第１章　たわみ角法の基本式

1.1 はじめに

本章では、たわみ角法の基本式を導くことにしよう。基本式の誘導法は各種あるが、ここでは、はりの微分方程式を解くことで基本式求める方法を採用する。

この本で使用する座標系は、右手・右ネジの法則に従った座標を用いる。また、ひとつの部材では、図 1-1 に示すように部材の左端の i 点を原点とする。部材は、長さがℓで、材に沿って一様なヤング係数Eと断面二次モーメントIを有するものとする。なお、この本では、平面骨組を対象とする。

1.2 部材角のない場合の基本式

最初に、梁の両端に材端モーメントM_{ij}, M_{ji}が加わり、部材の両端に回転角θ_i, θ_jが生じる場合について考える。

部材内部に生じる曲げモーメントを$M(x)$とし、また、材の中間荷重はないものとすると$M(x)$は次式のように一次式で表すことができる。

$$M(x) = a + bx \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

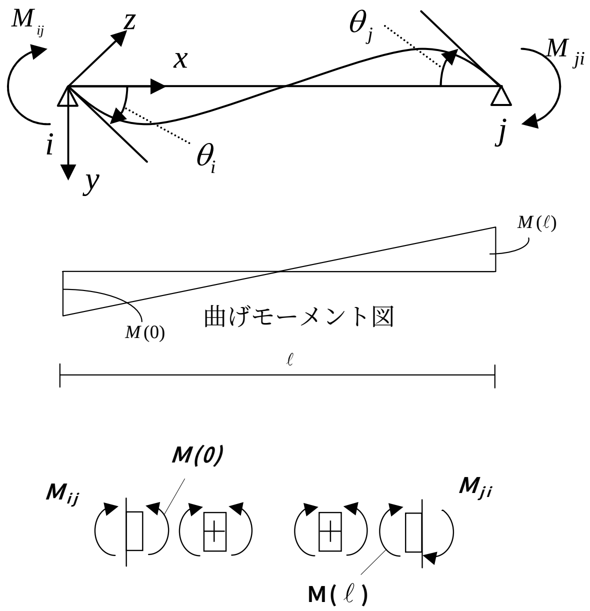

図 1-1 部材の構成と内部の応力

ここで材端に加わる荷重と曲げモーメントの釣合より、

$$\left.\begin{array}{l} M_{ij} - M(0) = 0 \\ M_{ji} + M(\ell) = 0 \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が成り立つ。上式から、未定定数ａ、ｂは

$$\left.\begin{array}{l} M_{ij} - a = 0 \\ M_{ji} + a + b\ell = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a = M_{ij} \\ b = -\dfrac{M_{ij} + M_{ji}}{\ell} \end{array} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

となる。従って、曲げモーメント$M(x)$は

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{\ell}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

として表すことができる。

梁のモーメント分布が決まったところで、次は、梁の微分方程式に代入し、梁のたわみを求めることにしよう。はりの微分方程式は、

$$EI\frac{d\omega^2}{dx^2} = -M(x) = -M_{ij} + \frac{x}{\ell}(M_{ij}+M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで、l は部材の長さ、E はヤング係数、I は断面二次モーメント、$w(x)$ はたわみを表す関数である。はりの微分方程式を解くために、上式を２回積分すると、

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{d\omega}{dx} &= EI\theta(x) = -M_{ij}x + \frac{x^2}{2\ell}(M_{ij}+M_{ji}) + C_1 \\ EI\omega(x) &= -\frac{M_{ij}x^2}{2} + \frac{x^3}{6\ell}(M_{ij}+M_{ji}) + C_1x + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

として、たわみ関数が得られる。

両端の境界条件より積分定数を求める。境界条件は両端の節点に変位がないとしたことより、

$$\omega(0) = 0 \ , \ \omega(\ell) = 0$$

として与えられ、上式を式(1.6)に適用すると、

$$\left.\begin{aligned} EI\omega(0) &= C_2 = 0 \\ EI\omega(\ell) &= -\frac{M_{ij}\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{6}(M_{ij}+M_{ji}) + C_1\ell = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

となり、積分定数 C_1 は、

$$C_1 = \frac{M_{ij}\ell}{2} - \frac{\ell}{6}(M_{ij}+M_{ji}) = \frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

となる。決定した積分定数を式(1.6)に代入すると、たわみ関数が

$$\omega(x) = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6\ell}(M_{ij}+M_{ji}) + \frac{\ell x}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\} \cdots\cdots(1.9)$$

として得られる。また、同じく回転角は

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}x + \frac{x^2}{2\ell}(M_{ij}+M_{ji}) + \frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\} \cdots\cdots(1.10)$$

