第１章　固定法の原理

1.1 はじめに

本章では、たわみ角法の基本式を用いて固定法の原理を検討する。たわみ角法では、釣合式は連立方程式で表わされ、そのため構造物が大きくなると未知数が多くなり、コンピュータを利用しないと、方程式の解が得にくくなる。この欠点を解消するために、固定法が開発された。固定法の利点は、釣合式を連立方程式で表わさず、反復解法によって直接材端モーメントを求められることである。そのため、連立方程式を解く処理を必要としない。しかも、表形式を用いて解くために、コンピュータを用いなくても、現実的な構造物を応力解析することができる。

固定法は、たわみ角法と同様に、節点移動のある場合とない場合では解析方法が大きく異なる。さらに、節点移動のある場合でも整形骨組と異型骨組とでは、解析方法が異なる。特に、異型骨組では、収束も悪く固定法に向いているとは云えない。まず、本章では、節点移動のない場合について固定法を解説する。

この本で使用する座標系は、右手・右ネジの法則に従った座標を用いる。また、ひとつの部材では、部材の左端のｉ点を原点とする。部材は、長さがlで、材に沿って一様なヤング係数Eと断面二次モーメントIを有するものとする。また、これらのパラメータによる剛比を用いて解析する。なお、この本では、平面骨組を対象とする。

1.2 固定法で用いる骨組のたわみ角法による応力解析

本章では、節点移動のない場合を用いて固定法の原理を解説する。そこで、ここではまず、固定法の原理を説明するために、必要となる基本的な骨組の応力解析を、たわみ角法を用いて行うことにする。

たわみ角法の基本式を以下に示す。

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_j + \theta_i - 3R) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1.1)$$

骨組の中で代表的な部材を一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次式で定義し、このパラメータを標準剛度K_0と呼ぶ。

$$K_0 = \frac{2EI_0}{\ell} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

この標準剛度を用いて、たわみ角法の基本式を変換する。

$$
\left.\begin{aligned}
M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\
M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.3)
$$

ここで、パラメータと新しい変数を次のように定義する。

$$
\left.\begin{aligned}
k &= \frac{K}{K_0} & K &= \frac{2EI}{\ell} \\
\varphi_i &= \theta_i K_0 & \psi &= -3RK_0
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.4)
$$

新しいパラメータとして定義したｋは剛比と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対するその部材の曲げ剛性の比を表す。

固定法の原理を図１−1 に示す構造物を用いて解説する。この構造物は、節点 i で剛接し、他の節点は固定支持となっている３つの部材で構成されている。まず、この３つの部材に関するたわみ角法の基本式を以下に示す。ここでは、節点移動がないため部材角と節点 i の反対側の節点が固定であるとする境界条件を既に適用している。また、部材の中間には部材荷重は加わってはいないものとする。

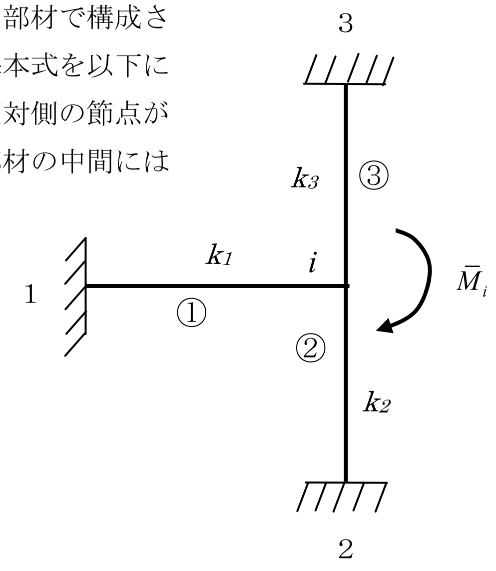


図１−1 解析用骨組

$$
\left.\begin{aligned}
M_{i1} &= k_1(2\varphi_i) \\
M_{1i} &= k_1(\varphi_i) \\
M_{i2} &= k_2(2\varphi_i) \\
M_{2i} &= k_2(\varphi_i) \\
M_{i3} &= k_3(2\varphi_i) \\
M_{3i} &= k_3(\varphi_i)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1.5)
$$

次に、この節点 i におけるモーメントの釣合を考える。この節点には、荷重として、モーメント $\bar{M}_i$ が加わっている。図 1−2 を参考にして、この状態におけるモーメントの釣合は次式で与えられる。

$$
M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} = \bar{M}_i \quad \cdots\cdots(1.6)
$$

