第７章　部材モデル

7.1 はじめに

SPACE（Ver.3.00）では、現在以下に示すような、部材モデルが用意されている。

１．　幾何学的非線形弾性部材
２．　3 次元せん断弾塑性モデル
３．　3 次元トラス型弾塑性モデル
４．　3 次元ケーブル弾塑性モデル
５．　3 次元免震モデル（MSS モデル）
６．　3 次元制振 Maxwell モデル
７．　3 次元弾塑性バネモデル(*)
８．　両端ファイバーモデル
９．　両端、中央ファイバーモデル
１０．　両端アナロジーモデル
１１．　両端、中央アナロジーモデル

本章では、上記の部材モデルの中で内部に節点を有する部材をどのように扱っているかについて述べる。多くの内部節点をそのまま全体釣合式に含めると膨大な未知数を扱わなければならなくなり、大型のスペースフレームの解析が事実上不可能となってしまう。そこで、ここでは、内部節点の未知変数を静的縮合することによって、部材の剛性などを両端の変位で表すことにする。この静的縮合の方法について、現在システムに組み込まれている部材モデルを例にとって解説する。

最初は、静的縮合法により部材の接線剛性の作成法と両端の不釣合い力の求め方を理論的に解析する。さらに、システムの中で接線剛性などをどのように作成しているかについて説明する。

7.2 部材モデルの接線剛性と不釣合力

内部節点を有する部材モデルでは、弾塑性挙動を効果的に実現できるように、両端、及び中央部にファイバー要素やアナロジー要素が配置される。

ここで、内部節点の増分変位ベクトル$\left\{\Delta u_i\right\}$と部材両端の変位ベクトル$\left\{\Delta u_o\right\}$を分けて表し、それに合わせて接線剛性行列も分割して表現する。この部材モデルの釣合式は、以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_o \\ \Delta u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_o \\ f_i \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.1)$$

ここで、$\{f_o\}$は部材両端の不釣合い力であり、$\{f_i\}$は内部節点における不釣合い力である。上式を用いて静的縮合を行い、部材両端における接線剛性行列を得る。上式を変更すると内部節点の増分変位は、

$$\{\Delta u_i\} = [K_{2,2}]^{-1} \left(\{f_i\} - [K_{2,1}]\{\Delta u_o\} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.2)$$

となる。内部節点の増分変位を釣合式(7.1)の上の式に代入することで、両端変位に関する接線剛性行列と不釣合い力が求まる。

$$[K]\{\Delta u_o\} = \{f\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.3)$$

ここで、接線剛性行列$[K]$と両端での不釣合い力$\{f\}$は、

$$\left.\begin{aligned} \{f\} &= \{f_o\} - [K_{2,2}]^{-1}\{f_i\} \\ [K] &= \left[[K_{1,1}] - [K_{1,2}][K_{2,2}]^{-1}[K_{2,1}] \right] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.4)$$

として求められる。

7.3 部材モデルの端部剛域

骨組接合部が他の部分に比較して剛性が著しく高いとき、部材モデルでは、剛域として扱うことができる。ここでは、剛域の処理方法について述べる。

部材の左にある１端に長さ L_1の剛域があるとすると、その剛域をはさんで、両端の増分変位ベクトルを以下のように表す。

$$\left.\begin{aligned} \{\Delta u_{1i}\}^T &= \{\Delta u_{1i}, \Delta v_{1i}, \Delta w_{1i}, \Delta\theta_{x1i}, \Delta\theta_{y1_i}, \Delta\theta_{z1i}\} \\ \{\Delta u_1\}^T &= \{\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1, \Delta\theta_{x1}, \Delta\theta_{y1}, \Delta\theta_{z1}\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.5)$$

ここで、$\{\Delta u_{1i}\}$は、内部節点側の増分変位であり、$\{\Delta u_1\}$は部材節点１側の増分変位である。また、同様に両端の増分節点力ベクトルは、

$$\left.\begin{aligned} \{\Delta f_{1i}\}^T &= \{\Delta N_{1i}, \Delta Q_{y1i}, \Delta Q_{z1i}, \Delta M_{x1i}, \Delta M_{y1_i}, \Delta M_{z1i}\} \\ \{\Delta f_1\}^T &= \{\Delta N_1, \Delta Q_{y1}, \Delta Q_{z1}, \Delta M_{x1}, \Delta M_{y1}, \Delta M_{z1}\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (7.6)$$

