}^2 & T \leq 0.5 \text{ sec} \\ 1.8gk_g / T & 0.5 \leq T \leq 3 \\ 5.4gk_g / T^2 & 3 \leq T \end{cases} \quad \text{--- (5.59)}$$

$$(g = 980 \text{ cm/s}^2)$$

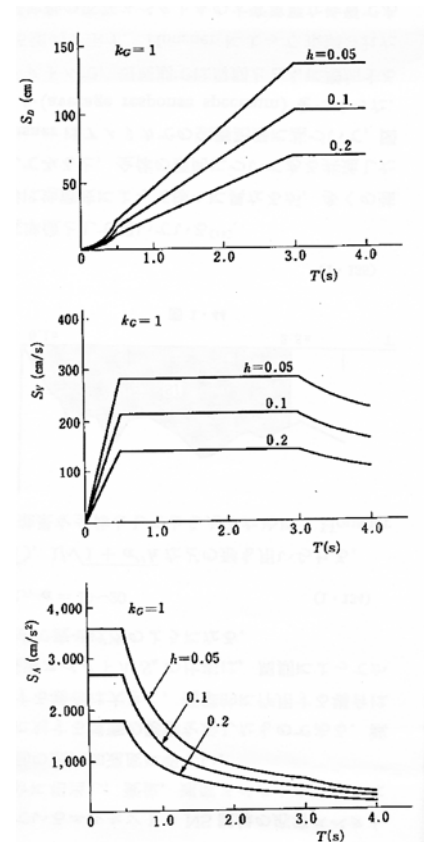


図 1-46

図 5.6 梅村スペクトル

ここに、 k_g は地震震度（最大地動加速度/重力加速度）である。

また、Newmark は図のような 3 方向対数表示スペクトルを用いている。変位、速度、加速度の応答スペクトルの間には、式(5.51)の関係があるので、図上の縦軸と 2 つの横軸によって、 S_D, S_V, S_A の値を同時に表すことができる。

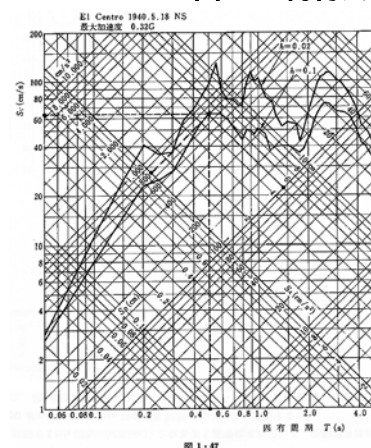


図 5.7.3 方向対数表示スペクトル

例題 5.1

図のような構造物が、地動震度 $k_g = 0.2$ の地動を受けるときの応答変位、速度、加速度及びせん断力を求めよ。ただし、 $h = 0.05$ の対する値とする。

$$m = \frac{196 \cdot 10^3 N}{9.8} = 2 \cdot 10^4 kg \quad \text{バネ定数: } k = 98 kN / cm = 98 \cdot 10^5 N / m$$

$$\text{固有角振動数: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{98 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4}} = \sqrt{\frac{980}{2}} = 22.14$$

$$\text{固有周期: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3.14}{22.14} = 0.284 \text{ sec}$$

梅村のスペクトルを用いて、応答最大値を予測する。ここで、 $T = 0.284 \text{ s}$, $h = 0.05$ を用いる。

$$S_D = 90T^2 k_g cm = 90 \cdot 0.284^2 \cdot 0.2 = 1.45 cm$$

$$S_V = 566 k_g T cm / s = 566 \cdot 0.284 \cdot 0.2 = 32.1 cm / sec$$

$$S_A = 3.6 g k_g cm / s^2 = 3.6 \cdot 980 \cdot 0.2 = 705.6 cm / sec^2$$

関係式を用いて計算してみよう。

$$S_D = 1.45 cm$$

$$S_V = S_D \omega cm / s = 1.45 \cdot 22.14 = 32.1 cm / sec$$

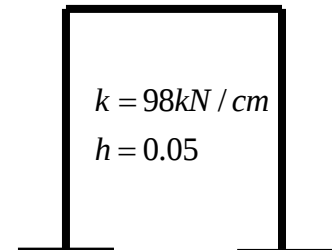
$$S_A = S_D \omega^2 cm / s^2 = 1.45 \cdot 22.14^2 = 711 cm / sec^2$$

