



## 第7章 Timoshenko 梁による剛性行列

### ポイント：せん断変形を許す Timoshenko 梁を理解する プログラムを Timoshenko 梁に変更する

これまで、Bernouilli-Euler 仮定である平面保持と法線保持に基づいて梁の微分方程式を誘導し、さらに、仮想仕事の原理よりマトリックス法の剛性行列を求めた。本章では、平面保持のみを仮定し、せん断変形を許す Timoshenko 梁理論を理解し、マトリックス法による剛性行列を誘導する。さらに、これまでに作成した平面骨組のプログラムを、Timoshenko 梁の剛性行列に変更し、また入力仕様を少し変更して、せん断変形を考慮できる骨組解析のプログラムに拡張する。

#### 7.1 はじめに

#### キーワード

梁のせん断変形 Timoshenko 梁 日置梁 プログラムの拡張

太くて短い梁は、Bernouilli-Euler 仮定を満足せず、せん断変形が主体となり、法線保持の仮定が満たされない。実際のせん断変形は、曲げによるせん断応力に比例して断面内に生じ、平面保持の仮定も満たさなくなる。しかしながら、Timoshenko 梁では法線保持のみを放棄し、平面保持を仮定する。平面保持を仮定するため、せん断変形は軸心のせん断変形角によって与えられるとしている。この仮定の詳細は、「SPACE で学ぶ構造力学 静的解析編」を参照されたい。

Timoshenko 梁では、曲げに対して軸方向変位  $u$  と法線方向変位  $v$  を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -y\left(\frac{dv}{dx} + \phi(x)\right) \\ v(x, y, z) &= v(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.1)$$

ここで、 $\phi(x)$  は軸線位置における回転角であり、せん断変形によって生じる。上式から理解できるように、軸方向変位は、せい方向に1次式となり、平面保持が満たされる。また、法線方向の変位は、軸線の法線方向変位によって表される。すなわち、断面せい方向の伸縮は無視されている。

#### 7.2 Timoshenko 梁理論

式(7.1)を用いて、梁の軸方向ひずみ  $\varepsilon_x$  とせん断ひずみ  $\gamma$  を求める。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_b = \frac{du}{dx} &= -y\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx}\right) \\ \gamma = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} &= -\left(\frac{dv}{dx} + \phi(x)\right) + \frac{dv}{dx} \\ &= -\phi(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.2)$$

上式の下から分かるように、式(7.1)で仮定した、回転角  $\phi$  は断面内に生じるせん断ひずみに相当する。

次に、弾性であることから、次のような応力とひずみの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x \\ \tau &= G\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.3)$$

ここで、 $(\sigma_x, \tau)$  は軸方向応力であり、せん断応力である。また、 $E, G$  はヤング係数であり、せん断弾性係数である。

次に、仮想仕事の原理を用いて平面骨組の部材釣合式を求める。この原理に従って、以下に梁部材に関する釣合式を示す。

$$\int_V \delta(\varepsilon_x)\sigma_x dV + \int_V \delta(\gamma)\tau dV = \int_S \delta(u)PdS \quad \dots\dots(7.4)$$

上の釣合式は、仮想仕事の原理より導かれるもので、ひとつの部材に関する釣合である。左辺は、仮想内力仕事であり、部材の応力に微小な仮想変位から求められる仮想ひずみを掛け、部材全体で積分して求める。同じく右辺は、外力の成す外力仕事であり、外力に微小な仮想変位を掛け、外力が加わっている領域全体で積分して求める。

まず、変位場を次のように仮定する。回転角  $\phi$  は  $x$  に関する1次式で、また、法線方向の変位  $v(x)$  は3次式とする。ただし、ここでは回転角(せん断ひずみ)は独立としているが、実際は後で説明するようにたわみ関数に従属する。これを覚えておこう。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.5)$$

仮定した変位場は、両端の変位を満たす必要がある。式(7.5)の上の式に、両端の変位を代入すると、回転角は、

$$\left. \begin{aligned} \phi(0) &= \phi_i = \alpha_1 \\ \phi(l) &= \phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 l \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.6)$$

となる。上式を行列表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \\ &= [A_u] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.7)$$

となり、上式を未定係数について解くと

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} &= A_\phi^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}; \quad A_\phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.8)$$

として、未定係数が決定される。従って、両端のせん断変形角を用いて、部材内のせん断変形角の関数  $\phi(x)$  とその一階微分は次式で表されることになる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \phi \\ \frac{d\phi}{dx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_\phi^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.9)$$

続いて、法線方向の変位は、式(7.5)の下式とその1階微分を行列表示すると、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} v \\ \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.10)$$

後は、軸方向変位と同様に材端の変位と回転角を用いて、未定定数を決定すれば良い。式(7.10)に両端の変位と回転角を代入すると、次式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [A_v] \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.11)$$

上式の係数行列の逆行列を求め、未定係数について解くと、

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} &= [A_v]^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.12)$$

ここで、上式の逆行列は、

$$A_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.13)$$

として与えられる。従って、法線方向変位とその一階微分は、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} v \\ \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.14)$$

次に、求めた変位より、ひずみを計算する。ひずみの式(7.2)より、必要となる変位の微分項を求めておく。

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \{0 \quad 1\} A_\phi^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots(7.15)$$

さらに、行列表示で整理すると、

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\phi^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [B][A^{-1}]\{u\} \quad \dots\dots(7.16)$$

ここで、

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}; \quad [A^{-1}] = \begin{bmatrix} A_\phi^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix}; \quad \{u\}^T = \{\phi_i \quad \phi_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\} \quad \dots\dots(7.17)$$

式(7.16)を利用すると、曲げひずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_b = -\left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\right)y = \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} [B] [A^{-1}] \{u\} \quad \dots\dots(7.18)$$

これで準備が整ったので、次に、内力仕事を求めることにする。内力仕事は、応力とひずみの関係が弾性であり、式(7.3)を用いると、仮想変位による内力仕事  $\delta U$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \delta U_b + \delta U_\gamma \\ \delta U_b &= \int_V \delta(\varepsilon_x) E(\varepsilon_x) dV \\ \delta U_\gamma &= \int_V \delta(\gamma) G(\gamma) dV \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.19)$$

ここで、 $\delta U_b$  は曲げによる仮想内力仕事であり、 $\delta U_\gamma$  はせん断変形による仮想内力仕事である。

最初に、せん断変形による内力仕事を求める。せん断変形として、式(7.9)を用いると、せん断変形による内力仕事は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta U_\gamma &= \int_V \delta(\gamma) G(\gamma) dV = \\ &= \int_0^l \int_A \delta \left( \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \right)^T G \left( \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \right) dA dx \quad \dots\dots(7.20) \end{aligned}$$

