第３章　１自由度系の定常振動

3.1　周期外力を受ける１質点系の振動方程式

構造物の一定周期外力($P_0 \sin \omega t$ で示される外力の振幅 P_0 と振動数 ω を一定としたもの)が作用すると、その構造物は外力と同じ振動数で振動し、その振幅は一定である。一定振動数・一定振幅の振動を**定常振動**(steady state vibration)となる。日常生活においてしばしば経験するこの種の振動は、振動系の特性を知る上で重要である。

地震、風などによる振動は定常的なものではなく、この種の振動を過渡振動(transient vibration)と呼ぶ。なお、一定周期・一定振幅の外力が作用する場合にも、外力の作用始めには、その振動系の自由振動が同時に発生するのでこれは定常振動ではなく過渡振動という。しかし、一般にこの自由振動の時間の経過とともに次第に減衰して最後には消滅し、これ以後は定常振動となる。振動の基礎式は 2 階の微分方程式となり、その特解が定常振動、同次方程式の一般解が自由振動に対応する。

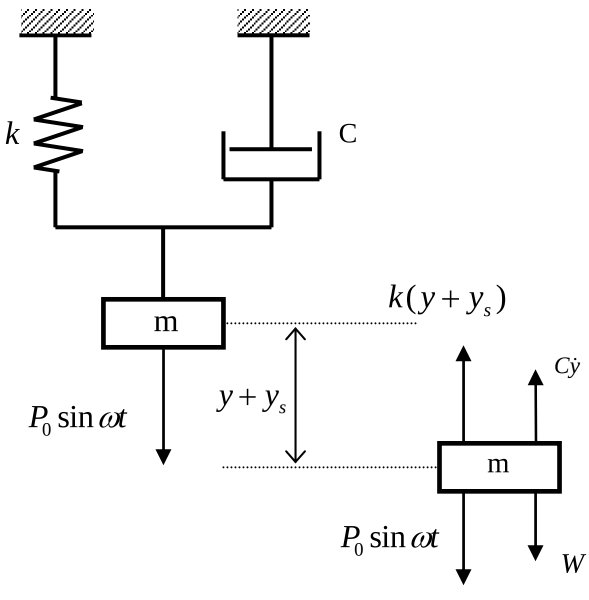
一定外力 $P_0 \sin \omega t$ が作用する左図(a)の振動系を考える。重り W の自重によるバネの伸びを y_s とし($W = ky_s$)、これを基点として振動変位 y をとる。質量 $m = W/g$ が y だけ変位した瞬間において、m に作用する力は左図(b)に示す力である。これは、自由振動の場合と比べて、外力 $P_0 \sin \omega t$ が付加されているだけなので次の運動方程式が得られる。

$$m\ddot{y} = -(y + y_s) - c\dot{y} + W + P_0 \sin \omega t$$

静的釣合である $W = ky_s$ を使用して整理すると、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_0 \sin \omega t \qquad \text{———} \quad (3.1)$$

となり、これは、重力の影響を受けないということがわかる。この微分方程式の解は、右辺＝0 とおいた同次方程式の解と、(3.1)との特解との和で与えられる。



（a）1 自由度系　　（b）力の釣合

図 3.1 周期外乱を受ける振動モデル

3.2　振動方程式を解く

一定外力 $P_0 \sin \omega t$ に対する構造物の応答(response)は、外力と同じ振動数(角速度) ω を持つことを予測して、y を次のように仮定する。

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad ——— (3.2)$$

上式を 1 回、2 回微分していくと以下のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t\\ \ddot{y} &= -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t\end{aligned} \qquad ——— (3.3)$$

これを式(3.1)に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&m(-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t) + c(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)\\ &\quad + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = P_0\sin\omega t\end{aligned} \qquad ——— (3.4)$$

さらに上式を展開し、$\sin\omega t$、$\cos\omega t$ にまとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned}&(-bm\omega^2 - ac\omega + bk)\sin\omega t + (-am\omega^2 + bc\omega + ak)\cos\omega t\\ &\qquad = P_0\sin\omega t\end{aligned}$$

関数 sin と cos の係数は等しくなければならず、恒等式の関係より、

$$\begin{aligned}P_0 &= -bm\omega^2 - ac\omega + bk\\ 0 &= -am\omega^2 + ak + bc\omega\end{aligned} \qquad ——— (3.5)$$