上式に、式(1.５)の材端モーメントを代入すると、

$$
2(k_1 + k_2 + k_3)\varphi_i = \bar{M}_i \quad \cdots\cdots(1.7)
$$

となり、節点 i の回転角 φ_i は、

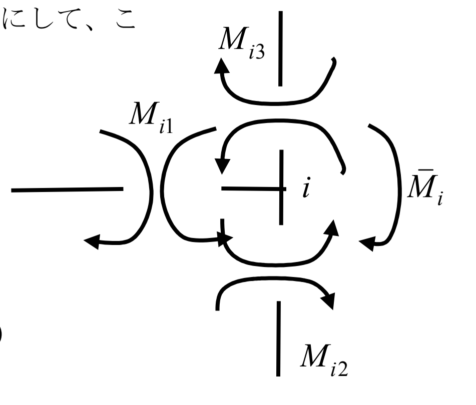


図１−2 荷重と材端モーメン

$$\varphi_i = \frac{\bar{M}_i}{2(k_1 + k_2 + k_3)} = \frac{\bar{M}_i}{2\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

となる。ここで、$\sum k_i$ は節点 i に集まる部材の剛比の和を表す。得られた回転角を材端モーメントの式(1.5)に代入すると、

$$\left.\begin{aligned}
M_{i1} &= \frac{k_1}{\sum k_i}\bar{M}_i \\
M_{1i} &= \frac{k_1}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i1} \\
M_{i2} &= \frac{k_2}{\sum k_i}\bar{M}_i \\
M_{2i} &= \frac{k_2}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i2} \\
M_{i3} &= \frac{k_3}{\sum k_i}\bar{M}_i \\
M_{3i} &= \frac{k_3}{2\sum k_i}\bar{M}_i = 0.5M_{i3}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1.9)$$

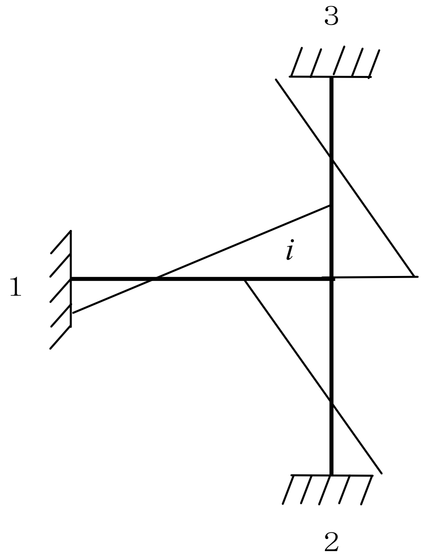


図１−３ 曲げモーメント図

として、材端モーメントが得られる。この骨組の応力状態が式(1.9)の材端モーメントから図 1-3 のように得られる。

1.3 節点移動のない場合の固定法の原理

少し、見方を変えて解析経過を分析しよう。まず、釣合式中の $\bar{M}_i$ について考える。$\bar{M}_i$ は節点ｉに加わるモーメント荷重であるが、これを不釣合力、あるいは、不釣合モーメントとしよう。つまり、この構造物には、ある曲げモーメント分布が存在するものとするが、節点 i では、モーメントの釣合が取れておらず、不釣合モーメントが発生しているわけである。

そこで、節点 i でモーメントの釣合をとるために、上記した解析を行うと、新たに回転角

$$\varphi_i = \frac{\bar{M}_i}{2\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

が発生し、それによって節点 i に集まる部材に曲げモーメントが生じ、節点 i におけるモーメント不釣合の状態が解消される。ただし、他端にもモーメントが発生し、このモーメントによってその節点に新たな不釣合モーメントを生じさせる。これら一連の処理を不釣合モーメントの解

放と呼ぶ。

不釣合モーメントの解放によって発生する部材応力は、上記の解析から、次のような解析手順で求められる。

１）　節点 i に集まる部材の曲げ剛性の比を求める。これを固定法では、分割率 DF と呼ぶ。

２）　不釣合モーメントと値が同じで逆のモーメントをその節点に加わるモーメント荷重とみなす。

３）　上で求めたモーメント荷重に分割率を掛け、節点 i に集まる部材で、各部材が負担する曲げモーメントを求める。この分割された曲げモーメントを存在する曲げモーメントに足しこむ。