上式を評価するために積分を実施する。最初は、上式の中央部分の断面に関する積分を行う。上式の積分は断面積  $A$  となるが、実際のせん断ひずみは  $y$  軸について高次式となるため、ここでは、次のような係数  $\kappa$  を用いて、せん断変形用の断面積を定義する。

$$A_S = \frac{A}{\kappa} \quad \dots\dots(7.21)$$

ここで、 $\kappa$  はせん断変形の係数と呼ばれ、断面形状によって異なる。この係数は長方形断面の場合では 1.2 となり、この値の求め方や他の断面については、「SPACE で学ぶ構造力学 静的解析編」を参照されたい。

式(7.21)と式(7.9)の第1項を用いて、式(7.20)を計算する。

$$\delta U_\gamma = \left\{ \delta\phi_i \quad \delta\phi_j \right\} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \int_0^l \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} G A_S \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.22)$$

先に中央の積分を実行すると、

$$\int_0^l \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} G A_S \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} dx = G A_S \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= G A_S \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.23)$$

となる。上式を式(7.22)に代入し、整理すると、せん断変形による内力仕事が次のように得られる。

$$\delta U_\gamma = G A_S \begin{Bmatrix} \delta\phi_i & \delta\phi_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{G A_S l}{6} \begin{Bmatrix} \delta\phi_i & \delta\phi_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.24)$$

次に、曲げによる内力仕事を求める。曲げひずみの式(7.18)を用いると、曲げによる内力仕事は次式で与えられる。

$$\delta U_b = \int_V \delta(\varepsilon_x) E(\varepsilon_x) dV$$

$$= \int_0^l \int_A \delta \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} [B] [A^{-1}] \{u\}^T E \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} [B] [A^{-1}] \{u\} dA dx$$

$$= \int_0^l \int_A \delta \{u\}^T [A^{-1}]^T [B]^T \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} [B] [A^{-1}] \{u\} dA dx \quad \dots\dots(7.25)$$

上式を評価するために、積分を順序良く実施する。最初は、上式の中央部分の断面に関する積分を行う。

$$\int_A \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} -y \\ -y \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} dA$$

$$= \int_A E y^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} dA = E I_z \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.26)$$

ここで、 $I_z$  は以下のように断面二次モーメントを表す。

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad \dots\dots(7.27)$$

次に、材軸方向の積分を実施する。

$$\begin{aligned}
 & EI_z \int_0^l [B]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [B] dx \\
 &= EI_z \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} dx \\
 & \dots\dots\dots(7.28)
 \end{aligned}$$

上の積分を行う前に行列の積を計算し、その後、積分を実施する。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l [B]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [B] dx \\
 &= \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} dx \\
 &= \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 6x & 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 2l & 3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 3l^2 & 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7.29)
 \end{aligned}$$

上の積分を考慮して、実際の内力仕事は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta U_b &= \delta(\{u\}^T \begin{bmatrix} A_\phi^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \int_0^l \int_A [B]^T \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix}^T EI_z \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} [B] dA dx \begin{bmatrix} A_\phi^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \{u\}) \\
 &= \delta(\{u\}^T) \begin{bmatrix} EI_z [A_\phi^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] & EI_z [A_\phi^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} [A_v^{-1}] \\ EI_z [A_v^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2l \\ 0 & 3l^2 \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] & EI_z [A_v^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} [A_v^{-1}] \end{bmatrix} \{u\} \dots\dots\dots(7.30)
 \end{aligned}$$

さらに、上式の内部における行列の積は、次式のように計算される。

$$\begin{aligned}
 EI_z [A_\phi^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] &= EI_z \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \dots\dots\dots(7.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_z [A_v^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} [A_v^{-1}] &= EI_z \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \\
 &= EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \dots\dots(7.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_z [A_\phi^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} [A_\phi^{-1}] &= EI_z \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \\
 &= EI_z \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \dots\dots(7.33)
 \end{aligned}$$

係数が対称行列であることを考慮して、上の積分結果をまとめると、曲げによる内力仕事は、

$$\delta U_b = \delta(\{u\}^T) \begin{bmatrix} K_\phi & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix} \{u\} \dots\dots(7.34)$$

となり、各係数行列は、式(7.31)、(7.32)、(7.33)より与えられる。

$$K_\phi = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(7.35)$$

$$K_{\phi v} = EI_z \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \dots\dots(7.36)$$



$$K_v = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \dots\dots(7.37)$$

さらに、せん断変形による内力仕事を考慮すると、式(7.24)及び(7.34)より、梁全体の内力仕事は次式となる。

$$\delta U = \delta U_b + \delta U_\gamma = \delta(\{u\}^T) \begin{bmatrix} K_\phi + K_\gamma & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix} \{u\} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} K_\phi + K_\gamma & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix}} \right\} \dots\dots(7.38)$$

$$\{u\}^T = \{\phi_i \quad \phi_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\}$$

ここで、

$$K_\gamma = \frac{GA_s l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots(7.39)$$

### 7.3 変位の依存関係

前節では、せん断ひずみの関数  $\phi(x)$  を独立に採っていたが、実際は、他の変位と従属関係が存在する。この依存関係を、下式の断面力間の釣合から求める。曲げモーメントとせん断力の関係は、

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad \dots\dots(7.40)$$

であり、曲げモーメントとせん断力は、式(7.2)の下と弾性であることを考慮すると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M &= \int_A y \sigma_x dA = E \int_A y \varepsilon_x dA \\ Q &= \int_A \tau dA = G \int_A \gamma dA = -G \int_A \phi dA \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_A} \right\} \dots\dots(7.41)$$

さらに、軸方向ひずみとせん断ひずみは、式(7.9)の第1項と(7.18)で与えられることから、曲げモーメントとせん断力は次式となる。

$$\begin{aligned} M &= E \int_A y [-y \quad -y] [B] [A^{-1}] \{u\} dA \\ Q &= -G \int_A [1 \quad x] A_\phi^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} dA \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_A} \right\} \dots\dots(7.42)$$

さらに、上式を断面について積分すると、

$$\begin{aligned}
 M &= E \int_A y \begin{bmatrix} -y & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\phi^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \{u\} dA \\
 &= -EI_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} - EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \dots\dots(7.43)
 \end{aligned}$$

$$Q = -G \int_A \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} A_\phi^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} dA = -GA_s \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \dots\dots(7.44)$$