となり、上の未定定数 a, b を、連立方程式を解いて求める。まず、式(3.5)を a, b について整理すると以下のようになる。

$$P_0 = -c\omega a + (k - m\omega^2)b$$

$$0 = (k - am\omega^2)a + c\omega b$$

さらに 2 式の両辺を m で割ると

$$\frac{P_0}{m} = -\frac{c\omega}{m}a + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)b$$

$$0 = \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)a + c\omega b$$

となり、上式に $\dfrac{k}{m} = \omega_n{}^2$ を代入する。

$$\frac{P_0}{m} = -\frac{c\omega}{m}\times a + (\omega_n{}^2 - \omega^2)b$$

$$0 = ({\omega_n}^2 - \omega^2)a + \frac{c\omega}{m}b \qquad ――― \ (3.6)$$

式(3.6)の a の項を移項し、 a について解くと次式が求められる。

$$a = \frac{-\dfrac{c\omega}{m}}{{\omega_n}^2 - \omega^2}b \qquad ――― \ (3.7)$$

上式を式(3.6)の上式に代入すると

$$\frac{P_0}{m} = -\frac{c\omega}{m}\left(\frac{-\dfrac{c\omega}{m}}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right)b + ({\omega_n}^2 - \omega^2)b$$

となり、

$$\frac{P_0}{m} = \left(\frac{\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right)b + ({\omega_n}^2 - \omega^2)b$$

となる。これを ${\omega_n}^2 - \omega^2$ で通分すると以下になる。

$$\frac{P_0}{m} = \frac{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}{{\omega_n}^2 - \omega^2}b$$

従って、係数 b は

$$b = \frac{{\omega_n}^2 - \omega^2}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2} \times \frac{P_0}{m}$$

となり、式(3.7)にこれを代入すると、係数 a は

$$a = -\frac{\dfrac{c\omega}{m}}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2} \times \frac{P_0}{m}$$

となる。以上をまとめると未定係数は次のように得られる。

$$\begin{cases} a = -\dfrac{\dfrac{c\omega}{m}}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}\times\dfrac{P_0}{m} \\ b = \dfrac{\omega_n{}^2-\omega^2}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}\times\dfrac{P_0}{m} \end{cases} \qquad ――― (3.8)$$

得られた係数を仮定した解に代入すると、次のように特解が得られることになる。

$$y = -\dfrac{\dfrac{c\omega}{m}}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}\times\dfrac{P_0}{m}\cos\omega t + \dfrac{\omega_n{}^2-\omega^2}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}\times\dfrac{P_0}{m}\sin\omega t$$

$$= \dfrac{P_0}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2\right\}}\left\{-\dfrac{c\omega}{m}\cos\omega t+\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)\sin\omega t\right\}$$

$$――― (3.9)$$

3.3　応答倍率と位相遅れ

得られた特解は、2 つの単振動の和で表されている。これを以下のようにひとつの単振動に合成する。

$$y = y_0\sin(\omega t-\phi) \qquad ――― (3.10)$$

$$a\cos A + b\sin A$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(A+\phi)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(A-\phi')$$
$$\tan\phi = \frac{b}{a};\tan\phi' = -\frac{b}{a}$$

上式で、 y_0 は振動振幅を表し、 ϕ は外乱に対する位相の遅れを表す。ただし、位相遅れを示す ϕ は、負符号であるので、式(3.10)では負となる。以後、この 2 つについて調べてみよう。

1）応答倍率

係数は以下に与えられており、まず、この項から整理しよう

$$y_0 = \sqrt{\left[\dfrac{P_0\left(-\dfrac{c\omega}{m}\right)}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2\right\}}\right]^2+\left[\dfrac{P_0\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2\right\}}\right]^2}$$

$$――― (3.11)$$

まず、式(3.9)の分母を

$$(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2=D$$

と置換すると、式(3.8)の a,b は以下のようになる。

$$\begin{cases} a=-\dfrac{\frac{c\omega}{m}}{D}\times\dfrac{P_0}{m} \\ b=\dfrac{\omega_n{}^2-\omega^2}{D}\times\dfrac{P_0}{m} \end{cases}$$

ここで、

$$a^2+b^2=\frac{\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}{D^2}\times\frac{P_0{}^2}{m^2}+\frac{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)^2}{D^2}\times\frac{P_0{}^2}{m^2}$$

$$=\frac{P_0{}^2\left\{\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2+\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)^2\right\}}{D^2m^2}$$

であり、ここで置換した D を元に戻し、分母分子を約分すると、以下のようになる。

$$a^2+b^2=\frac{P_0{}^2}{m^2\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right\}}$$

さらに、両辺を $\dfrac{1}{2}$ 乗すると、

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}}$$

ゆえに振幅 y_0 は次のようになる。

$$y_0 = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}}$$

さらに、上式の右辺に $\frac{\omega_n{}^2}{\omega_n{}^2}$ をかけると、次式が与えられる。

$$y_0 = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}$$

ここで、丸で囲んだ変数を次のように整理する。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};\quad \omega_n{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{P_0}{m} \times \frac{1}{\omega_n{}^2} = \frac{P_0}{m} \times \frac{1}{\frac{k}{m}} = \frac{P_0}{k}$$

さらに、減衰項は次のように表される

$$c = hc_{cr}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{mk} \times \sqrt{\frac{m}{m}} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

$$c = 2hm\omega_n$$

導いた 2 式を上記の y_0 に適用すると以下のようになる。

$$y_0 = \frac{P_0}{k\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2}} \times \omega_n{}^2 \qquad ――― (3.12)$$