次に、せん断力と、せん断力係数を求める。

$$Q = k S_D = 98 \cdot 1.45 = 142.1 kN$$

$$q = \frac{Q}{W} = \frac{142.1}{196} = 0.73$$

$$W = 196 kN, m = 2 \cdot 10^4 kg$$

**例題 5.2**

例題 5.1 の構造物に地動震度 0.2 で最大変形が 0.5cm となるように、梅村スペクトルに基づいて剛性 k を定めよ。

$$S_D = 90T^2 0.2 cm = 0.5 cm; \quad T = \sqrt{0.02778} = 0.167 s$$

$$k = \omega^2 m = \left(\frac{2 \cdot 3.14}{0.167} \right)^2 \cdot 2 \cdot 10^4 = 282.8 \cdot 10^5 N / m = 282.8 kN / cm$$

$$q = Q / W = 282.8 \cdot 0.5 / 196 = 0.72$$

本節では、振動状態をエネルギーで評価し、その特性を分析することにする。

(a) 自由振動

まず非減衰自由振動の場合について考えてみよう。振動方程式は以下のようなものである。

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{—— (5.60)}$$

上式の両辺に $\dot{y}$ を掛けて、次式を考慮し、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = m \dot{y} \cdot \ddot{y}; \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} k y^2 = k y \cdot \dot{y} \quad \text{—— (5.61)}$$

振動方程式を以下のように変形する。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k y^2 \right) = 0 \quad \text{—— (5.62)}$$

さらに、上式を t_1 から t_2 まで積分すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k y^2 \right) dt$$

$$\frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 = - \left(\frac{1}{2} k y_2^2 - \frac{1}{2} k y_1^2 \right) \quad \text{—— (5.63)}$$

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

となる。式(5.63)の左辺は、時間 t_1 から t_2 までの間に増加する運動エネルギーであり、同じく右辺はポテンシャルエネルギーの増加分を表す。この式は、両者の増加分が合い等しいことを表し、従って、任意の時刻で、運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の和である**振動エネルギー** E は、常に一定であることを示す。

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2(t_2) + \frac{1}{2} k y^2(t_2) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2(t_1) + \frac{1}{2} k y^2(t_1) \quad \text{—— (5.64)}$$

上記の式より非減衰系では、エネルギー消費がないので、系の振動エネルギーは変わらないことが分かる。すなわち、次式が成立する。

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{—— (5.65)}$$

例えば、初期変位 a による自由振動を考えてみよう。このときの変位は次式で表される。

$$y = a \cos \omega t \quad \text{—— (5.66)}$$

さらに、速度と加速度は、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -a\omega \sin \omega t \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad \text{—— (5.67)}$$

であり、これを基に、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを計算してみよう。まず、運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m (-a\omega \sin \omega t)^2 \\ &= \frac{a^2 \omega^2 m}{2} \sin^2 \omega t = \frac{a^2 k}{2} \sin^2 \omega t \\ &= \frac{a^2 k}{4} (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned} \quad \text{—— (5.68)}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \sin^2 \omega t &= \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \\ \cos^2 \omega t &= \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \end{aligned}$$

となり、ポテンシャルエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} k a^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad \text{—— (5.69)}$$

となる。両式を足すと

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{a^2 k}{4} (1 - \cos 2\omega t) + \frac{a^2 k}{4} (1 + \cos 2\omega t) \\ &= \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 = \text{一定} \end{aligned} \quad \text{—— (5.70)}$$

となり、振動エネルギー E は一定となることが確認された。

次に、減衰自由振動の場合を考えよう。減衰がある場合の振動方程式は、以下のである。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad \text{—— (5.71)}$$

前述と同様に $\dot{y}$ を掛けて、0 から t まで積分すると次式が得られる。

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2(t) + \frac{1}{2}ky^2(t) + \int_0^t c\dot{y}dt = E + D = \text{一定} \quad \text{—— (5.72)}$$

ここで、 D は減衰力のなす仕事であり、次の式で表される。

$$D = \int_0^t c\dot{y}^2 dt \quad \text{—— (5.73)}$$

式(5.72)より、

$$\frac{d(E + D)}{dt} = 0 \quad \text{—— (5.74)}$$

となる。すなわち、振動エネルギー E の減少分は、その時間内に減衰力がなした仕事に等しい。

図 5.8 に、粘性減衰自由振動（初期変位 a 、初速 0）におけるエネルギーの変化の例を示す。また図 5.8 は、減衰力を含めた復元力 $Q (= ky + c\dot{y})$ と変形との関係を示したものである。A 点から B 点までの 1 サイクル間に消費されたエネルギーは斜線部の面積に相当する。このように復元力と変形の関係がループを画くことが、減衰振動の本質的な特徴である。