となる。また、曲げモーメントの一階微分は、式(7.43)の右辺第1項が  $x$  に関して定数であることから、

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dx} &= -EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\
 &= -EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = -6EI_z \begin{bmatrix} \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\
 &\dots\dots(7.45)
 \end{aligned}$$

となり、式(7.40)より、式(7.44)と(7.45)は同値でなくてはならない。

$$GA_s \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = 6EI_z \begin{bmatrix} \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \dots\dots(7.46)$$

そこで、 $x=0$  と  $x=l$  で等しい値となるようにすると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 GA_s \phi_i &= \frac{12EI_z}{l^3} (v_i + \frac{l}{2} \theta_i - v_j + \frac{l}{2} \theta_j) \\
 GA_s \phi_j &= \frac{12EI_z}{l^3} (v_i + \frac{l}{2} \theta_i - v_j + \frac{l}{2} \theta_j)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.47)$$

新たな無次元パラメータとして、 $\alpha = 12EI_z / (GA_s l^2)$  を用いると、上式は、次のように変更される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_i l &= \alpha(v_i + \frac{l}{2}\theta_i - v_j + \frac{l}{2}\theta_j) \\ \phi_j l &= \alpha(v_i + \frac{l}{2}\theta_i - v_j + \frac{l}{2}\theta_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.48)$$

次に、実際の断面の回転角  $\phi$  は、法線から計算された回転角  $\theta$  とせん断変形による回転角  $\phi$  の和として得られる。従って、両材端の回転角は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \theta_i + \phi_i \\ \varphi_j &= \theta_j + \phi_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.49)$$

となる。上式を式(7.48)に代入し、 $\theta$  を消去して整理すると、式(7.48)の上は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_i l &= \alpha(v_i + \frac{l}{2}(\varphi_i - \phi_i) - v_j + \frac{l}{2}(\varphi_j - \phi_j)) \\ \phi_i l + \frac{\alpha l}{2}(\phi_i + \phi_j) &= \alpha(v_i + \frac{l}{2}\varphi_i - v_j + \frac{l}{2}\varphi_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.50)$$

同様に、式(7.48)の下は

$$\phi_j l + \frac{\alpha l}{2}(\phi_i + \phi_j) = \alpha(v_i + \frac{l}{2}\varphi_i - v_j + \frac{l}{2}\varphi_j) \dots\dots\dots(7.51)$$

となる。式(7.50)と(7.51)及び式(7.49)を並べて行列表記すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\frac{\alpha}{2})l & 0 & \frac{\alpha}{2}l \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha}{2}l & 0 & (1+\frac{\alpha}{2})l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \\ \theta_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7.52)$$

上式は、両端の変位における従属関係を表しているが、さらに、利用しやすい形にするためには、左辺項の係数行列の逆行列を計算し、両辺の左より掛けることが必要となる。そこで、行と列を入れ替えると、式(7.52)は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1+\frac{\alpha}{2})l & \frac{\alpha}{2}l \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}l & (1+\frac{\alpha}{2})l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7.53)$$

となり、次に、左辺項の逆行列を求める。左辺項の係数行列は次のよう

な特異な形となっており、

$$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & X \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad a = (1 + \frac{\alpha}{2})l; \quad b = \frac{\alpha}{2}l \dots\dots(7.54)$$

従って、逆行列は比較的容易に求められる。逆行列の定義より、元の行列の左より逆行列を掛けると、右辺のように単位行列となっている。さらに、左辺の行列の掛け算を実施すると、下式の下の関係が得られ、行列  $A$  は単位行列に、また、行列  $C$  はゼロ行列であることが分かる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}} \right\} \dots\dots(7.55)$$

$$A = I; C = 0; A + BX = 0; DX = I$$

残りの行列は、上式より、

$$BX = -I; DX = I \quad \dots\dots(7.56)$$

となり、最後に、式(7.52)の行列  $X$  の逆行列を得ることで、全体の逆行列は容易に求められる。行列  $X$  の逆行列は、

$$D = X^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + \alpha)l} \begin{bmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & (1 + \frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.57)$$

となり、全体の逆行列は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + \alpha)l} \begin{bmatrix} (1 + \alpha)l & 0 & -(1 + \frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & (1 + \alpha)l & \frac{\alpha}{2} & -(1 + \frac{\alpha}{2}) \\ 0 & 0 & (1 + \frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1 + \frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.58)$$

得られた逆行列が正しい行列であるかどうか、一度確かめてみよう。下式のように元の行列と上で求めた逆行列の掛け算を実施し、単位行列

になっているがどうか確認する。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & -(1+\frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & (1+\alpha)l & \frac{\alpha}{2} & -(1+\frac{\alpha}{2}) \\ 0 & 0 & (1+\frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1+\frac{\alpha}{2})l & \frac{\alpha}{2}l \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}l & (1+\frac{\alpha}{2})l \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & (1+\alpha)l - (1+\frac{\alpha}{2})^2l + (\frac{\alpha}{2})^2l & -(1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l + (1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l \\ 0 & (1+\alpha)l & -(1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l + (1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l & (1+\alpha)l + (\frac{\alpha}{2})^2l - (1+\frac{\alpha}{2})^2l \\ 0 & 0 & (1+\frac{\alpha}{2})^2l - (\frac{\alpha}{2})^2l & (1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l - (1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l \\ 0 & 0 & -(1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l + (1+\frac{\alpha}{2})\frac{\alpha}{2}l & (1+\frac{\alpha}{2})^2l - (\frac{\alpha}{2})^2l \end{bmatrix} \\
 & \dots\dots\dots(7.59)
 \end{aligned}$$

上の行列を少し計算すると、単位行列となっていることが分かる。

式(7.58)の逆行列を式(7.53)の両辺の左から掛けることで、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & -(1+\frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & (1+\alpha)l & \frac{\alpha}{2} & -(1+\frac{\alpha}{2}) \\ 0 & 0 & (1+\frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \\ \alpha & \frac{\alpha}{2}l & -\alpha & \frac{\alpha}{2}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} -\alpha & (1+\frac{\alpha}{2})l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & (1+\frac{\alpha}{2})l \\ \alpha & \frac{\alpha l}{2} & -\alpha & \frac{\alpha l}{2} \\ \alpha & \frac{\alpha l}{2} & -\alpha & \frac{\alpha l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7.60)
 \end{aligned}$$