さらに丸で囲んだ部分に着目すると

$$\omega_n{}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_n{}^4}}}$$

となり、これを式(3.12)に適用すると、

$$y_0 = \frac{P_0}{k\sqrt{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+\left(2h\omega_n\omega\right)^2}\times\sqrt{\dfrac{1}{\omega_n{}^4}}}$$

$$= \frac{P_0}{k\sqrt{\dfrac{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2}{\left(\omega_n{}^2\right)^2}+\dfrac{\left(2h\omega_n\omega\right)^2}{\left(\omega_n{}^2\right)^2}}}$$

さらに、整理すると以下のようになる。

$$y_0 = \frac{P_0}{k\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\dfrac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ――― (3.13)$$

2）位相遅れ

　次に、位相遅れの項について調べてみよう。この項は次式で表される。ただし、先に示したように、係数 a は、負符号であり、式(3.15)に示すように位相遅れを示すϕは、負としている。

$$\tan\phi = \frac{a}{b} = \frac{\dfrac{c\omega}{m}}{\omega_n{}^2-\omega^2} = \frac{\dfrac{2hm\omega_n\omega}{m}}{\omega_n{}^2-\omega^2} = \frac{2h\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2}$$

ここでは、この項をさらに整理していくことにする。まず、右辺に$(\omega_n/\omega_n)^2$をかけ、整理すると次式が得られる。

$$\tan\phi = \frac{2h\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2}\times\frac{\omega_n{}^2}{\omega_n{}^2} = \frac{2h\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad ――― (3.14)$$

3）定常振動を表す特解

　以上をまとめると、定常振動を表す特解は次のように表される。

$$y = y_0\sin(\omega t-\phi) \qquad ――― (3.15)$$

$$y_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \text{———} \ (3.16)$$

$$\tan\phi = \frac{2h\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad \text{———} \ (3.17)$$

4）応答倍率

静的外力 P_0 に対する釣合は、

$$P_0 = k\delta_s$$
$$\delta_s = \frac{P_0}{k} \qquad \text{———} \ (3.18)$$

であり、この値を y_0 の式に適用すると、

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}}\delta_s$$

となる。ここで $y_{st} = \delta_s$ とおき、この値で両辺を割ると

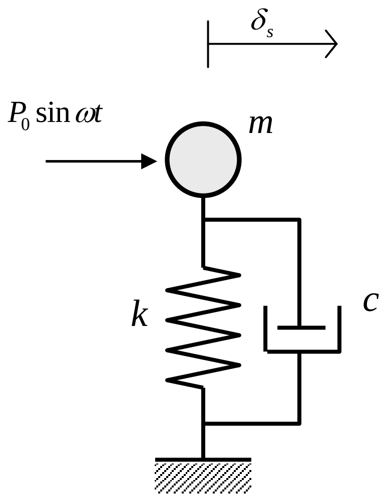


図 3.2 周期外乱を受ける振動モデル

$$\frac{y_0}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \text{———} \ (3.19)$$

となる。この式は周期外力 $P_0 \sin\omega t$ を受ける質量、ダッシュポット、バネの振動系の動的振幅と、バネに静的外力が作用したときのバネの伸びとの比を示すもので、拡大率(magnification factor)または増幅率と呼ばれる。

3.4　応答倍率

本節では、次に示す応答倍率について考察する。

$$\frac{y_0}{y_{st}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad —— \ (3.20)$$

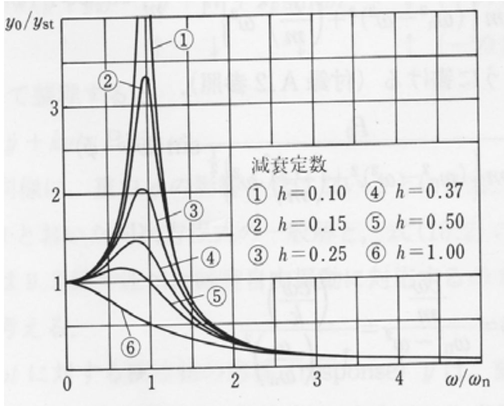


図 3.3 正弦波外力による変位共振曲線

図から理解できるように、$\omega/\omega_n=1$の付近では、hが小の時、拡大率を表す曲線は大きなピークを示す。振幅がこのように大きくなる状態を共振(resonance)と呼び、このピーク値を共振倍率という。