４）　各部材の他端には、i 端で分割された曲げモーメントの 0.5 倍の曲げモーメントが発生する。この他端に発生する曲げモーメントを到達モーメントと呼び、値 0.5 を到達率と呼ぶ。後は、この到達モーメントを存在する曲げモーメントに足しこむ。

以上が、不釣合モーメントの解放手順である。

解析する骨組が、図 1-1 に示すように、他端が全て固定であると、1 回の不釣合モーメントの解放で、節点におけるモーメントの釣合が得られることになる。骨組の変形状態に節点移動がない場合は、これで全ての釣合が得られたことになり、応力解析は終了したことになる。

一方、他端が固定でなく剛接合で、しかも、その節点も節点 i と同様に部材が集合している場合は、ここでも不釣合モーメントの解放を必要となる。この不釣合モーメントの解放によって、節点 i では、到達モーメントが生じ、再び不釣合モーメントが発生することになる。したがって、再度、この不釣合モーメントの解放を行わなければならない。この不釣合モーメントは、一般に到達率が 0.5 であるため、先の不釣合モーメントに比較して、小さくなっていることが予想される。これは、この不釣合モーメントの解放の手順を繰り返すことで、徐々に不釣合モーメントは小さくなり、ほとんど無視しえる程度、つまり誤差の範囲となる。

このような手順を繰り返し、反復することで、節点移動がない場合の応力解析が実行できることになる。これが固定法の解析原理となる。この手順は表を用いて行うと、間違いなく実行できる。以降では、固定法で用いられる表を示し、その処理手順の説明を行うことにしよう。

基本的な表は、以下のようである。

表 1-1　固定法の基本的な表

DF	はり
FEM	
D1	
C1	
D2	
C2	
D3	
C3	
D4	
計	

この表は、はり、柱の両端に各一つ設定し、この中に計算した値を記入しながら上記の手順を繰り返し、反復処理を行うためのものである。まず、表の第 1 項である DF の欄には、節点 i に集まる部材の曲げ剛性を用いて、それら剛比の割合を計算してセットする。これを分割率と呼ぶ。当然、節点 i におけるこの欄の和は 1 でなくてはならない。節点 i に集まる部材 j の分割率は、以下の式で与えられる。

$$DF_j = \frac{k_j}{\sum k_i} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

次の欄であるFEMは固定端モーメントであり､部材荷重がある場合は、ここに値が入ることになる。この値はたわみ角法における固定端モーメントCであり、値の正負は反力の方向と同じである。この固定端モーメントが、不釣合力を計算する初期値となり、部材に存在する応力の初期値ともなる。

第 3 項の欄である D1 は、分割モーメントの第 1 番目を表し、後尾の数値は反復回数を示す。分割モーメントは、その節点における不釣合モーメントに上位欄の分割率を掛けて求める。次に、第 4 項の C1 は、到達モーメントを入れる欄であり、後尾の数値は反復回数を示す。到達モーメントは、部材の他端の欄の分割モーメント D1 の値の 0.5 を掛けて求める。

上記の処理を数回繰り返すと、不釣合モーメントは非常に小さくなり反復処理を終了することになる。反復処理を終了する判断は、この不釣合モーメントが設定した閾値より小さくなったときとなる。反復を終了する場合、一般に、分割モーメントをセットした時点で終了する。これは、この時点で反復処理を終了すると、節点でのモーメントの釣合が満

たされる状態となるからである。

最後に、各部材の材端モーメントを求める。材端モーメントは、表の中の応力全てを足し算する。つまり、固定端モーメント FEM の欄から最後に分割した分割モーメントの欄までを、全ての欄の数値の和を取る。この値を計の欄にセットする。これが材端モーメントの値となる。これらの処理は、全て同一の有効桁で計算する。ほとんどの場合 3 から 4 桁の有効桁で計算すれば十分であろう。

上記の表が一般の骨組にどのように適用されるかについて検討しよう。まず、節点 i では、はりと柱によって十字形になっている場合を考える。この場合、表は表 1-2 のように配置される。骨組の境界部分で、十字形になっていない場合は、存在しない部材に該当する表に斜線を引いておけば良い。あるいは、最初からその部分を取り除いておいても良い。しかし、解析を間違えずに実行するためにも、この順番に表を設定すべきである。