上式で、第1式、2式を第3式、4式に入れ替え、さらに、左辺の材端変位として、法線方向変位を加えると、次の変換式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\alpha l}{2} & -\alpha & \frac{\alpha l}{2} \\ \alpha & \frac{\alpha l}{2} & -\alpha & \frac{\alpha l}{2} \\ (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & (\frac{2+\alpha}{2})l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & (\frac{2+\alpha}{2})l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7.61)$$

上式を少し整理すると、次式となる。

$$\{u\} = [T]\{\bar{u}\} \dots\dots\dots(7.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \{u\}^T &= \{\phi_i \ \phi_j \ v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j\} \\ \{\bar{u}\}^T &= \{v_i \ \phi_i \ v_j \ \phi_j\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.63)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_v \end{bmatrix}; \quad T_\phi = \frac{\alpha}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7.64)$$

$$T_v = \frac{1}{(1+\alpha)l} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \frac{2+\alpha}{2}l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7.65)$$

内力仕事は、式(7.38)で与えられており、次のようであった。

**7.4 曲げによる  
内力仕事**

$$\delta U = \delta U_b + \delta U_\gamma = \delta(\{u\}^T) \begin{bmatrix} K_\phi + K_\gamma & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix} \{u\} \dots\dots\dots(7.66)$$

式(7.61)を式(7.66)に代入し、変数変換を行う。

$$\delta U = \delta U_b + \delta U_\gamma = \delta\{\bar{u}\}^T [T]^T \begin{bmatrix} K_\phi + K_\gamma & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix} [T]\{\bar{u}\} \dots\dots\dots(7.67)$$

上式中の中央部分の行列計算を実施すると、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} T_\phi^T & T_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_\phi + K_\gamma & K_{\phi v} \\ K_{\phi v}^T & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_v \end{bmatrix} \\ &= T_\phi^T (K_\phi + K_\gamma) T_\phi + T_v^T K_{\phi v}^T T_\phi + T_\phi^T K_{\phi v} T_v + T_v^T K_v T_v \quad \dots\dots(7.68) \end{aligned}$$

となり、各々の係数は、

$$\begin{aligned} T_\phi^T (K_\phi + K_\gamma) T_\phi &= \left( \frac{1}{(1+\alpha)l} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \\ -1 & -1 \\ \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EI_z}{l} + \frac{GA_s l}{3} & -\frac{EI_z}{l} + \frac{GA_s l}{6} \\ -\frac{EI_z}{l} + \frac{GA_s l}{6} & \frac{EI_z}{l} + \frac{GA_s l}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\alpha}{(1+\alpha)l} \right)^2 \begin{bmatrix} \frac{GA_s l}{2} & \frac{GA_s l}{2} \\ \frac{GA_s l^2}{4} & \frac{GA_s l^2}{4} \\ -\frac{GA_s l}{2} & -\frac{GA_s l}{2} \\ \frac{GA_s l^2}{4} & \frac{GA_s l^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} = \left( \frac{\alpha}{(1+\alpha)l} \right)^2 \frac{GA_s l}{2} \begin{bmatrix} 2 & l & -2 & l \\ l & \frac{l^2}{2} & -l & \frac{l^2}{2} \\ -2 & -l & 2 & -l \\ l & \frac{l^2}{2} & -l & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix} \\ & \dots\dots(7.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_v^T K_{\phi v}^T T_\phi &= \left( \frac{1}{(1+\alpha)l} \right)^2 \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \\ -1 & -1 \\ \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{EI_z}{l} & 0 & -\frac{EI_z}{l} \\ 0 & -\frac{EI_z}{l} & 0 & \frac{EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \frac{2+\alpha}{2}l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{(1+\alpha)l} \right)^2 \frac{\alpha EI_z}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \frac{2+\alpha}{2}l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{(1+\alpha)l} \right)^2 \frac{\alpha EI_z}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \dots\dots(7.70) \end{aligned}$$

上式と同様に、下の行列もゼロ行列となる。

$$T_\phi^T K_{\phi v} T = [0] \quad \dots\dots(7.71)$$

$$\begin{aligned}
 T_v^T K_v T_v &= \\
 &= \left(\frac{1}{(1+\alpha)l}\right)^2 EI_z \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \frac{2+\alpha}{2}l & 0 & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & \alpha & (1+\alpha)l & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha l}{2} & 0 & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \frac{2+\alpha}{2}l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{(1+\alpha)l}\right)^2 EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4+\alpha & -\frac{6}{l} & 2-\alpha \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2-\alpha & -\frac{6}{l} & 4+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\alpha)l & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \frac{2+\alpha}{2}l & \alpha & -\frac{\alpha l}{2} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)l & 0 \\ -\alpha & -\frac{\alpha l}{2} & \alpha & \frac{2+\alpha}{2}l \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{(1+\alpha)l}\right)^2 EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l} & 6 & -\frac{12}{l} & 6 \\ 6 & (4+2\alpha+\alpha^2)l & -6 & (2-2\alpha-\alpha^2)l \\ -\frac{12}{l} & -6 & \frac{12}{l} & -6 \\ 6 & (2-2\alpha-\alpha^2)l & -6 & (4+2\alpha+\alpha^2)l \end{bmatrix} \dots\dots(7.72)
 \end{aligned}$$

変数の並びを同じにして、式(7.69)と式(7.72)をまとめると、

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)l}\right)^2 \frac{GA_s l}{2} \begin{bmatrix} 2 & l & -2 & l \\ l & \frac{l^2}{2} & -l & \frac{l^2}{2} \\ -2 & -l & 2 & -l \\ l & \frac{l^2}{2} & -l & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{(1+\alpha)l}\right)^2 EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l} & 6 & -\frac{12}{l} & 6 \\ 6 & (4+2\alpha+\alpha^2)l & -6 & (2-2\alpha-\alpha^2)l \\ -\frac{12}{l} & -6 & \frac{12}{l} & -6 \\ 6 & (2-2\alpha-\alpha^2)l & -6 & (4+2\alpha+\alpha^2)l \end{bmatrix} \\
 &\left(\frac{1}{(1+\alpha)l}\right)^2 \begin{bmatrix} \alpha^2 GA_s l + \frac{12EI_z}{l} & \alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z & -\alpha^2 GA_s l - \frac{12EI_z}{l} & \alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z \\ \alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z & \alpha^2 GA_s \frac{l^3}{4} + EI_z(4+2\alpha+\alpha^2)l & -\alpha^2 GA_s \frac{l^3}{2} - 6EI_z & \alpha^2 GA_s \frac{l^2}{4} + EI_z(2-2\alpha-\alpha^2)l \\ -\alpha^2 GA_s l - \frac{12EI_z}{l} & -\alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} - 6EI_z & \alpha^2 GA_s l - \frac{12EI_z}{l} & -\alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} - 6EI_z \\ \alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z & \alpha^2 GA_s \frac{l^3}{4} + EI_z(2-2\alpha-\alpha^2)l & -\alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} - 6EI_z & \alpha^2 GA_s \frac{l^3}{4} + EI_z(4+2\alpha+\alpha^2)l \end{bmatrix} \dots\dots(7.73)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、上の行列の中で、次のように異なる要素の値が計算される。