まず、共振時の倍率を調べてみよう。最初に、減衰がない場合の共振倍率は、$\omega/\omega_n=1$(共振時)かつ$c=0$(減衰なし)であるので、式(3.20)より

$$\frac{y}{y_s}=\frac{1}{0}=\infty$$

となり、振幅は無限大となる。これは、減衰がないと外乱に呼応して、振幅は増大し、理論的には無限大となる。

次に、減衰が存在する場合で、共振時の拡大率について考えてみよう。応答倍率を示す式(3.21)に、$\omega/\omega_n=1$を適用すると次式が得られる。

$$\left(\frac{y_0}{y_{st}}\right)=\frac{1}{2h} \quad ——— \ (3.21)$$

上式から理解できるように、共振時の拡大率は、減衰定数の関数となり、質量やバネ定数には無関係となっている。

一般的構造物の減衰定数を設定して、応答倍率を求めてみよう。次のように、共振時にはかなり振幅が大きくなることが分かる。

$h=0.03$ **(Ｓ造)の時**　$\frac{y_0}{y_{st}}=16.7$ **倍**

$h=0.05$ **(ＲＣ造)の時**　$\frac{y_0}{y_{st}}=10$ **倍**

3.5　位相遅れ

ここでは、次式で表される位相遅れについて考える。

$$\tan\phi = \frac{2h\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad ――― \ (3.22)$$

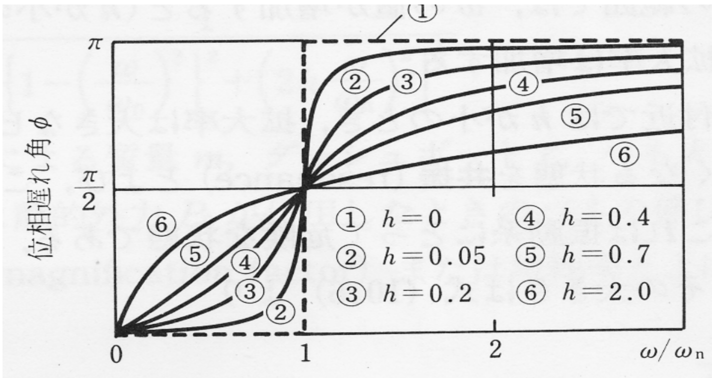


図 3.4 正弦波外力による変位位相遅れ

上式より理解できるように、応答変位は、外力に比べて、ϕだけ位相が遅れる。

まず、減衰があり、また共振時でない場合について考えよう。減衰がゼロでないため、位相遅れの式で分子は常にゼロとならない。また、分母は、$\omega/\omega_n<1$の場合、固有周期よりゆっくり外力が加わるとき、常に正値となり、位相はゼロとなる。つまり、同位相で応答することになる。逆に、$\omega/\omega_n>1$の場合、つまり、固有周期より早い周期で外力が加わるとき、分母は負となり、逆位相で応答することになる。

次に、減衰があり、また共振時の場合には、分母はゼロとなり、常にϕは$\pi/2$となる。従って、位相遅れは常に 90 度遅れることになる。

最後に、減衰のない場合について考えよう。この場合、常に分子がゼロとなるため、位相遅れはゼロかもしくはπとなる。$\omega/\omega_n<1$の場合、分母は正となり、位相遅れはない。逆に、$\omega/\omega_n>1$の場合、分母は負となり、位相遅れはπとなる。無論、共振時は、$\pi/2$の位相遅れとなる。

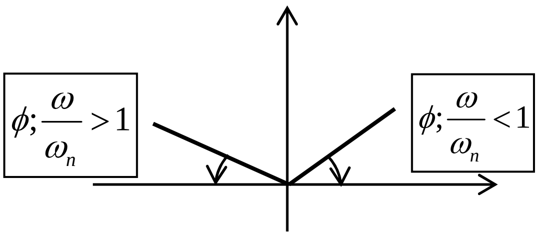
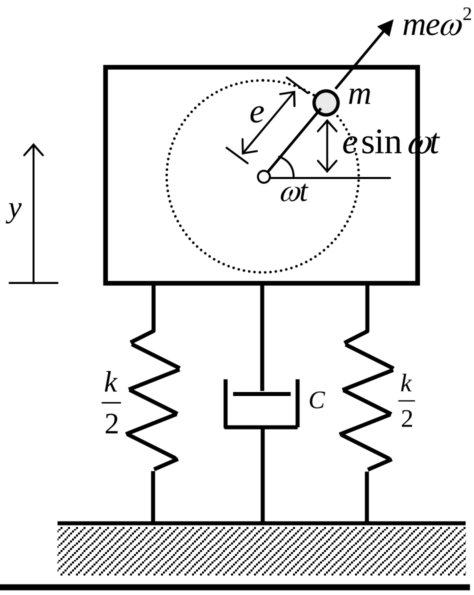


図 3.5 位相遅れの角度

3.6　起振機による振動実験

構造物の振動試験を行う際、よく起振機が使われる。ここでは、この起振機の理論的扱いについて考えよう。

次図の振動系を振動させるために質量mをeだけ偏心させて、ωの角速度で回転させる。この起振力は遠心力$me\omega^2$である。このとき、質量Mの振動変位をy（上向き正）とす



振動系
質量m
バネ係数k
粘性減衰係数C

図 3.6 起振機のモデル

ると、質量 m の動きは $y+e\cdot\cos\omega t$ となる。これらの慣性力は以下のように表される。

$$\begin{cases} M : M\ddot{y} \\ m : m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(y+e\sin\omega t\right) \end{cases} \qquad ――― \quad (3.23)$$