1 サイクル間に減衰力のなした仕事 ΔW と振動エネルギーの減少分との関係は、図 5.8 より、測定点では運動エネルギーがゼロであるため、

$$\Delta W = \frac{1}{2}ky_1^2 - \frac{1}{2}ky_2^2 \quad \text{—— (5.75)}$$

で表される。1 サイクル間の振動エネルギーの平均値を近似的に 1 サイクルの中央での値 $ky_1^2/2$ とすれば、減衰が小さい場合は、次式が成立する。

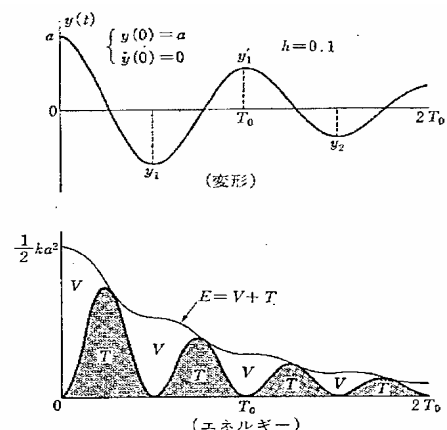


図 5.8 減衰時のエネルギー

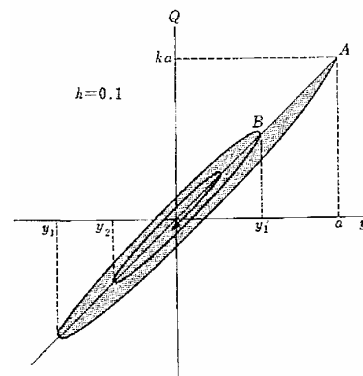


図 5.9 復元力と変位の関係

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\frac{1}{2}ky_1^2 - \frac{1}{2}ky_2^2}{\frac{1}{2}ky_1'^2} = \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{y_1'}\right)^2 \quad \text{—— (5.76)}$$

ここで、減衰を持つ振動系の解から、変位は次式で与えられる。

$$y = Ae^{-h\omega_n t} \sin(\sqrt{1-h^2}\omega_n t - \phi) \quad \text{—— (5.77)}$$

ただし、測定値は振幅のピーク時であるので、

$$y_1 = Ae^{-h\omega_n t_1}; y_2 = Ae^{-h\omega_n(t_1+T)}; y_1' = Ae^{-h\omega_n(t_1+T/2)} \quad \text{—— (5.78)}$$

となる。上式を考慮すると、式(5.76)は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{W} &= \left(\frac{Ae^{-h\omega_n t_1}}{Ae^{-h\omega_n(t_1+T/2)}} \right)^2 - \left(\frac{Ae^{-h\omega_n(t_1+T)}}{Ae^{-h\omega_n(t_1+T/2)}} \right)^2 \\ &= (e^{-h\omega_n t_1} \cdot e^{h\omega_n(t_1+T/2)})^2 - (e^{-h\omega_n(t_1+T)} \cdot e^{h\omega_n(t_1+T/2)})^2 \\ &= (e^{h\omega_n(-t_1+t_1+T/2)})^2 - (e^{h\omega_n(-t_1-T+t_1+T/2)})^2 \\ &= (e^{h\omega_n T/2})^2 - (e^{-h\omega_n T/2})^2 \\ &= e^{h\omega_n T} - e^{-h\omega_n T} \end{aligned} \quad \text{—— (5.79)}$$

となる。さらに、固有周期は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-h^2}}; \quad h \ll 1; \quad T \simeq \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{—— (5.80)}$$

であり、従って、

$$\frac{\Delta W}{W} = e^{2\pi h} - e^{-2\pi h} \quad \text{—— (5.81)}$$

となる。ここで、上記の関数を h が小であることから、 h について次のようにテーラー展開する。

$$e^{2\pi h} = 1 + 2\pi h + 4\pi^2 h^2 + \dots$$

$$e^{-2\pi h} = 1 - 2\pi h + 4\pi^2 h^2 + \dots$$

展開式から分かるように、2式の差は近似的に $4\pi h$ となる。従って、

$$\frac{\Delta W}{W} = \left(\frac{y_1}{\dot{y}_1} \right)^2 - \left(\frac{y_2}{\dot{y}_1} \right)^2 \cong 4\pi h \quad \text{—— (5.82)}$$