$$\alpha^2 GA_s l + \frac{12EI_z}{\ell} = \alpha \left( \frac{12EI_z}{GA_s l^2} \right) GA_s l + \frac{12EI_z}{\ell} = \frac{12EI_z}{l} (1 + \alpha) \quad \dots\dots(7.74)$$

$$\alpha^2 GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z = \alpha \left( \frac{12EI_z}{GA_s l^2} \right) GA_s \frac{l^2}{2} + 6EI_z = 6l \frac{EI_z}{l} (1 + \alpha) \quad \dots\dots(7.75)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{12EI_z}{GA_s l^2} GA_s \frac{l^3}{4} + EI_z (4 + 2\alpha + \alpha^2) l &= 3\alpha EI_z l + EI_z (4 + 2\alpha + \alpha^2) l \\ &= EI_z l (4 + 5\alpha + \alpha^2) = \frac{EI_z}{l} l^2 (1 + \alpha) (4 + \alpha) \quad \dots\dots(7.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{12EI_z}{GA_s l^2} GA_s \frac{l^3}{4} + EI_z (2 - 2\alpha - \alpha^2) l &= (3\alpha EI_z l + EI_z (2 - 2\alpha - \alpha^2) l) \\ &= \frac{EI_z}{l} l^2 (2 + \alpha - \alpha^2) = \frac{EI_z}{l} l^2 (1 + \alpha) (2 - \alpha) \quad \dots\dots(7.77) \end{aligned}$$

上の要素の計算結果を用いて、内力仕事をまとめると、

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_b + \delta U_\gamma = \delta(\{\bar{u}\}^T) [K_{v\phi}] \{\bar{u}\} \\ [K_{v\phi}] &= \frac{EI_z}{(1 + \alpha) l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \alpha) l^2 & -6l & (2 - \alpha) l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \alpha) l^2 & -6l & (4 + \alpha) l^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.78) \end{aligned}$$

となる。

### 7.5 釣合式

仮想仕事の原理より、部材の釣合式を求める。曲げと共にせん断変形を許す内力仕事は、式(7.78)のように求められている。さらに、式(2.26)と(2.27)で示される軸方向仮想変位による内力仕事を加える。

$$\begin{aligned} \delta U_n &= \delta(\{u_i \quad u_j\}^T) [K_u] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\ K_u &= \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \delta U_n \\ K_u \end{aligned}} \right\} \dots\dots(7.79)$$

次に、外力仕事は式(2.31)より、次式で与えられる。

$$\delta V = \delta(\{u_i \quad u_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\}) \{P\} \quad \dots\dots(7.80)$$

これで、仮想変位に対する内力仕事と外力仕事を得られたので、整理し

て次のように表す。

$$\delta U = \delta U_\gamma + \delta U_b + \delta U_n = \delta V$$

$$\delta \{u\}^T \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_{v\phi} \end{bmatrix} \{u\} = \delta \{u\}^T \{P\} \quad \dots\dots(7.81)$$

ここで、上式が常等的に成立するためには、仮想変位として与えた材端の変位は任意であることから、各材端変位に関する係数はゼロでなくてはならない。従って、次の方程式が得られることになる。

$$\begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_{v\phi} \end{bmatrix} \{u\} = \{P\} \quad \dots\dots(7.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \{P\}^T &= \{P_i \quad P_j \quad Q_i \quad M_i \quad Q_j \quad M_j\} \\ \{u\}^T &= \{u_i \quad u_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.83)$$

上の材端荷重ベクトルと材端変位ベクトルの並びを、次のように少し変更すると、

$$\left. \begin{aligned} \{P\}^T &= \{P_i \quad Q_i \quad M_i \quad P_j \quad Q_j \quad M_j\} \\ \{u\}^T &= \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.84)$$

釣合式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & 12\beta & 6l\beta & 0 & -12\beta & 6l\beta \\ & & (4+\alpha)l^2\beta & 0 & -6l\beta & (2-\alpha)l^2\beta \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ Sym & & & & 12\beta & -6l\beta \\ & & & & & (4+\alpha)l^2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7.85)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{12EI_z}{GA_s l^2}; \quad \beta = \frac{EI_z}{(1+\alpha)l^3} \quad \dots\dots(7.86)$$

7.6 プログラム  
の変更

前節では、せん断変形を考慮した Timoshenko 梁の剛性行列と釣合式を誘導した。この剛性行列を用いて、前章までに作成した平面骨組のプログラムを変更し、せん断変形を考慮した解析が可能となるようにしよう。変更箇所はそれほど多くはなく、入力部分と部材剛性行列を作成する部分である。

最初に、部材断面要素で、せん断弾性係数とせん断変形の係数  $\kappa$  に関する入力域を挿入する。図 7-1 に示すように、要素データの入力域で、せん断弾性係数とせん断変形の係数  $\kappa$  の入力域を作る。