さらに、復元力と減衰力はそれぞれ $-ky$ 、$-c\dot{y}$ で、以上から運動方程式をたてると、次式となる。

$$M\ddot{y}+m\frac{d^2}{dt^2}\left(y+e\sin\omega t\right)=-ky-c\dot{y}$$

$$M\ddot{y}+m\frac{d^2y}{dt^2}+m\frac{d^2}{dt^2}\left(e\sin\omega t\right)+ky+c\dot{y}=0 \qquad ――― \quad (3.24)$$

ここで、

$$\frac{d}{dt}\left(e\sin\omega t\right)=e\omega\cos\omega t \text{、} \frac{d^2}{dt^2}\left(e\sin\omega t\right)=-e\omega^2\sin\omega t$$

であり、上式を振動方程式に代入すると、

$$\left(M+m\right)\ddot{y}+\left(-me\omega^2\sin\omega t\right)+ky+c\dot{y}=0$$

$$\left(M+m\right)\ddot{y}+ky+c\dot{y}=me\omega^2\sin\omega t \qquad ――― \quad (3.25)$$

となり、これは前述の一定外力が作用する振動系の運動方程式と類似した式となる。一定外力が作用する振動系の運動方程式とこの方程式を比べると、

$$m\ddot{y}+ky+c\dot{y}=P_0\sin\omega t$$

$$\left(M+m\right)\ddot{y}+ky+c\dot{y}=me\omega^2\sin\omega t$$

となり、ここから分かるように、$m\rightarrow M+m$、$P_0\rightarrow me\omega^2$ とした式になる。そのため、振動振幅 y_0 と位相遅れφは、一定外力が作用する振動系の式の値を上記のように入れ替えることで導き出せる。

　ここで、一定外力 $P_0\sin\omega t$ が作用する振動系の振動振幅 y_0 と位相遅れφの式を再記すると、

$$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

$$y_0 = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{2h\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

である。まず、振幅 y_0 は、上式に、$m \to M+m$、$P_0 \to me\omega^2$ とすると、

$$y_0 = \frac{me\omega^2}{k}\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

となり、この分母・分子に $\omega_n{}^2 = \dfrac{k}{M+m}$ をかけて変形すると、

$$y_0 = \frac{me\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$= \frac{me\omega^2}{k}\cdot\left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)^2\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$= \frac{me}{k}\cdot\frac{k}{M+m}\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$y_0 = \frac{m}{M+m} e \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

として表される。これを無次元化すると、

$$\frac{y_0}{e} = \frac{m}{M+m} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad ――― (3.26)$$

となる。

位相遅れφは同じであるので、

$$\tan\phi = \frac{2h\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad ――― (3.27)$$

起振機による変位共振曲線は、上式を少し変更した次式を用いると、

$$\frac{y_0}{e}\frac{M+m}{m} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

――― (3.28)

となり h の値をいろいろ変えたグラフを右図に示す。

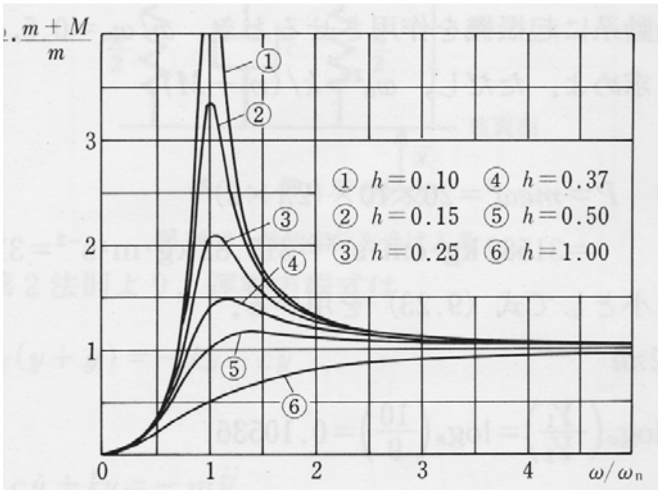


図 3.7 起振機による変位共振曲線

3.7　地震動による強制振動

地表面が地震による上下運動で、地盤基礎（静止点）に対して $\overline{y}$（上向き正）だけ変位し、バネ k が y（上向き正）だけ伸びたとすると、質量 m の変位は $y+\overline{y}$ となる。これの慣性力は以下のように表される。

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y+\overline{y}) \qquad ―――\ (3.29)$$