で与えられる。

次に、両端の回転角が θ_i, θ_j で与えられていることにより、式(1.10)

を用いると、

$$\theta(0) = \theta_i = \frac{1}{EI}\left\{\frac{\ell}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\right\}$$

$$\theta(\ell) = \theta_j = \frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}\ell + \frac{\ell}{2}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{\ell}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\right\}$$

となり、整理すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{6EI}{\ell}\theta_i &= 2M_{ij} - M_{ji} \\ \frac{6EI}{\ell}\theta_j &= 2M_{ji} - M_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

さらに、上式を M_{ij} と M_{ji} について求めると

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j) \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_j + \theta_i) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

となり、材端モーメントと材端回転角の関係が得られる。式(1.12)が、節点変位がない場合のたわみ角法の基本式となる。

1.3 部材角がある場合の基本式

図 1-2 から理解できるように、梁の両端の変位 ω_i と ω_j の大きさが異なると、梁に部材角Rが生じる。この部材角は、幾何学的に次式で表すことができる。

$$R = \frac{\omega_j - \omega_i}{\ell} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

このように梁の両端で変位が生じる場合について考察し、前節で得た材端モーメントと材端回転角の関係を拡張してみよう。

曲げモーメント $M(x)$ の分布は中間荷重がないとしているので、前節の式(1.4)と同様に

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{\ell}(M_{ij} + M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

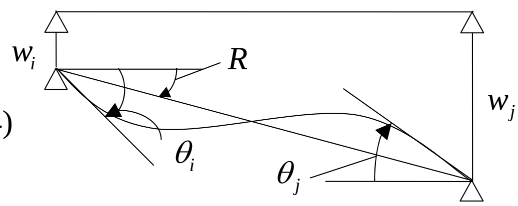

図 1-2 部材角と両端変位の関係

として表わされる。また、たわみω (x) は、式(1.6)より

$$EI\omega(x)=-\frac{M_{ij}}{2}x^2+\frac{x^3}{6\ell}(M_{ij}+M_{ji})+C_1x+C_2 \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

となり、上式にたわみの境界条件を用いて積分定数C_1 , C_2 を決定することになる。境界条件は

$$\omega\ (0)\ =\ \omega_i \qquad \omega\ (\ell)\ =\ \omega_j$$

であることより、

$$\left.\begin{aligned} EI\omega(0) &= C_2 = EI\omega_i \\ EI\omega(\ell) &= -\frac{M_{ij}}{2}\ell^2+\frac{\ell^2}{6}(M_{ij}+M_{ji})+C_1\ell+C_2 = EI\omega_j \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

となる。式(1.13)を参考に上式から C_1を求めると、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{EI}{\ell}\omega_j+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})-\frac{C_2}{\ell} \\ &= EI(\frac{\omega_j-\omega_i}{\ell})+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji}) \\ &= EIR+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.17) \end{aligned}$$

得られた積分定数C_1 , C_2 を式(1.15)に代入し、たわみω (x) を下式のように求める。

$$EI\omega(x)= -\frac{M_{ij}}{2}x^2+\frac{x^3}{6\ell}(M_{ij}+M_{ji})+\left\{EIR+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\}x+EI\omega_i$$

$$\omega(x)= \omega_i+Rx+\frac{1}{EI}\left\{-\frac{M_{ij}}{2}x^2+\frac{x^3}{6\ell}(M_{ij}+M_{ji})+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})x\right\} \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

また、回転角θ (x) は、上式を微分することで、

$$EI\theta(x)= -M_{ij}x+\frac{x^2}{2\ell}(M_{ij}+M_{ji})+\left\{EIR+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\}$$

$$\theta(x)= R+\frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}x+\frac{x^2}{2\ell}(M_{ij}+M_{ji})+\frac{\ell}{6}(2M_{ij}-M_{ji})\right\} \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

となる。

次に上式を用いて、部材両端の回転角 θ_i , θ_j と材端モーメント M_{ij}, M_{ji} の関係を求める。まず、上式に、i 端の座標と j 端の座標を代入

し、境界として与えられる両端の回転角と等しいとおくと、下式が得られる。

$$\theta(0) = \theta_i = R + \frac{\ell}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji}) \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

$$\begin{aligned}\theta(\ell) = \theta_j &= R + \frac{1}{EI}\left\{-M_{ij}\ell + \frac{\ell}{2}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{\ell}{6}(2M_{ij} - M_{ji})\right\} \\ &= R + \frac{\ell}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij}) \qquad \cdots\cdots(1.21)\end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$\left.\begin{aligned}\theta_i &= R + \frac{\ell}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji}) \\ \theta_j &= R + \frac{\ell}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij})\end{aligned}\right\}$$