表 1-2　節点 i における固定法の表

節点 i

	左はり	下柱	上柱	右はり	外力
DF	0.2	0.3	0.3	0.2	
FEM	50			−100	50
D1	10	15	15	10	
C1	5	2.5	2.5	5	−15
D2					
C2					
D3					
C3					
D4					
計					

骨組の形状を描き、その中に表を配置するわけであるが、表 1-2 に見られるように、節点 i に対し、左より、左側のはり、下の柱、上の柱、右のはりとなっている。最後には、この節点に働く外力もしくは不釣合モーメントが記入される欄がある。骨組の全ての節点で、この配置で表が描かれることになる。

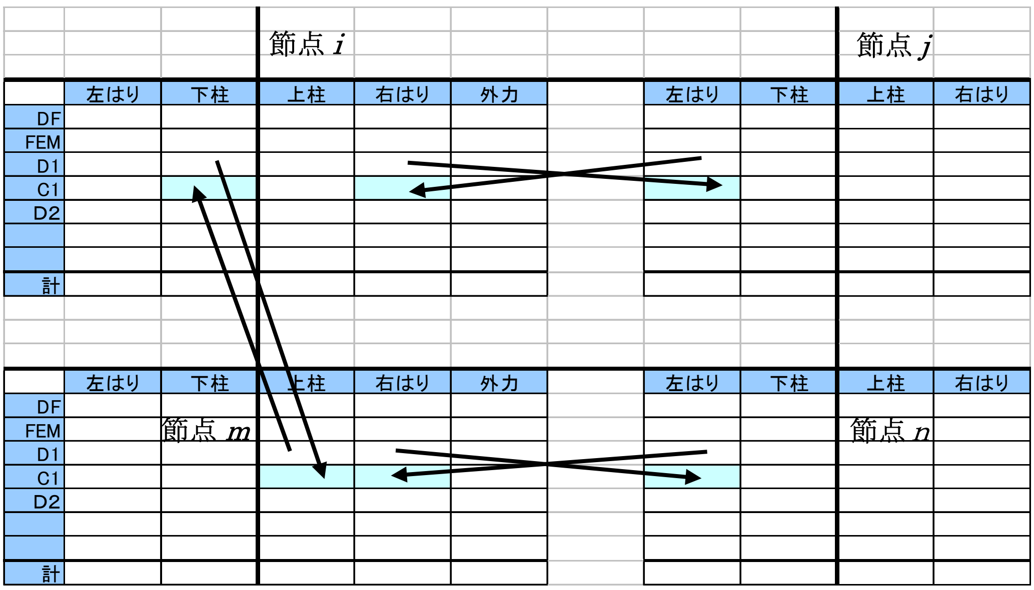
この表を使用して、先に説明した解析手順を復習しよう。分割率は、有効桁で四捨五入を行って設定するが、その際、節点で分割率を和を取

るとき、1 となるように設定すべきである。分割モーメントを計算するとき、この分割率と不釣合モーメントを掛けて求めるため、分割率の和が 1 でないと誤差が生じてしまうことになる。

最初の不釣合モーメントは、FEM 欄の基本応力の和で表される。この時、節点でのモーメントが釣合っていなと不釣合モーメントが発生する。この不釣合モーメントを打ち消すために、逆のモーメントを外力として、網掛けの欄にセットする。無論、節点にモーメント外力が加わっている場合は、この欄に足し込むことになる。

次に、この不釣合モーメントによる外力を解除するために、次の処理を行う。まず、不釣合モーメントによる外力を分割モーメントに分割する。分割モーメントは、この外力モーメントに各部材の分割率を掛け算して、所定の D1 の欄に記入する。次に、各部材の分割モーメントに到達率の 0.5 を掛け、到達モーメントを計算する。その到達モーメントをその部材の他端の C1 位置にセットする。各材端モーメントの表を表 1-3 のように配置すると、規則的に到達モーメントを記入することができる。

表 1-3　到達モーメント



例えば、節点 i と j 間のはりでは、互いの分割モーメントから矢印のように到達モーメントを記入する。同じく、節点 m と n 間のはりでも、同様の方法で到達モーメントを表に記入することができる。節点 m と i 間の柱では、矢印のように到達モーメントを記入する。