上式を書き直すと、減衰定数が以下のように得られる。

$$h \cong \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right) \quad \text{—— (5.83)}$$

(b) 強制定常振動

次に、調和外力による**定常振動**の場合を考えよう。振動方程式は以下のようである。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \cos pt \quad \text{—— (5.84)}$$

前述と同様に、 $\dot{y}$ を掛けて積分を行うと次式が得られる。

$$E + D - L = \text{一定} \quad \text{—— (5.85)}$$

ここで、 L は外力のなす仕事、 D は減衰のなす仕事であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^t F \cos pt \cdot \dot{y} dt \\ &\quad \Downarrow \quad \frac{dy}{dt} \cdot dt \downarrow \\ &= \int_{y(0)}^{y(t_1)} F \cos ptdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^t c\dot{y}\dot{y}dt \\ &\quad \Downarrow \quad \downarrow \frac{dy}{dt} \cdot dt \\ &= \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} c\dot{y}dy \end{aligned}$$

すなわち、振動エネルギー+減衰力のなした仕事の変化は、その間に外力のなした仕事に等しいことを意味する。定常振動では1サイクル後に振動エネルギーは変化しないことから、1サイクル間に外力のなした仕事は減衰力によって消費された仕事に等しいことが分かる。

上記の1サイクル間に外力のなした仕事は減衰力の消費した仕事に

等しいことを、次の定常振動の解を用いて検証する。定常振動の解を

$$\begin{aligned} y &= a \cos(pt - \theta) \\ \dot{y} &= -ap \sin(pt - \theta) \end{aligned} \quad \text{—— (5.86)}$$

とすれば、1 サイクル間に減衰力のなす仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int c \dot{y} dy = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} c \dot{y}^2 dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} ca^2 p^2 \sin^2(pt - \theta) dt \\ &= ca^2 p^2 \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sin^2(pt - \theta) dt \\ &= \frac{ca^2 p^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} (1 - \cos 2(pt - \theta)) dt \\ &= \frac{ca^2 p^2}{2} \left([t]_0^{\frac{2\pi}{p}} - \frac{1}{2p} [\sin 2(pt - \theta)]_0^{\frac{2\pi}{p}} \right) \\ &= \frac{ca^2 p^2}{2} \left(\frac{2\pi}{p} \right) \\ &= ca^2 p \pi \end{aligned}$$

$$T = 2\pi / p$$

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

$$\begin{aligned} &\sin 2(2\pi - \theta) - \sin(-2\theta) \\ &= \sin(4\pi - 2\theta) - \sin(-2\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{—— (5.87)}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} h &= \frac{c}{c_{cr}} \\ c &= hc_{cr} = h \cdot 2\sqrt{mk} \\ &= 2hm\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{mk} \frac{\omega}{\omega} &= \frac{2\sqrt{mk}\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \\ &= 2m\omega \end{aligned}$$

であり、従って、1 サイクル間に減衰力のなす仕事は

$$\Delta W = 2\pi h m \omega p a^2 \quad \text{—— (5.88)}$$

と表される。すなわち、粘性減衰定常振動では、1 サイクル間の消費エネルギー ΔW は振動数に比例し、振幅の 2 乗に比例する。静的な場合は $p=0$ であるから、 ΔW は 0 である。

一方、外力が 1 サイクル間になす仕事 ΔL は次のように表される。

$$\Delta L = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} F \cos pt \cdot \dot{y} dt \quad \text{—— (5.89)}$$

ここで、定常振動の解

$$\begin{aligned} y &= a \cos(pt - \theta) \\ \dot{y} &= -ap \sin(pt - \theta) \end{aligned} \quad \text{—— (5.90)}$$

を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} -apF \cos pt \cdot \sin(pt - \theta) dt \\ &= -apF \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \cos pt \cdot \sin(pt - \theta) dt \end{aligned} \quad \text{—— (5.91)}$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - a) &= \\ \sin \theta \cos a - \cos \theta \sin a \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\cos pt \sin(pt - \theta) = \cos pt (\sin pt \cos \theta - \cos pt \sin \theta)$$