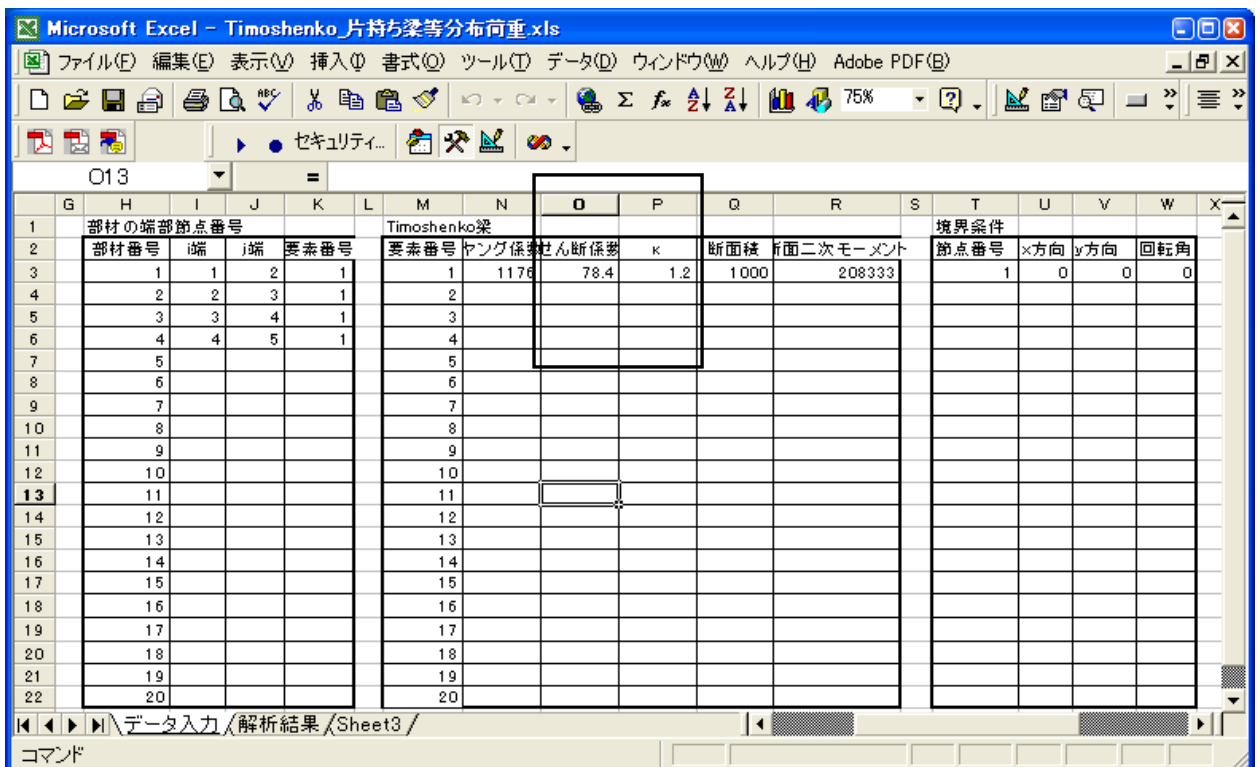


図 7-1 入力仕様の変更

Excel の列を 2 列挿入したため、境界条件などそれ以降の入力域のセル番号がずれていることに注意されたい。

上図のように入力域を変更した後、プログラムでは、要素データを保存する配列を次のように変更する。

```
ReDim Element(5, n_Element) ' せん断弾性係数とせん断係数  $\kappa$  の追加
```

さらに、セルからのデータ取得のプログラムを、次のように 2 つの入力域を追加し、変更する。

```

' ----- 3. 要素情報
F_cel = "N2"
For i = 1 To n_Element
Element(1, i) = Range(F_cel).Offset(i, 0)
Element(2, i) = Range(F_cel).Offset(i, 1)
Element(3, i) = Range(F_cel).Offset(i, 2)
Element(4, i) = Range(F_cel).Offset(i, 3)
Element(5, i) = Range(F_cel).Offset(i, 4)
Next

```

最後に、部材座標系での剛性行列を作成する箇所であり、サブルーチン名を「Cal\_k\_T」とする。ただし、引数は同じである。このサブルーチンは、2箇所でもコールされ、名前を以下のように変更する。最初は、主ルーチン内の全体剛性行列を作成する部分であり、

```

' ----- 全体剛性行列作成
For memb = 1 To n_Member
mx = Member(3, memb)
Call Cal_k_T(memb, ak, al, mx, Element) 'Timoshenko 梁
Call Cal_rot(memb, R, sin_cos)
Call Cal_all_rot(ak, akk, R)
Call Build_sky_k(memb, gsky, akk, F_rest, nsum_d, Member)
Next

```

他の一つは、部材の応力を計算するサブルーチン「Cal\_stress」内で以下のように呼ばれる。

```

For i = 1 To n_Member
mx = Member(3, i)
' ----- 部材座標系の剛性行列計算(Timoshenko 梁)
Call Cal_k_T(i, ak, al, mx, Element)
' ----- 回転行列計算
Call Cal_rot(i, R, sin_cos)
' ----- 部材両端の変位を全体座標系の変位から取り出す
Call Get_M_u(Member(1, i), Member(2, i), u, F_rest, disp)
' ----- 両端変位を全体座標系から部材座標系に変換
Call Cal_rotate(R, u, uu)
' ----- 材端外力と材中央の曲げモーメント計算
Call Get_stress(i, ak, uu, ff, C_M_Q, Mc)
' ----- 部材応力を出力
Call Out_stress(ff, i, Mc)
Next

```

部材の剛性行列は、サブルーチン「Cal\_k\_T」で作成される。式(7.85)を参照して、次のように変更する。

```

'-----
'      部材座標系での剛性行列の計算(Timoshenko 梁)
'-----

Private Sub Cal_k_T(ii, ak, al, mx, Element)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim al1 As Double
Dim al2 As Double
Dim al3 As Double
Dim E As Double
Dim G As Double
Dim Kappa As Double
Dim a As Double
Dim IZ As Double
Dim ak1 As Double
Dim alpha As Double
Dim Beta As Double
'-----

For i = 1 To 5
  For j = i + 1 To 6
    ak(i, j) = 0#
  Next
Next
al1 = al(ii)      ' 部材長さ
al2 = al1 * al1
al3 = al2 * al1
E = Element(1, mx) ' 部材ヤング係数
G = Element(2, mx) ' 部材せん断弾性係数
Kappa = Element(3, mx) ' 部材せん断係数  $\kappa$ 
a = Element(4, mx) ' 部材の断面積
IZ = Element(5, mx) ' 部材の断面二次モーメント
'-----

alpha = 12# * E * IZ / (G * a / Kappa * al2)
Beta = E * IZ / (1# + alpha) / al3
'-----

ak(1, 1) = E * a / al1
ak(1, 4) = -ak(1, 1)
ak(4, 4) = ak(1, 1)
ak(2, 2) = 12# * Beta
ak(2, 3) = 6# * al1 * Beta
ak(2, 5) = -ak(2, 2)
ak(2, 6) = ak(2, 3)
ak(3, 3) = (4# + alpha) * al2 * Beta
ak(3, 5) = -ak(2, 3)
ak(3, 6) = (2# - alpha) * al2 * Beta
ak(5, 5) = ak(2, 2)
ak(5, 6) = -ak(2, 3)
ak(6, 6) = ak(3, 3)
'-----

For i = 2 To 6
  For j = 1 To i
    ak(i, j) = ak(j, i)
  Next
Next
End Sub