到達モーメントが設定されると、各節点では、またもや不釣合状態と

なる。ここでは、不釣合モーメントは、各部材の材端モーメントの和で与えられ、表 1-2 では、FEM から C1 までの全ての値の和を取ることによって与えられる。ただし、不釣合モーメントの分割で D1 までの値の総和はゼロとなり、したがって、到達モーメント C1 の欄を足すことで不釣合モーメントが得られる。表 1-2 では、C1 の欄の和は、15.0 となり、外力の項へは、逆方向の外力モーメントとして、-15.0 をセットする。後は、この値を D2 の項に分割モーメントとして分配することになる。この処理を反復して、不釣合モーメントが小さくなるまで実行する。

材端モーメントが求まった後は、既に FEM の欄で固定端モーメントをくわえているので、ここでは、両端ピンの基本応力状態を重ね合わせることで実際の応力状態が決定することになる。

1.4 例題

簡単な例題を用いて、固定法の解析方法を復習しよう。

例題：１　次に示す端部が固定支持された骨組の応力解析を、固定法を用いて実行し、曲げモーメント図、せん断力図を描け。

標準剛度 K_0 をはりから

$$K_0 = \frac{2EI_0}{L}$$

とすると、剛比は、部材 1、2 共に 1 とする。

部材における基本応力を次のように求める。

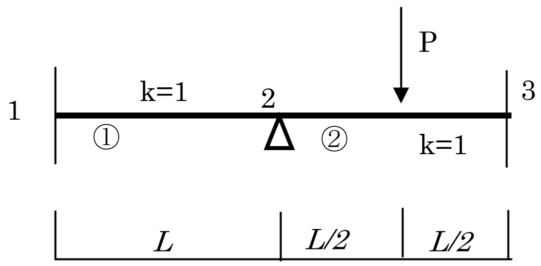


図 1-4 例題１の骨組

$$C = \frac{PL}{8}$$

$$M_0 = \frac{PL}{4} = 2C$$

$$Q = \frac{P}{2}$$

節点 2 における部材 1 と 2 の分割率は、

$$DF_1 = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

$$DF_2 = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

となる。

次に、固定法を用いるために表を作成する。ここでは、固定モーメントとして、C の値を 100 として計算する。

	右はり	左はり	右はり	外力	左はり
DF		0.5	0.5		
FEM	0	0	−100	100	100
D1		50	50		
C1	25	0	0	0	25
計	25	50	−50		125

固定法の解析は、上記の表で終了した。表から分かるように、一回の分割と到達で不釣合力が解消している。これは、この構造物の応力解析に必要となる未知数が、節点２における回転角ひとつしか存在しないからである。

数値で得られた材端モーメントを固定端モーメントの C に戻そう。材端モーメントは以下となる。

$$M_{12} = C/4$$
$$M_{21} = C/2$$
$$M_{23} = -C/2$$
$$M_{32} = 5C/4$$

中間荷重が加わっている部材２では、得られた応力状態と両端固定の状態とを重ね合わせる必要がある。ただし、表中の計の欄で与えられる材端モーメントは、固定端モーメントである FEM の欄の値を加えている。これは、既に端部では両端固定の応力状態を足し込んだことに相当する。後は、この状態に単純ばりの応力状態を加えれば良いことになる。

従って、部材２の中央の曲げモーメントは、以下のように得られる。

$$M_c = M_0 - \frac{1}{2}(M_{32} - M_{23}) = 2C - \frac{1}{2}(\frac{5C}{4} + \frac{C}{2}) = \frac{9}{8}C$$

材端モーメントと部材２の中央の曲げモーメントから、図 1-5 に示す曲げモーメント図及びせん断力図が得られる。

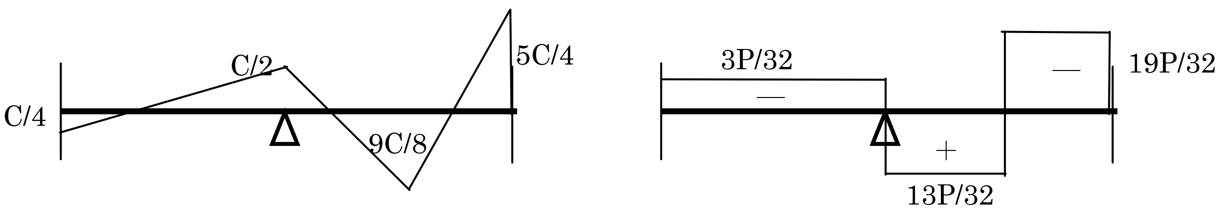


図 1-5 曲げモーメント図とせん断力図

部材１と２のせん断力は、次式のように求められる。

$$ {}_1Q = -(M_{21} + M_{12})/L = -(\frac{C}{2} + \frac{C}{4})/L = -\frac{3C}{4L} = -\frac{3P}{32} $$