また、バネの復元力とダッシュポットによる減衰力はそれぞれ $-ky$、$-c\dot{y}$ とすると、運動方程式は以下となる。

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y+\overline{y}) = -ky - c\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + m\ddot{\overline{y}} + c\dot{y} + ky = 0$$

$$m\ddot{y} + + c\dot{y} + ky = -m\ddot{\overline{y}} \qquad ―\ (3.30)$$

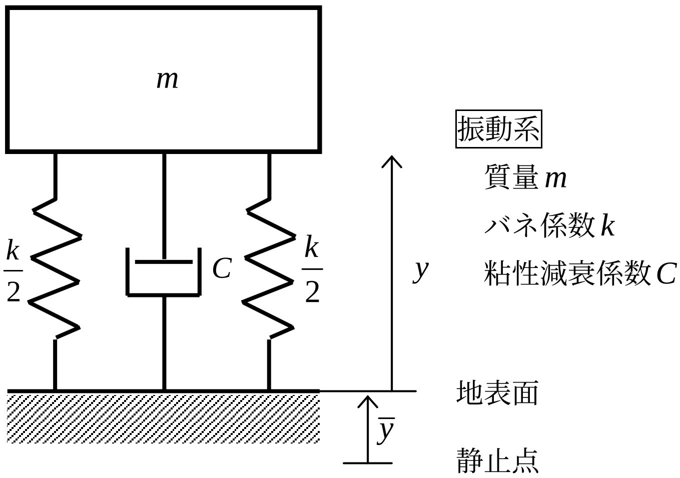


図 3.8　地震動による強制振動モデル

ここで、地表面変位を $\overline{y} = a_0 \sin \omega t$ とし、1 回、及び 2 回微分は、

$$\dot{\overline{y}} = a_0 \omega \cos \omega t \qquad \ddot{\overline{y}} = -a_0 \omega^2 \sin \omega t \qquad ―――\ (3.31)$$

となり、これらを上式に代入すると

$$m\ddot{y} + + c\dot{y} + ky = m a_0 \omega^2 \sin \omega t \qquad ―――\ (3.32)$$

となる。これは前述の起振機と全く同じタイプの微分方程式となる。

起振機の微分方程式の解を参考にすると、この微分方程式の特解は、

$$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

$$y_0 = a_0 \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ―――\ (3.33)$$

となり、さらに、無次元化すると、

$$\frac{y_0}{a_0}=\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ――― (3.34)$$

また、位相遅れは同じなので、同様に

$$\tan\phi=\frac{2h\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad ――― (3.35)$$

次に、質量 m の絶対変位 Y を求めることにする。絶対変位 Y は

$$Y=\bar{y}+y \qquad ――― (3.36)$$

であり、この値は、式(3.33)の相対変位を考慮すると、

$$Y=a_0\sin\omega t+y_0\sin(\omega t-\phi) \qquad ――― (3.37)$$

であり、右辺の第 2 項を下式のように分解する。

$$y_0(\sin\omega t\cos\phi-\cos\omega t\sin\phi)$$

これを、$\sin\omega t$ 、$\cos\omega t$ でくくると、

$$Y=(a_0+y_0\cos\phi)\sin\omega t-y_0\sin\phi\cos\omega t$$

となる。さらに、上式を合成すると

$$Y=A\sin(\omega t-\psi)$$

と表される。ここで、振幅 A は以下のようになる。

$$A=\sqrt{(a_0+y_0\cos\phi)^2+(y_0\sin\phi)^2}$$
$$=\sqrt{a_0^2+2a_0y_0\cos\phi+y_0^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}$$

・加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta$$
$$\pm\cos\alpha\sin\beta$$

・合成

$$a\sin\theta\pm b\cos\theta$$
$$=A\sin(\theta\pm\phi)$$
$$A=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

・三角比の相互関係

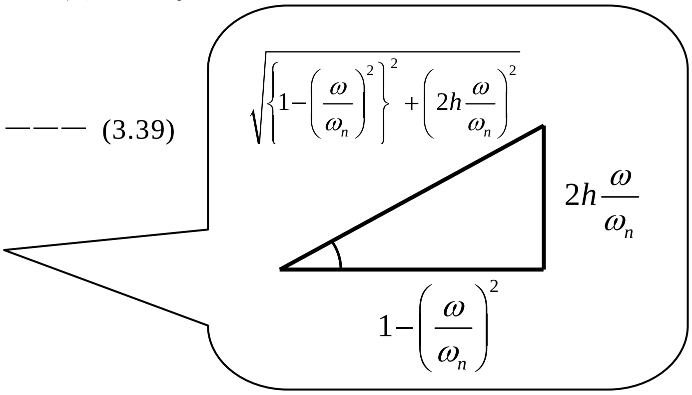
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

ここで、a_0 を $\sqrt{\ }$ の外に出すと、

$$A=a_0\sqrt{1+2\frac{y_0}{a_0}\cos\phi+\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^2} \qquad ――― (3.38)$$

ここで、$\cos\phi$、$\sin\phi$ は式(3.35)より以下のように表される。

$$\cos\phi=\frac{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ――― (3.39)$$



$$\sin\phi=\frac{2h\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ――― (3.40)$$

式(3.38)に式(3.34)と式(3.39)の $\cos\phi$ の式を代入し、まとめると、

$$A=a_0\sqrt{1+\frac{2\cdot\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}+\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^4}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$=a_0\sqrt{\frac{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2-2\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^4+\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^4}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$=a_0\sqrt{\frac{1+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad ――― (3.41)$$