となることを考慮すると

$$\Delta L = -apF \int_0^{\frac{2\pi}{p}} [\cos \theta (\cos pt \cdot \sin pt) - \sin \theta (\cos pt \cdot \cos pt)] dt$$

直交条件より

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p}} (\cos pt \cdot \sin pt) dt = 0$$

となる。さらに上記の積分を実行するとき、直交条件を考慮すると、

$$\Delta L = apF \cdot \frac{\pi}{p} \sin \theta = aF \pi \sin \theta \quad \text{—— (5.92)}$$

となる。また、前章で求めた定常解より、振幅と位相遅れは

$$\begin{aligned} a &= \frac{\delta_s}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4h^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{2h \left(\frac{p}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \cos^2 pt dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \left(\frac{1 + \cos 2pt}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{p}} + \frac{1}{2} [2p \sin 2pt]_0^{\frac{2\pi}{p}} \\ &= \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{\omega} \end{aligned}$$

で与えられており、従って、 $\sin \theta$ は、次式のように求められる。

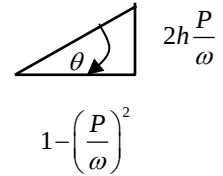
$$\sin \theta = \frac{2h\left(\frac{p}{\omega}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4h^2\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}} = \frac{2h\left(\frac{p}{\omega}\right) \cdot a}{\delta_s}$$

$$= \frac{2h\left(\frac{p}{\omega}\right) \cdot ka}{F} = \frac{2hkap}{F\omega}$$

$$= \frac{2hm\omega^2 ap}{F\omega} = \frac{apc}{F}$$

$$F = k\delta_s$$

$$\delta_s = \frac{F}{k}$$



(5.93)

この値を式(5.93)の ΔL に代入すると

$$\Delta L = \pi a F \sin \theta$$

$$= \pi a F \frac{2hkap}{F\omega} = 2\pi ha^2 p \frac{k}{\omega}$$

$$= 2\pi hm\omega a^2 p$$

(5.94)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = \omega^2 m$$

$$c/m = 2h\omega$$

$$\omega^2 = k/m$$

となる。先に求めた ΔW は、

$$\Delta W = 2\pi hm\omega pa^2 \quad (5.95)$$

であり、これで、 ΔL と ΔW の等しいことが示された。

特に、共振点では、位相差 θ が $\pi/2$ であり、また振幅も大きいので式 (5.92) よりエネルギー消費も大きくなる。

定常調和振動において、粘性減衰力を含めた復元力 $Q (= ky + c\dot{y})$ と変位 (y) との関係は、図 5.10 のような楕円で表される。これを式で求めてみよう。定常振動の解

$$y = a \cos(pt - \theta)$$

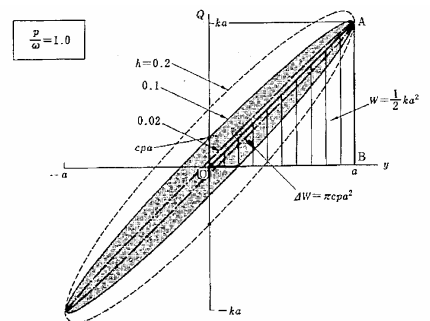
$$\dot{y} = -pa \sin(pt - \theta)$$

$$= \pm pa \sqrt{1 - \cos^2(pt - \theta)}$$

$$= \pm p \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(pt - \theta)} = \pm p \sqrt{a^2 - y^2} \quad (5.96)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$



であり、従って、復元力は上式を代入すると得られる。

$$Q = ky + c\dot{y}$$

図 5.10 定常状態の復元力

$$Q = ky \pm cp\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$= k\left(y \pm \frac{2hp}{\omega}\sqrt{a^2 - y^2}\right) \quad \text{—— (5.97)}$$

$$c = 2hm\omega = 2hm\omega \cdot \frac{\omega}{\omega}$$

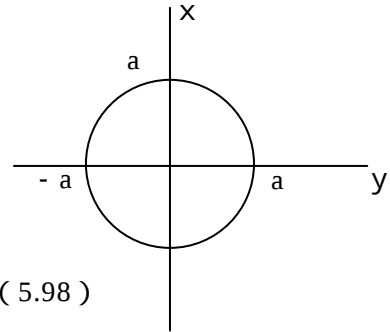
$$= \frac{2hm \frac{k}{m}}{\omega} = \frac{2hk}{\omega}$$