$$ {}_2Q_L = -(-\frac{9C}{8} - \frac{C}{2})/0.5L = \frac{13C}{4L} = \frac{13P}{32} $$

$$ {}_2Q_R = -(\frac{5C}{4} + \frac{9C}{8})/0.5L = -\frac{19C}{4L} = -\frac{19P}{32} $$

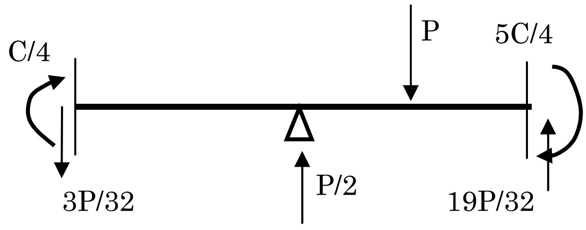


図 1-6 外力と反力

図 1-5 で示す曲げモーメント図とせん断力図から反力が求まる。この反力を図 1-6 に示す。同図から容易に理解できるように、上下方向の力の釣合は満たされている。モーメントの釣合は、節点１におけるモーメントを考えると、

$$ M_1 = \frac{C}{4} + \frac{5C}{4} + 1.5PL - \frac{PL}{2} - \frac{2L \cdot 19P}{32} $$
$$ = PL(\frac{6}{32} + \frac{48}{32} - \frac{16}{32} - \frac{38}{32}) \to 0 $$

となり、満足することが分かる。

次に、この骨組唯一の変位である回転角 φ_i を求めてみよう。ここで、回転角と外力との関係である式(1. 10)を思い起こそう。

$$ \varphi_i = \frac{\bar{M}_i}{2\sum k_i} $$

上式から分かるように、節点回転角 φ_2 は、外力と不釣合モーメントを打ち消す外力を、その節点に集まる部材の剛比の総和の２倍で割った値で求まる。ただし、この外力は、収束段階で常に生じるので表中の外力の項を全て足し込んで求めることになる。

この例題では、反復計算は１回であることから、φ_2 は次式で与えられる。

$$ \varphi_2 = \frac{\bar{M}_2}{2\sum k_i} = \frac{C}{2(1+1)} = \frac{C}{4} $$

実際の回転角 θ_2 は、

$$ \theta_2 = \frac{\varphi_2}{K_0} = \frac{L}{2EI_0}\frac{C}{4} = \frac{CL}{8EI_0} $$

となる。

例題：２　次に示す端部が固定支持された連続ばりの応力解析を、固定法を用いて実行し、曲げモーメント図、せん断力図を描け。

部材の剛比は、部材 1、2、3 共に 1 とする。

部材２における基本応力を次のように求める。

$$C=\frac{PL}{8}=\frac{100\cdot 8}{8}=100kNm$$

$$M_0=\frac{PL}{4}=2C=200kNm$$

$$Q=\frac{P}{2}=50kN$$

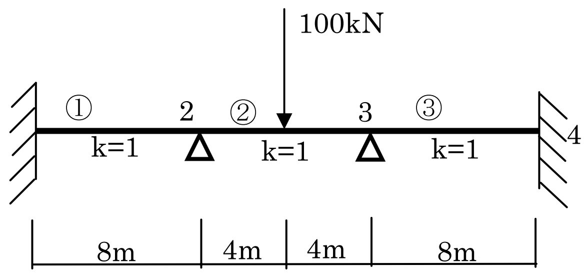


図 1-7 例題２の骨組

節点 2 と 3 における分割率は、同様に

$$DF_1=\frac{1}{1+1}=0.5$$

$$DF_2=\frac{1}{1+1}=0.5$$

となる。

次に、固定法を用いるために表を作成する。次の表で反復解法を実施する。

	右はり		左はり	右はり	外力		左はり	右はり	外力		左はり
DF			0.5	0.5			0.5	0.5			
FEM				−100	100		100		−100		
D1			50	50			−50	−50			
C1	25			−25	25		25		−25		−25
D2			12.5	12.5			−12.5	−12.5			
C2	6.25			−6.25	6.25		6.25		−6.25		−6.25
D3			3.125	3.125			−3.125	−3.125			
C3	1.563			−1.563	1.563		1.563		−1.563		−1.563
D4			0.782	0.782			−0.782	−0.782			
計	32.813		66.407	−66.406			66.406	−66.407			−32.813