この両端の増分変位と増分節点力には、その部材が剛であることから、次のような特殊な関係が存在する。

$$\left.\begin{array}{l}\Delta v_{1i} = \Delta v_1 + L_1\Delta\theta_{z1} \quad ;\Delta w_{1i} = \Delta w_1 - L_1\Delta\theta_{y1} \\ \Delta M_{y1i} = \Delta M_{y1} + L_1\Delta Q_{z1} \quad ;\Delta M_{z1i} = \Delta M_{z1} + L_1\Delta Q_{y1}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7.7)$$

まず、上式を増分変位に関して行列表示すると、

$$\{\Delta u_{1i}\} = [R_{u1}]\{\Delta u_1\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7.8)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_{1i}\\ \Delta v_{1i}\\ \Delta w_{1i}\\ \Delta\theta_{x1i}\\ \Delta\theta_{y1i}\\ \Delta\theta_{z1i}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&L_1\\0&0&1&0&-L_1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta v_1\\ \Delta w_1\\ \Delta\theta_{x1}\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta\theta_{z1}\end{Bmatrix}$$

また、増分節点力間の関係は、

$$\{\Delta f_{1i}\} = [R_{f1}]\{\Delta f_1\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7.9)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta N_{1i}\\ \Delta Q_{y1i}\\ \Delta Q_{z1i}\\ \Delta M_{x1i}\\ \Delta M_{y1i}\\ \Delta M_{z1i}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&L_1&0&1&0\\0&-L_1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta N_1\\ \Delta Q_{y1}\\ \Delta Q_{z1}\\ \Delta M_{x1}\\ \Delta M_{y1}\\ \Delta M_{z1}\end{Bmatrix}$$

となる。

　次に、部材の右にある２端に長さ L_2の剛域があるとすると、その剛域をはさんで、両端の増分変位ベクトルを以下のように表す。

$$\left.\begin{array}{l}\{\Delta u_{2i}\}^T = \{\Delta u_{2i}, \Delta v_{2i}, \Delta w_{2i}, \Delta\theta_{x2i}, \Delta\theta_{y2_i}, \Delta\theta_{z2i}\} \\ \{\Delta u_2\}^T = \{\Delta u_2, \Delta v_2, \Delta w_2, \Delta\theta_{x2}, \Delta\theta_{y_2}, \Delta\theta_{z2}\}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7.10)$$

ここで、$\{\Delta u_{2i}\}$は、内部節点側の増分変位であり、$\{\Delta u_2\}$は部材節点２側の増分変位である。また、同様に両端の増分節点力ベクトルは、次式となる。

$$\left.\begin{aligned}\{\Delta f_{2i}\}^T &= \{\Delta N_{2i}, \Delta Q_{y2i}, \Delta Q_{z2i}, \Delta M_{x2i}, \Delta M_{y2_i}, \Delta M_{z2i}\}\\ \{\Delta f_2\}^T &= \{\Delta N_2, \Delta Q_{y2}, \Delta Q_{z2}, \Delta M_{x2}, \Delta M_{y_2}, \Delta M_{z2}\}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7.11)$$

この両端の増分変位と増分節点力には、その部材が剛であることから、次のような特殊な関係が存在する。

$$\left.\begin{aligned}&\Delta v_{2i} = \Delta v_2 - L_2\Delta\theta_{z2} \quad ; \Delta w_{2i} = \Delta w_2 + L_2\Delta\theta_{y2}\\ &\Delta M_{y2i} = \Delta M_{y2} - L_2\Delta Q_{z2} \quad ; \Delta M_{z2i} = \Delta M_{z2} + L_2\Delta Q_{y2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7.12)$$

まず、上式を増分変位に関して行列表示すると、

$$\{\Delta u_{i2}\} = [R_{u2}]\{\Delta u_2\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7.13)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_{i2}\\ \Delta v_{i2}\\ \Delta w_{i2}\\ \Delta\theta_{x2i}\\ \Delta\theta_{y2i}\\ \Delta\theta_{z2i}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&-L_2\\0&0&1&0&L_2&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta u_2\\ \Delta v_2\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{x2}\\ \Delta\theta_{y2}\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}$$