として表される。式(3.41)で与えられる変位共振曲線は、図のように得られる

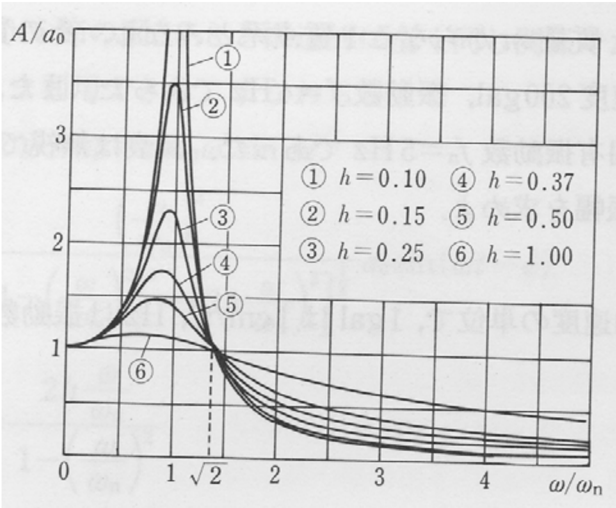


図 3.9 正弦波による変位共振曲線

また、位相遅れψは

$$\tan\psi = \frac{y_0 \sin\phi}{a_0 + y_0 \cos\phi}$$

$$= \frac{y_0}{a_0}\left(\frac{\sin\phi}{1 + \dfrac{y_0}{a_0}\cos\phi}\right) \qquad ――― (3.42)$$

ここで、式(3.34)、式(3.39)、式(3.40)より、y_0/a_0、$\cos\phi$、$\sin\phi$を上式に代入し、まとめると、

$$\tan\psi = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \left(\frac{\dfrac{2h\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}{1 + \dfrac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot \left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \right)$$

$$
=\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\left(\frac{2h\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\cdot\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}}\right)
$$

$$
=\frac{2h\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad ―――\ (3.43)
$$

となり、最終的に、次式となる。

$$
\tan\psi=\frac{2h\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1-\left(1-4h^2\right)\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad ―\ (3.44)
$$

減衰定数に対する位相遅れ角は、式(3.44)より図のようになる。

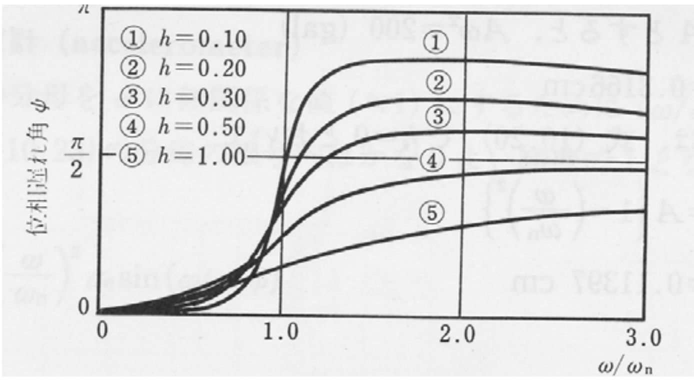


図 3.10 位相遅れ角

例題 3.1

質量 m=60[kg・m]の物体がバネ定数 k=196[N/cm]のバネ上に載っている。これに毎秒 3 回の繰り返し周期力($P_0=98N$)が作用する時の振幅を求めよ。また、これの振動時にバネに発生している力は外力 P_0 の何倍になるか、ただし、減衰は無視する。

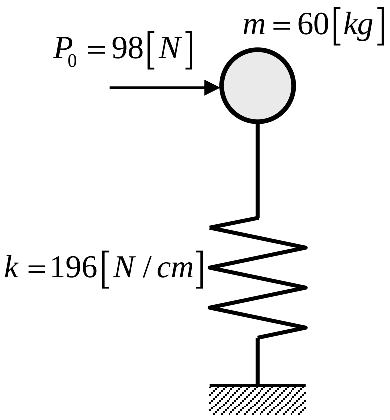


図 3.11 減衰なしモデル

$$k=196\left[N/cm\right]=1.96\times10^4\left[N/m\right]$$

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{3}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\ \text{より、}\ \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\omega=6\pi=18.84\left[rad/\sec\right]$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1.96\times10^4}{60}}$$

$$=18.07\left[rad/\sec\right]$$

変位応答倍率は、$h=0, \omega=18.84, \omega_n=18.07, k=1.96\times10^4, P_0=98$ を式(3.13)である次式に代入することで得られる。

$$y_0=\frac{P_0}{k\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2h\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

まず、

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{18.84}{18.07}=1.0432; \quad (\frac{\omega}{\omega_n})^2=1.0432^2=1.08827$$

の値を、変位応答倍率の式に代入すると

$$y_0=\frac{98}{1.96\cdot10^4\sqrt{(1-1.0883)^2}}=\frac{98}{1.96\cdot10^4\cdot(1-1.0883)}$$
$$=\frac{98}{1.96\cdot883.}=0.0566[m]=5.66[cm]$$