復元力が1サイクル間になす仕事は、減衰力 $c\dot{y}$ が1サイクル間になす仕事 ΔW に等しく、図の楕円の面積 ΔW に相当する。

$$\Delta W = 2 \int_{-\pi}^{\pi} cp\sqrt{a^2 - y^2} dy$$

$$= 2cp \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

$$= 2cp \frac{1}{2} \pi a^2 = \pi cpa^2 \quad \text{—— (5.98)}$$



最大ポテンシャルエネルギー W は、図の $\triangle AOB$ で表され、 $ka^2/2$ に等しい。ここで、 $c = (2h/\omega) \cdot k$ の関係を用いれば、エネルギー消費率は次式となる。

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi cpa^2}{\frac{1}{2}ka^2} = \frac{2\pi hm\omega pa^2}{\frac{1}{2}ka^2}$$

$$= \frac{4\pi hm\omega p}{k}$$

$$= 4\pi h \frac{p}{\omega} \quad \text{—— (5.99)}$$

$$\frac{m\omega}{k} = \frac{m\omega}{k} \cdot \frac{\omega}{\omega}$$

$$= \frac{m \frac{k}{m}}{k\omega} = \frac{1}{\omega}$$

上の関係を用いれば、エネルギー消費率と減衰定数との間には次の関係が得られる。

$$h = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{p} \right) \frac{\Delta W}{W} \quad \text{—— (5.100)}$$

この関係は、特に共振時では、次式となる。

$$h = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad \text{—— (5.101)}$$

(c) 地震応答

地震動を受ける場合について考える。この場合の振動方程式は、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_0 \quad \text{——(5.102)}$$

前述と同様に、 $\dot{y}$ を掛けて積分し、 $t = 0$ で静止とすれば、次式が得られる。

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \int_0^t c\dot{y}dt = \int_0^t (-m\ddot{y}_0)\dot{y}dt \quad \text{——(5.103)}$$

$$E(t) + D(t) = L(t)$$

地震が終了し、応答が十分減衰した後は、振動エネルギー $E(t)$ は0に近づき、地震動のなした全仕事 $L(t)$ は減衰力のなした全仕事に $D(t)$ に等しくなる。

5.7 等価粘性減衰

実際の構造物の減衰性状は大変複雑なので、これを等価な粘性減衰に置き換えて扱うことがしばしば行われる。

弾性復元力 ky と減衰力 $f_d(\dot{y}, y)$ をもつ場合の定常振動を考えよう。振動方程式が以下のように与えられる。

$$m\ddot{y} + f_d(\dot{y}, y) + ky = F \cos pt \quad \text{——(5.104)}$$

ここで、1サイクル間の消費エネルギーが等しくなるように等価粘性減衰係数 c_e を定めることにする。

$$m\ddot{y} + c_e\dot{y} + ky = F \cos pt \quad \text{——(5.105)}$$

上式から消費エネルギー ΔW と等価粘性減衰係数 c_e は、先に計算したように次で表される。

$$\Delta W = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f_d(\dot{y}, y)\dot{y}dt \quad \text{——(5.106)}$$

$$= \pi c_e p a^2$$

上式を変更すると、式(5.104)における消費エネルギー ΔW を倒置すると、

$$\begin{aligned}
 c_e &= \frac{\Delta W}{\pi p a^2} \\
 &= \frac{1}{\pi p a^2} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f_a(\dot{y}, y) \dot{y} dt \quad \text{——(5.107)}
 \end{aligned}$$

となり、等価粘性減衰係数が得られる。

(a) 摩擦力

次に、摩擦力を伴う振動を考える。ここで、 $\pm R$ は、速度と反対方向に働く摩擦力を表す。振動方程式は以下のである。

$$m\ddot{y} \pm R + ky = F \cos pt \quad \text{——(5.108)}$$

摩擦力による 1 サイクルの消費エネルギーは、図の面積より

$$\Delta W = 4aR \quad \text{——(5.109)}$$

となり、等価粘性減衰係数は、

$$\begin{aligned}
 c_e &= \frac{4aR}{\pi P a^2} \\
 &= \frac{4R}{\pi P a} \quad \text{——(5.110)}
 \end{aligned}$$