となり、また、 M_{ij} と M_{ji} について求め直すと

$$\left.\begin{aligned}M_{ij} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j - 3R) \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_j + \theta_i - 3R)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.22)$$

として、たわみ角法の基本式が得られる。

1.4 部材に中間荷重がある場合の基本式

最後に、部材に直接荷重が加わる場合について考えてみよう。まず、図のように部材中間に荷重がある場合は、両端固定として、応力と変形状態を求めることになる。次に両端固定として求めた反力と釣合う、つまり、反力とは逆方向の外力を両端の材端モーメントに加える。これを固定端モーメント、固定端外力と呼ぶ。

この固定端モーメントを左辺に加えると、たわみ角法の釣合式は、以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}M_{ij} + C_{ij} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j - 3R) \\ M_{ji} - C_{ji} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_j + \theta_i - 3R)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.23)$$

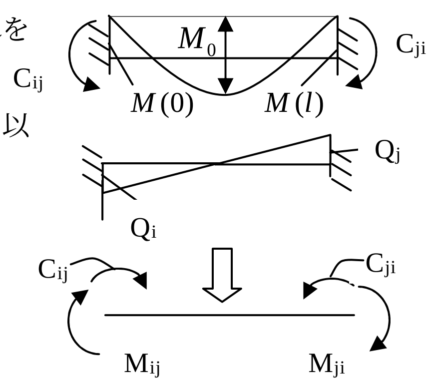

図 1-3 中間荷重がある場合

固定端モーメントを移項して、書き直すと

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{\ell}(2\theta_j + \theta_i - 3R) + C_{ji} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.24)$$

となる。これで、たわみ角法の完全な形の基本式が得られたことになる。

　中間荷重のある場合の梁内部の応力と変形は、当然材端モーメントによって生じる応力と変位に、図1-4 に示される両端固定として求めた応力と変形を加えて得られる。ここで、$\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{ji}$ は、式(1.24)中の固定端モーメントを除いた、変位によって生じる材端モーメントを示す。この両端固定として求めた応力を**基本応力**と呼ぶ。これらの基本的考えの説明と応用は、後節で示すことにする。

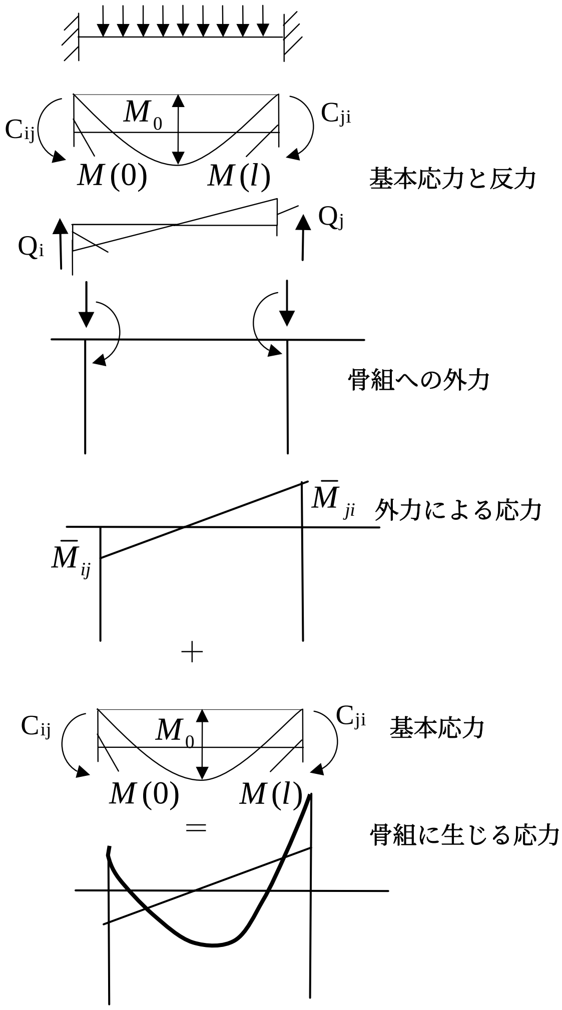

図 1-4 中間荷重が加わる部材の応力

1.5 問題

問題：１　式(1.24)で示されるたわみ角法の基本式を用いて、図に示す一端ピン、一端剛接の部材に関する M_{ji} と θ_j、R との関係を求めよ。

ヒント：一端がピン接合であるため、M_{ij} がゼロとなる。これより、回転角 θ_i, θ_j と部材角 R には従属関係が生じる。この関係から θ_i を導き、この値 θ_i を式(1.24)の M_{ji} 式に代入して、M_{ji} と θ_j、R との関係を求める。