となる。バネに作用する力は、

$$F=ky_0=1.96\cdot10^4\cdot0.0566=1.109\cdot10^3[N]$$

となる。従って倍率は以下のようになる。

$$\frac{F}{P_0}=\frac{1109.}{98}=11.36$$

例題 3.2

図に示す起振機モデルで以下の問いに答えよ。ただし、M=60[kg]、偏心質量 m=20[kg]、e=10[cm]とする。

1）この起振機が毎秒 2 回転するときの起振力の大きさを求めよ。

2）起振機を静止させたまま、M を自由振動させたとき、その振幅が 1 サイクルごと 10%ずつ減少した。このときの減衰定数 h を求めよ。

3）この振動系にこの起振機を作用させるとき、$\omega/\omega_n=0.5$ 及び $\omega/\omega_n=1$ における振幅を求めよ。ただし、$\omega_n^2=k/(m+M)$

１）起振力

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{0.5} = 4\pi$$

$$me\omega^2 = 20\cdot 10\cdot 16\cdot \pi^2$$

$$= 31583\left[kg\cdot cm/\sec^2\right]$$

$$= 315.82\left[N\right]$$

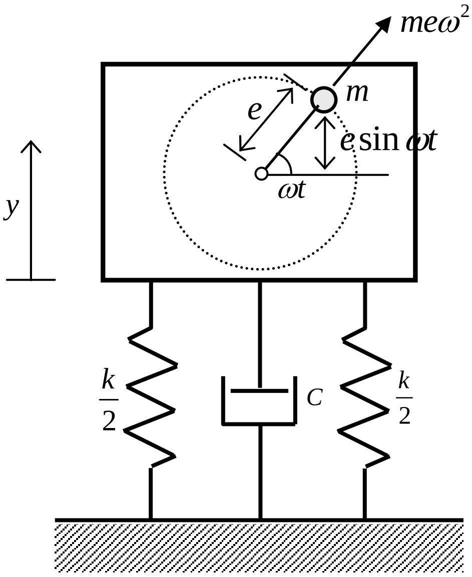


図 3.12 起振機のモデル

$\boxed{振動系}$

質量m

バネ係数k

粘性減衰係数C

２）減衰は小として、減衰定数を次式で求める。

$$\delta = \ln\frac{Y_1}{Y_2} = \ln\frac{10}{9} = 0.10536$$

$$h = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.10536}{2\cdot 3.14} = 0.01677$$

３）起振機の振幅

$\dfrac{\omega}{\omega_n} = 0.5;\quad h = 0.01677$ の場合、式(3.28)を用いると

$$y_0 = \frac{m}{M+m}e\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$= \frac{20}{60+20}10\frac{0.5^2}{\sqrt{\left(1-0.5^2\right)^2+(2\cdot 0.01677\cdot 0.5)^2}}$$

$$= 2.5\frac{0.25}{\sqrt{0.5625+0.00028}} = \frac{0.625}{0.7502} = 0.8331\left[cm\right]$$

$\omega/\omega_n = 1;\quad h = 0.01677$ の場合

$$y_0 = \frac{20}{60+20}10\frac{1^2}{\sqrt{\left(1-1^2\right)^2+(2\cdot 0.01677\cdot 1)^2}}$$

$$= \frac{2.5}{0.03354} = 74.54\left[cm\right]$$

例題 3.3

付近の工場からの地盤振動で被害を受けている建物がある。この建物のバネ k と質量 m とからなる 1 質点系とみなし、その質点の振動を測定すると、最大加速度 200[gal]、振動数 f=4[Hz]であった。また、この建物の自由振動記録では、固有振動数 f_n=5[Hz]であった。減衰は無視できるものとして、建物基礎の振動振幅を求めよ。ただし、gal は 1[cm/sec^2]

外乱角振動数

$$\omega = 2\pi f = 2\cdot 3.14\cdot 4 = 25.12\left[rad/\sec\right]$$

振動系の固有角振動数

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\cdot 3.14\cdot 5 = 31.4\left[rad/\sec\right]$$

建物の変位は、

$$Y = A\sin\left(\omega t - \psi\right)$$

であり、2 回微分すると、加速度が得られる。

$$\ddot{Y} = -A\omega^2\sin\left(\omega t - \psi\right)$$

最大加速度が $200\left[gal\right]$ であったことから、

$$A\omega^2 = 200$$
$$A = \frac{200}{\omega^2} = \frac{200}{25.12^2} = 0.317\left[cm\right]$$

として、振幅が求まる。次に、基礎の振幅 a_0 は、式(3.41)より

$$A = a_0\sqrt{\frac{1+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2h\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

上式を変更し、$h = 0$ を代入することで以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= A\{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\} \\
&= 0.317\cdot(1-(\frac{25.12}{31.3})^2 = 0.317\cdot 0.36 = 0.114[cm]
\end{aligned}
$$