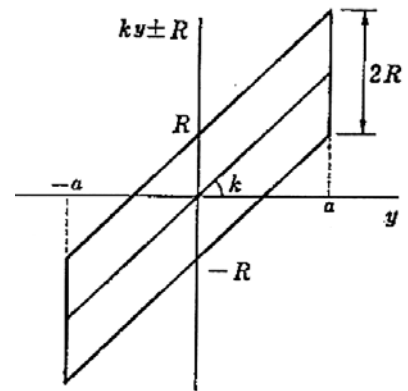


図 5.11 摩擦の履歴

従って、等価減衰定数 h_e は次式となる。

$$\begin{aligned}
 h_e &= \frac{c_e}{2\sqrt{mk}} = \frac{c_e}{c_{cr}} \\
 &= \frac{4R}{2 \frac{k}{\omega} \pi P a} \\
 &= \frac{2R}{\pi a k} \left(\frac{\omega}{P} \right) \quad \text{——(5.111)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{mk} \cdot \frac{\omega}{\omega} &= 2\sqrt{mk} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{1}{\omega} \\
 &= \frac{2k}{\omega}
 \end{aligned}$$

等価減衰係数 c_e 及び等価減衰定数 h_e は、振幅 a と振動数 p の関数となる。上式の h_e を粘性減衰があるとき定常解に代入して振幅に関して解けば、減衰があるときの定常振幅 a は振動数比 p/ω に応じて次のように定まる。

$$a = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + \left(2h_e \frac{p}{\omega}\right)^2}} \cdot \frac{F}{k} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + \left(\frac{4R}{\pi ka}\right)^2}} \cdot \frac{F}{k}$$

$$a^2 = \frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + \left(\frac{4R}{\pi ka}\right)^2} \cdot \left(\frac{F}{k}\right)^2$$

両辺を2乗し、
ルートを外す。

分母を左辺に
移動する。

$$a^2 \left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + a^2 \left(\frac{4R}{\pi ka}\right)^2 = \left(\frac{F}{k}\right)^2$$

a が消えるので、
右辺に移動する。

$$a^2 \left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{F}{k}\right)^2 - \left(\frac{4R}{\pi k}\right)^2$$

2乗を元に戻して、
 a について解く。

$$a = \frac{\sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 - \left(\frac{4R}{\pi k}\right)^2}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}$$

まず k を、そして
 F を $\sqrt{\quad}$ の外に出
す。

最終的に、次のように振幅が求められる。

$$a = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4R}{\pi F}\right)^2}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{F}{k} \quad \text{——(5.112)}$$

また、

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{2h_e \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \tan^{-1} \frac{4R}{\left(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right) \pi ka} \\ &= \tan^{-1} \frac{\left(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right) 4Rk}{\left(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right) \pi k \sqrt{1 - \left(\frac{4R}{\pi F}\right)^2} F} = \tan^{-1} \frac{\frac{4}{\pi} \frac{R}{F}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{\pi} \frac{R}{F}\right)^2}} \\ &\quad \text{——(5.113)} \end{aligned}$$

(b) 弾塑性復元力

構造物の弾塑性復元力特性がきれつや降伏のため図のようにループ面積を囲むことによる履歴消費エネルギーは、構造物の地震時変形を減らし、耐震性能を増す重要な働きをする。

繰り返し加力実験の履歴ループが得られているとき、ループごとの履歴性能を定常共振状態の解を用いて、次の式の等価減衰定数 h_e によって表すことがしばしば行われる。

$$h_e = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta W}{W_e} \right) \quad \text{—— (5.114)}$$

ここに、

ΔW = 履歴ループの1サイクルの面積

W_e = 等価ポテンシャルエネルギー = $(1/2)k_e a^2$

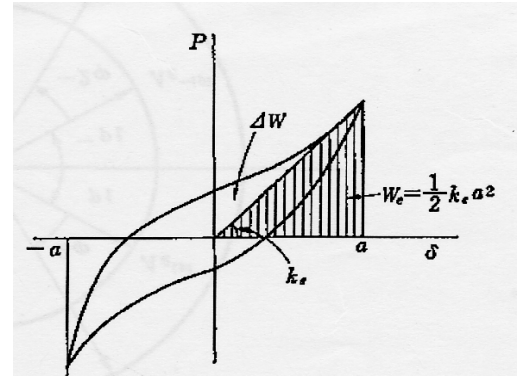


図 5.12 弾塑性履歴

弾塑性復元力もエネルギー消費率 $\Delta W / W$ は、振幅の大きさや繰り返し回数により異なるが、地震応答程度の振動範囲では振動数にはあまり依存しないと考えられている。