また、増分節点力間の関係は、

$$\{\Delta f_{2i}\} = [R_{f2}]\{\Delta f_2\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7.14)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta N_{2i}\\ \Delta Q_{y2i}\\ \Delta Q_{z2i}\\ \Delta M_{x2i}\\ \Delta M_{y2i}\\ \Delta M_{z2i}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&-L_2&0&1&0\\0&L_2&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta N_2\\ \Delta Q_{y2}\\ \Delta Q_{z2}\\ \Delta M_{x2}\\ \Delta M_{y2}\\ \Delta M_{z2}\end{Bmatrix}$$

となる。

剛域間の変位及び節点力の変換行列には、次のような関係があり、後でこの関係を利用することになる。読者は、計算して、この関係を確かめられたい。

$$[R_{f1}]^{-1} = [R_{u1}]^T \quad ; [R_{f2}]^{-1} = [R_{u2}]^T \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7.15)$$

部材の両端に長さ L_1 と L_2 を有する部材の剛域内側の節点に関する増分変位と増分節点力の関係が静的縮合を用いて得られている。前節の式

(7.3)を参考にすると、釣合式は、

$$\left[K\right]\left\{\Delta u_{12i}\right\}=\left\{f_{12i}\right\} \quad \cdots\cdots(7.16)$$

となり、ここで、

$$\left\{\Delta u_{12i}\right\}=\left\{\left\{\Delta u_{1i}\right\},\left\{\Delta u_{2i}\right\}\right\} \quad ;\left\{f_{12i}\right\}=\left\{\left\{\Delta f_{1i}\right\},\left\{\Delta f_{2i}\right\}\right\} \quad \cdots\cdots(7.17)$$

また、部材両端の増分変位と増分節点力を、

$$\left\{\Delta u_{12}\right\}=\left\{\left\{\Delta u_{1}\right\},\left\{\Delta u_{2}\right\}\right\} \quad ;\left\{f_{12}\right\}=\left\{\left\{\Delta f_{1}\right\},\left\{\Delta f_{2}\right\}\right\} \quad \cdots\cdots(7.18)$$

とする。式(7.13)、式(7.14)を用いて、釣合式(7.16)を変更すると、

$$\left[K\right]\left[\overline{R}_u\right]\left\{\Delta u_{12}\right\}=\left[\overline{R}_f\right]\left\{f_{12}\right\} \quad \cdots\cdots(7.19)$$

となる。ここで、

$$\left[\overline{R}_u\right]=\begin{bmatrix}\left[R_{u1}\right] & 0\\ 0 & \left[R_{u2}\right]\end{bmatrix} \quad ;\left[\overline{R}_f\right]=\begin{bmatrix}\left[R_{f1}\right] & 0\\ 0 & \left[R_{f2}\right]\end{bmatrix} \quad \cdots(7.20)$$

であり、式(7.19) の左辺から逆行列$\left[\overline{R}_f\right]^{-1}$ を掛けると、

$$\left[\overline{K}\right]\left\{\Delta u_{12}\right\}=\left\{f_{12}\right\} \quad \cdots\cdots(7.21)$$

となる。ここで、

$$\left[\overline{R}_f\right]^{-1}=\begin{bmatrix}\left[R_{f1}^{-1}\right] & 0\\ 0 & \left[R_{f2}^{-1}\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[R_{u1}\right] & 0\\ 0 & \left[R_{u2}\right]\end{bmatrix}^T \quad \cdots\cdots(7.22)$$

となることから、

$$\left[\overline{K}\right]=\left[\overline{R}_u\right]^T\left[K\right]\left[\overline{R}_u\right] \quad \cdots\cdots(7.23)$$