```

7.7 例題

本節では、簡単な例題を用いて、Timoshenko 梁による骨組プログラムの動作確認を行う。例題の骨組は、次に示す片持ち梁であり、せん断変形が大きく生じるタイプのモデルとしている。このモデルは既に、梁理論の第6章で計算しており、ここでは、作成した Timoshenko 梁平面骨組の解析プログラムを使用して、解析結果の検証を行う。

下に示す片持ち梁であり、 $D/l$ が0.1,0.25,0.5の3種類とする。断面は木造の長方形断面で、幅20cmで、せいは50cmとする。木種はべいまつ、特急とし、木材のヤング係数は $1176kN/cm^2$ で、せん断弾性係数は $78.4kN/cm^2$ とする。

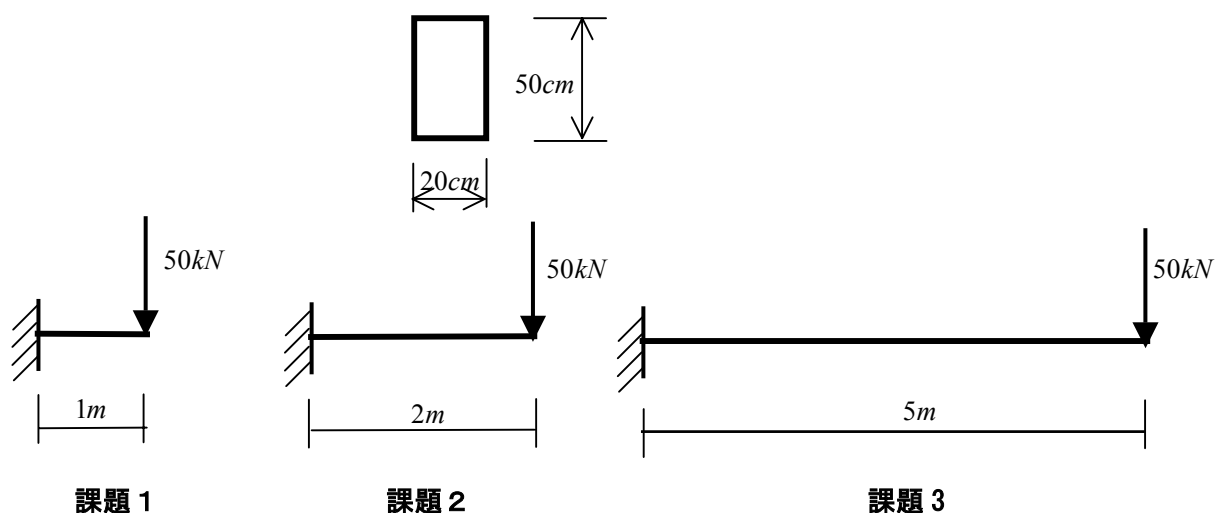


図 7-2 課題の解析モデル（長さの異なる片持ち梁）

ここでは、せん断変形によるたわみを検討するために、ベルヌーイ・オイラー梁による片持ち梁先端のたわみ $\delta_0$ とチェモシエンコ梁によるたわみ $\delta_s$ を次式で与える。下式で、 $\kappa$ はせん断変形の係数と呼ばれ、長方形断面では1.2となる。

$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{3EI}; \quad \delta_s = \kappa \frac{Pl}{GA} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad \dots\dots(7.87)$$

課題で用いた梁の断面性能は、

$$\left. \begin{aligned} A &= 20 \cdot 50 = 1000cm^2 \\ I &= \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 208333cm^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.88)$$

3つの課題のたわみは、式(7.87)より、各々、次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \delta_{01} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 100^3}{3 \cdot 1176 \cdot 208333} = 0.0680cm & \delta_{S1} &= \kappa \frac{Pl}{GA} = 1.2 \frac{50 \cdot 100}{78.4 \cdot 1000} = 0.0765cm \\
 \delta_{02} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 200^3}{3 \cdot 1176 \cdot 208333} = 0.5442cm & \delta_{S2} &= \kappa \frac{Pl}{GA} = 1.2 \frac{50 \cdot 200}{78.4 \cdot 1000} = 0.1531cm \\
 \delta_{03} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 500^3}{3 \cdot 1176 \cdot 208333} = 8.503cm & \delta_{S3} &= \kappa \frac{Pl}{GA} = 1.2 \frac{50 \cdot 500}{78.4 \cdot 1000} = 0.3825cm
 \end{aligned}
 \quad \dots (7.89)$$

課題 1 のスパン長が 1 m の入力データを図 7-3 に示す。

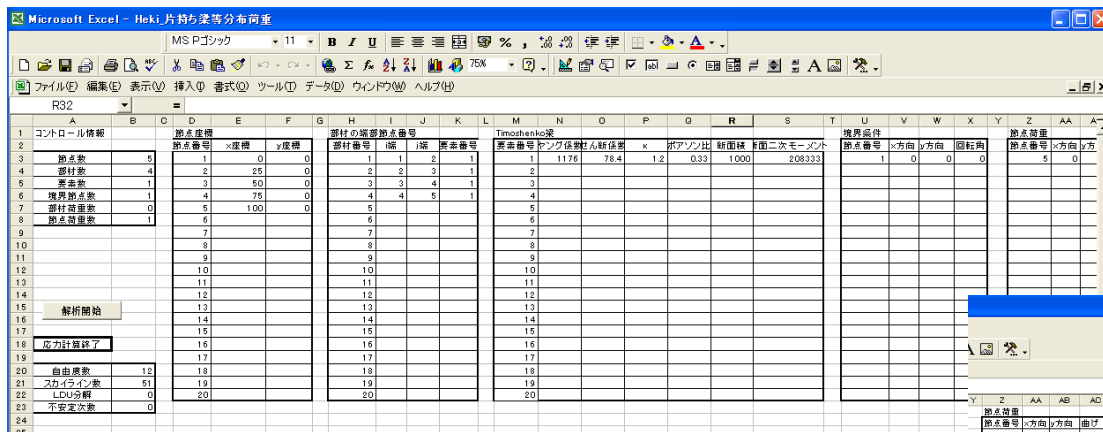
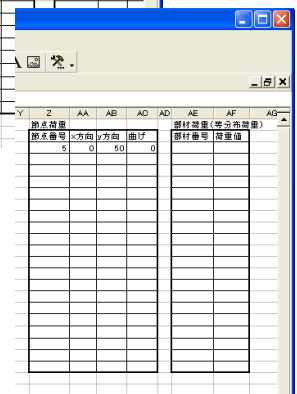