5.8 複素減衰

構造物の力—変形関係がループを描く場合、1サイクル間の消費エネルギーは振動数にはあまり依存せず、もっぱら振幅の関数と考えてよいことが多い。このような減衰を表すモデルとして、複素減衰あるいは構造減衰とよばれるものがある。例えば、高層建物の高次振動の減衰や表層地盤の地震応答時の減衰性状などは、複素減衰の考え方によって実情をよく説明できることがある。

ここでは、比較的小振幅の場合を考え、変形レベルによって剛性は変化しないとする。複素減衰モデルでは、1サイクルの消費エネルギー ΔW は最大ポテンシャルエネルギー W に比例し、振動数 p に無関係と仮定する。

$$r = \Delta W / W = \text{エネルギー消費率一定}$$

この場合の等価減衰係数 c_e は振動数に逆比例した形になる。(5.107) 式から、

$$c_e = \frac{\Delta W}{\pi p a^2} = \frac{kr}{2\pi p}; \quad W = \frac{1}{2}ka^2 \quad \text{——(5.115)}$$

外力 $F \cos pt$ に対する複素減衰モデルの場合の振動方程式は、次のように書ける。

$$m\ddot{y} + \left(\frac{kr}{2\pi p} \right) \dot{y} + ky = F \cos pt \quad \text{——(5.116)}$$

外力 $F \cos pt$ を Fe^{ipt} とし、これに対する定常応答を $y = Ce^{ipt}$ とすると、 $\dot{y} = ipCe^{ipt} = ip \cdot y$ であるから、式(5.116)は、次のようになる。 $p > 0$ に対し、

$$m\ddot{y} + \left(\frac{kr}{2\pi p} \cdot ip + k \right) y = Fe^{ipt}$$

ここで、

$$\beta = \frac{r}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right); \quad k' = 2k\beta$$

$$\beta = \frac{r}{4\pi} = \frac{k'}{2k}$$

とすると、

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + (2\beta \cdot ki + k) y &= Fe^{ipt} \\ m\ddot{y} + (1 + 2\beta i) ky &= Fe^{ipt} \\ m\ddot{y} + (k + k'i) y &= Fe^{ipt} \end{aligned} \quad \text{——(5.117)}$$

となる。すなわち、複素定常外力の場合には、剛性を複素数として扱うことができる。複素減衰定数 β は、エネルギー消費率あるいは復元力—変形曲線が分かっているれば定めることができる。

実変位 $y = A \cos pt$ に対する復元力 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= \text{Real}[(k + k'i)y] \\ &= \text{Real}[(k + k'i)Ae^{ipt}] \\ &= \text{Real}[(k + k'i)A(\cos pt + i \sin pt)] \\ &= \text{Real}[k \cos pt - k' \sin pt + i(k' \cos pt + k \sin pt)]A \\ &= (k \cos pt - k' \sin pt)A \\ &= A\bar{k} \cos(pt + 2\phi) \end{aligned} \quad \text{——(5.18)}$$

$$e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$$

実部と虚部に
分ける。

実部だけが残る。

となるから、1 サイクル間に復元力のなす仕事 ΔW は、求めた Q を用いて、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} Q \dot{y} dt \\
 &= \int_0^{\frac{2\pi}{p}} A(k \cos pt - k' \sin pt)(-Ap \sin pt) dt \\
 &= -pA^2 \int_0^{\frac{2\pi}{p}} (k \cos pt \sin pt - k' \sin^2 pt) dt \\
 &= pk'A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sin^2 pt dt \\
 &= pk'A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{1 - \cos 2pt}{2} dt \\
 &= pk'A^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2pt}{4p} \right]_0^{\frac{2\pi}{p}} \\
 &= \pi k'A^2
 \end{aligned}
 \tag{5.119}$$

実変位 y は、 $y = A \cos pt$ で表されるので、 $\dot{y} = -pA \sin pt$ これを Q と共に代入する。

p と A を外へ出す。

t に $\frac{2\pi}{p}$ を代入すると 0 になるので、消しておく。

このように、 ΔW は p に無関係で A^2 に比例することが示される。