得られた材端モーメントより、部材２の中央の曲げモーメントを求める。

$$M_c=M_0-\frac{1}{2}(M_{32}-M_{23})=2\cdot 100-\frac{1}{2}(66.41+66.41)=133.59kNm$$

次に、各部材のせん断力は、以下のように求められる。

$$ {}_1Q = -\frac{1}{8}(66.41 + 32.81) = -12.4kN $$

$$ {}_2Q_L = -\frac{1}{4}(-133.59 - 66.41) = 50kN $$

$$ {}_2Q_L = -\frac{1}{4}(66.41 + 133.59) = -50kN $$

$$ {}_3Q = -\frac{1}{8}(-32.81 - 66.41) = 12.4kN $$

以上の値を用いて、曲げモーメント図とせん断力図を以下のように求める。

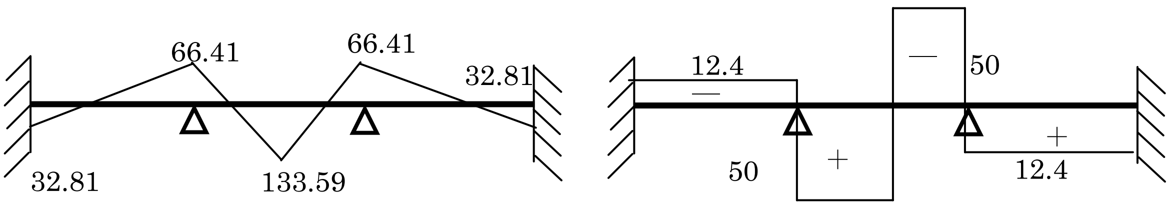


図 1-8 曲げモーメント図とせん断力図

上図より、反力を求め、図式したものを以下に示す。

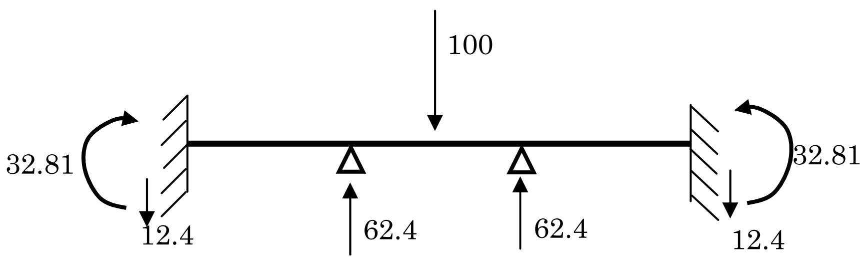


図 1-9 反力と外力

図 1-9 より、上下方向の力の釣合はとれていることが理解できる。モーメントの釣合は、節点１におけるモーメントを計算すると、

$$ M_1 = 32.81 - 32.81 - 62.4 \cdot 8 - 62.4 \cdot 16 + 100 \cdot 12 + 12.4 \cdot 24 \to 0 $$

となり、釣合が満たされている。

節点２における回転角 φ_2 を求めてみよう。式(1. 10) より、

$$ \varphi_2 = \frac{(100 + 25 + 6.25 + 1.563)}{2(1+1)} = 33.2 $$

となる。分子は、外力の項の和を取って求めている。

　たわみ角法を用いて、固定法で得た節点２の回転角 φ_2 の値をチェックしよう。節点２に関連する基本式は、

$$M_{21} = 2\varphi_2$$
$$M_{23} = 2\varphi_2 + \varphi_3 - C$$

ただし、対称条件より

$$\varphi_2 = -\varphi_3$$

従って、

$$M_{23} = \varphi_2 - C$$

となり、節点２でのモーメントの釣合は、

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

より、

$$2\varphi_2 + \varphi_2 - C = 0$$
$$\varphi_2 = \frac{C}{3}$$

となる。固定端モーメントＣの値を代入すると、

$$\varphi_2 = \frac{100}{3} = 33.33$$

となる。得られた値は、固定法で得た値とほぼ一致し、誤差は小さいことが分かる。