図 7-3(a) 課題 1 の解析モデルデータ入力

課題 1 の解析結果は、図 7-4 に示されている。同図より、分かるように、断面力は、静定構造物であることから、せん断変形を考慮しても変化しない。ただし、梁先端のたわみは、せん断変形の影響によって大きくなっている。

図 7-3(b) 課題 1 の解析モデル荷重項



節点番号	u	v	θ	部材番号	N	Q	M	N	Q	M	M
1	0.000	0.000	0.0000	1	0.000	-50.000	-5000.000	0.000	50.000	3750.000	-4375.000
2	0.000	0.025	0.0004	2	0.000	-50.000	-3750.000	0.000	50.000	2500.000	-3125.000
3	0.000	0.060	0.0008	3	0.000	-50.000	-2500.000	0.000	50.000	1250.000	-1875.000
4	0.000	0.101	0.0010	4	0.000	-50.000	-1250.000	0.000	50.000	0.000	-625.000
5	0.000	0.145	0.0010								

図 7-4 課題 1 の解析結果

以下に、3つの課題に対する平面骨組プログラムで計算した結果をまとめる。ここでは、梁先端のたわみを評価パラメータとして使用する。

課題 1 :  $\delta = 0.145cm$

課題 2 :  $\delta = 0.697cm$

課題3 :  $\delta = 8.886cm$

上のように、式(7.86)で示されている解析結果と非常に良い一致を示しており、プログラムは正常に動作している。

7.8 日置梁による剛性行列

長方形断面に対するせん断変形を考慮したさらに精度の良い梁理論が日置によって提案されている<sup>7)</sup>。その中で、たわみ角法の基本式が提示されており、本節では、第1章で示した手法に従い、この基本式を利用して剛性行列を求める。

日置が提示したたわみ角法の基本式は、次式であり、

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2E_x I}{(1+2\lambda)l} \left\{ (2+\lambda)\varphi_i + (1-\lambda)\varphi_j - 3R \right\} \\ M_{ji} &= \frac{2E_x I}{(1+2\lambda)l} \left\{ (1-\lambda)\varphi_i + (2+\lambda)\varphi_j - 3R \right\} \\ Q_{ij} &= \frac{2E_x I}{(1+2\lambda)l^2} \left\{ (3\varphi_i + 3\varphi_j - 6R) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.90)$$

ここで、上式で使用されているパラメータは、

$$\kappa = 1.2 + \frac{3\nu_{yx} G_{xy}}{10E_x}, \quad \lambda = \frac{6E_x I}{l^2 G_{xy} A} \kappa \quad \dots\dots(7.91)$$

である。この章で用いられているせん断に関する係数と多少異なり、最初の項はせん断に関する係数であり、値1.2は、この章で用いている長方形断面のせん断に関する係数である。また、 $\lambda$ は次のように変形して、無次元パラメータと同じにする。

$$\frac{\alpha}{2} = \lambda = \frac{6E_x I}{l^2 G_{xy} A_s}; \quad A_s = \frac{A}{\kappa} \quad \dots\dots(7.92)$$

無次元パラメータを用いて、式(7.90)を書き直すと、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l} \left\{ (4+\alpha)\varphi_i + (2-\alpha)\varphi_j - 3R \right\} \\ M_{ji} &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l} \left\{ (2-\alpha)\varphi_i + (4+\alpha)\varphi_j - 3R \right\} \\ Q_{ij} &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l^2} \left\{ (6\varphi_i + 6\varphi_j - 12R) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.93)$$



さらに、部材角を梁両端の法線方向変位を用いると、

$$R = \frac{v_j - v_i}{l} \quad \dots\dots(7.94)$$

で表され、上式をたわみ角の基本式に代入し、記号を少し変更すると両端の曲げモーメントが得られ、さらに、せん断力は外力との釣合より、

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l} \left\{ (4+\alpha)\varphi_i + (2-\alpha)\varphi_j + 3\frac{v_i}{l} - 3\frac{v_j}{l} \right\} \\ M_j &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l} \left\{ (2-\alpha)\varphi_i + (4+\alpha)\varphi_j + 3\frac{v_i}{l} - 3\frac{v_j}{l} \right\} \\ Q_i &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l^2} \left\{ (3\varphi_i + 3\varphi_j + 6\frac{v_i}{l} - 6\frac{v_j}{l}) \right\} \\ Q_j &= \frac{E_x I}{(1+\alpha)l^2} \left\{ (3\varphi_i + 3\varphi_j + 6\frac{v_i}{l} - 6\frac{v_j}{l}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.95)$$

となり、これを行列表示すると、

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{E_x I_z}{(1+\alpha)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\alpha)l^2 & -6l & (2-\alpha)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\alpha)l^2 & -6l & (4+\alpha)l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.96)$$

となる。

軸方向の釣合を加え、材端変位と材端荷重の順序を変換すると、次式が与えられる。この式は、有限要素法による釣合式(7.85)とせん断変形に関する係数が少し異なるのみで、全く同一となる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & 12\beta & 6l\beta & 0 & -12\beta & 6l\beta \\ & & (4+\alpha)l^2\beta & 0 & -6l\beta & (2-\alpha)l^2\beta \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ Sym & & & & 12\beta & -6l\beta \\ & & & & & (4+\alpha)l^2\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.97)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{12EI_z}{GA_s l^2}; \quad \beta = \frac{EI_z}{(1+\alpha)l^3}; \quad A_s = \frac{A}{\kappa}; \quad \kappa = 1.2 + \frac{3\nu_{yx}G_{xy}}{10E_x} \quad \dots\dots(7.98)$$

となり、 $\kappa$ の1.2は長方形断面のせん断に関する係数である。

読者の課題として、この日置梁を、これまでに開発してきた平面骨組のプログラムに組み込んでみよう。

## 7.9 まとめ

本章では、梁断面にせん断変形を許す Timoshenko 梁に付いて学んだ。曲げを受ける梁断面でせん断変形を許すと、断面が変形し、一般によく用いられる Bernouilli-Euler 仮定である平面保持と法線保持が成立しなくなる。しかしながら、断面の形状が変化すると理論的扱いが難しくなるため、Timoshenko 梁では断面のせん断変形を図芯の位置でのせん断変形角で代表させる。そのため、この Timoshenko 梁理論では、平面保持は成立するが、法線保持は成り立たなくなる。

本章では、この Timoshenko 梁理論に基づき、仮想仕事の原理を用いて、マトリックス法の剛性行列を誘導した。さらに、Timoshenko 梁が扱えるように、これまでに作成してきた平面骨組のプログラムの入力仕様と剛性行列を変更した。