として、部材両端の増分変位で評価された接線剛性行列が得られる。

7.4 部材モデルの剛性評価

この節では、部材モデルの接線剛性等を具体的に求める手法を説明する。接線剛性は、以下の手順で求める。

１．部材モデル内の剛性行列などの動的記憶領域を確保する。

２．部材モデル内の節点拘束表を作成する。

３．剛性行列などのゼロクリアする。

４．ここから内部部材数繰り返す。

　　要素剛性行列を作成する。

幾何学的非線形剛性行列を作成し、重ね合せる。

大変位剛性行列を作成し、重ね合せる。

全体剛性行列に組み込む

５．繰り返し終了

６．式(7.4)を用いて、静的縮合する。その手順を以下のように fortran 言語を用いて、プログラムコードで示す。

```
c――――――――――――――――――――――――――――――
c
c            n          :  部材の内部自由度
c            nx         :  部材の内部自由度の記憶域大きさ
c            nu         :  内部自由度の半バンド幅
c            nux        :  内部自由度の半バンド幅の記憶域大きさ
c
c            c(0:nux,nx):  内部自由度に関する剛性（半バンド行列）
c            ab(nx,12):  材端と内部の相互の剛性
c            vv(12)     :  両端の変位
c            f(nx)      :  内部の節点変位
c            f1(nx)     :  部材内部節点力
c――――――――――――――――――――――――――――――
      call Decom_B( c, n, nux,nu,eps, bav , ier )   ! C 行列の LDU 分解
      do 100 i=1,12
      do j=1,n
      ba(j)=ab(j,i)
      enddo
      call Solv_B( c, n, nux, nu, ba   )        ! 分解された行列より解を求める
      do j=i,12
      sum=0.0
        do k=1,n
        sum=sum+ab(k,j)*ba(k)
      enddo
      ak(j,i)=ak(j,i)-sum
      ak(i,j)=ak(j,i)
      enddo
      100 continue
c――――――――――――――――――――――――――――――
```

７．両端の剛域処理を行い、部材モデルの接線剛性行列を得る。

８．動的記憶領域を解放する。

7.5 部材モデルの弾塑性チェック

この節では、部材モデルの弾塑性チェックを具体的に行う手法を説明する。

弾塑性チェックは、以下の手順で行う。ただし、部材モデル内の剛性は、記憶領域に蓄積していないため、毎回作り直す必要がある。

１．部材モデル内の剛性行列などの動的記憶領域を確保する。

２．部材モデル内の節点拘束表を作成する。

３．剛性行列などをゼロクリアする。

４．ここから内部部材数繰り返す。

要素剛性行列を作成する。

幾何剛性行列を作成し、重ね合せる。

大変位剛性行列を作成し、重ね合せる。

全体剛性行列に組み込む

５．繰り返し終了

６．式(7.4)を用いて、静的縮合する。

７．部材内部変位の計算(c 行列の分解計算)を fortran 言語を用いて、プログラムコードで示す。

```
c――――――――――――――――――――――――――――――
c                    n          :  部材の内部自由度
c                    nx         :  部材の内部自由度の記憶域大きさ
c                    nu         :  内部自由度の半バンド幅
c                    nux        :  内部自由度の半バンド幅の記憶域大きさ
c
c                    c(0:nux,nx):  内部自由度に関する剛性（半バンド行列）
c                    ab(nx,12):  材端と内部の相互の剛性
c                    vv(12)    :  両端の変位
c                    f(nx)     :  内部の節点変位
c                    f1(nx)    :  部材内部節点力
c――――――――――――――――――――――――――――――
             call Decom_B( c, n, nux,nu,eps, bav , ier )! C 行列の LDU 分解
c――――――――――――――――――――――――――――――★f1 - ab*v
             do j=1,n
             sum=0.
             do k=1,12
             sum=sum+ab(j,k)*vv(k)
             enddo
             bav(j)=-sum + f1(j)
             enddo
c――――――――――――――――――――――――――――――★c*bav = f1 - ab*v　を解く
             call Solv_B( c, n, nux, nu, bav   )       ! bav()は内部節点変位
c――――――――――――――――――――――――――――――
```

８．部材内部、両端節点力の計算

９．部材両端節点力への縮合

１０．部材節点力の両端剛域処理

１１．部材の弾塑性チェック、ここから内部部材数繰り返す。

部材内部における要素両端変位の取りだし

ファイバー弾塑性チェック

弾性部材の軸力計算（幾何剛性作成用）

１２．繰り返し終了

１３．動的記憶領域を解放する。