第９章　剛床仮定

9.1 はじめに

SPACE（Ver.3.00）では、立体骨組の静的解析や動的解析を行っている。その際、通常の立体骨組構造では、床の扱いをどのようにするかが問題となる。以前のバージョンでは、床をブレースに置換して解析を行っていた。ここでは、立体骨組構造で良く用いられる剛床仮定を理論的に検討する。剛床の変換行列は、局所座標変換とは異なり、軸力と曲げモーメントが連成するため、現在使用している座標変換方法では対応できず、そのため釣合座標系を得るためには、全ての座標変換を変更する必要があり、多くのサブルーチンに影響を及ぼす。これらについては、マニュアル動的解析編で詳細に述べるので、そちらを参照されたい。

9.2 剛床モデル

立体骨組の中で、床の剛性が他の部分に比較して著しく硬いとき、この床を剛床として扱うことができる。本章では、剛床モデルの理論的な処理手法について述べる。

ここでは、床は水平レベルにあるものとする。また、この床は剛であり、そのため、その床内にある代表点で床内の任意の節点の床面内の変位を表すことができるものとする。ただし、面外の変位に対しては、床内の節点は独自に挙動するものとする。これらの仮定を用いて以下の解析を行う。

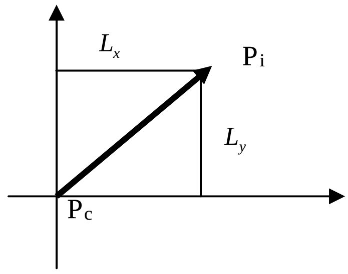
まず、代表節点と剛床内の他節点との関係を検討する。剛床モデルとして、代表節点と他の節点が長さ L の剛部材で連結しているとする。ここで、部材の代表節点側を c 端、他の節点を i 端とし、この剛部材の x 方向長さを L_x、y 方向長さを L_y とする。その剛部材をはさんで、全体座標系で表された両端の増分変位ベクトルを以下のように表す。

$$\left.\begin{aligned} \{\Delta u_i\}^T &= \{\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta\theta_{xi}, \Delta\theta_{yi}, \Delta\theta_{zi}\} \\ \{\Delta u_c\}^T &= \{\Delta u_c, \Delta v_c, \Delta w_c, \Delta\theta_{xc}, \Delta\theta_{yc}, \Delta\theta_{zc}\} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9.1)$$

ここで、$\{\Delta u_i\}$ は、任意節点側の増分変位であり、$\{\Delta u_c\}$ は代表節点 c 側の増分変位である。また、同様に、全体座標系で表された両端の増分節点力ベクトルを次式で示す。

$$\left.\begin{aligned} \{\Delta f_i\}^T &= \{\Delta N_i, \Delta Q_{yi}, \Delta Q_{zi}, \Delta M_{xi}, \Delta M_{yi}, \Delta M_{zi}\} \\ \{\Delta f_c\}^T &= \{\Delta N_c, \Delta Q_{yc}, \Delta Q_{zc}, \Delta M_{xc}, \Delta M_{yc}, \Delta M_{zc}\} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9.2)$$

剛床上の節点変位は、その床上の代表節点の変位で表すことになる。剛床上の他の節点変位は、この代表点における 2 方向の変位と z 軸回りの回転による x 方向と y 方向の変位を用いて、次のように考慮する。



$$\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_y \\ 0 & 1 & L_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta v_c \\ \Delta\theta_{zc} \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta u_i\} = [R_u]\{\Delta u_c\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.3)$$

ここで、両者共に全体座標系で表された変位とする。また、**上式の変位変換式では、z 軸の回転に関する幾何学的非線形性を考慮していない。そのため、幾何学的非線形解析とこの剛床を同時に考慮する場合は、注意が必要である。例えば、両端剛床上にある部材には、剛床面外の変位によって軸力が生じ、節点での力の釣合が取れていないことになる。**

次に、節点変位と同様に、節点力間の関係を以下に示す。

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{xi} \\ \Delta P_{yi} \\ \Delta M_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ L_y & -L_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta P_{xc} \\ \Delta P_{yc} \\ \Delta M_{zc} \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P_i\} = [R_f]\{\Delta P_c\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.4)$$

ここでも、両者の節点力は全体座標系で表されているものとする。式(9.3)と(9.4)における 2 つの変換行列には、次のような関係がある。

$$[R_u][R_f]^T = [I]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_y \\ 0 & 1 & L_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_y \\ 0 & 1 & -L_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.5)$$

したがって、

$$[R_u]^{-1} = [R_f]^T; \quad [R_f]^{-1} = [R_u]^T \qquad \cdots\cdots\cdots(9.6)$$

という特異な関係が存在し、後でこれを利用することになる。

剛床の変換行列を用いて、剛性行列を全体座標系から釣合座標系に変換してみよう。ただし、**ここでは、局所座標系は使用しないものとする。**つまり、剛床上の節点は局所座標系を使用できないことを意味する。次式は、全体座標系で表された釣合式である。

$$\{\Delta P_i\} = [k]\{\Delta u_i\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.7)$$

式(9.3)と(9.4)を利用して、上式を釣合座標系に変換する。

$$\left[\bar{R}_f\right]\{\Delta P_c\}=[k]\left[\bar{R}_u\right]\{\Delta u_c\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.8)$$

さらに上式の左より、$\left[\bar{R}_f\right]^{-1}$を掛け、式(9.6)を用いると、

$$\{\Delta P_c\}=\left[\bar{R}_u\right]^T[k]\left[\bar{R}_u\right]\{\Delta u_c\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.9)$$

となり、釣合座標系における剛性行列を次のように定義すると釣合座標系における釣合式が得られる。

剛性行列の変換式

$$\begin{aligned}\left[\bar{k}\right]&=\left[\bar{R}_u\right]^T[k]\left[\bar{R}_u\right]\\ \left[\bar{R}_u\right]&=\begin{bmatrix}R_u & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.10)$$

上式の返還式は、ｉ端は剛床位置にあり、ｊ端は、一般の節点としている。両者共に剛床位置である場合は、式(9.10)中の単位行列の替わりに剛床変換行列を用いることになる。ここで、$[R_u]$は以下のようである。

$$[R_u]=\begin{bmatrix}1 & & & & & -L_y\\ & 1 & & & & L_x\\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.11)$$

上式のL_xとL_yは、剛床代表点から当該節点までの x 方向、y 方向の長さを表す。

質量行列も、剛性行列と同様に全体座標系から釣合座標系に変換可能である。ここでも局所座標系は使用しないものとする。釣合座標系で表される質量行列は、次式で表される。

質量行列の変換式

$$\begin{aligned}[\bar{m}]&=\left[\bar{R}_u\right]^T[m]\left[\bar{R}_u\right]\\ \left[\bar{R}_u\right]&=\begin{bmatrix}R_u & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.12)$$

次に、右辺項ベクトルを釣合座標系に変換しよう。静的釣合式の右辺項は、全体座標系の節点荷重であり、節点ごとに釣合座標系に変換する必要がある。また、動的解析の右辺項は、ニューマークβ法を適用すると次式となる。

右辺項の変換式

$$\{f\} = \{G\} + \{g\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.13)$$

$$\{G(y_{n+1}, \Delta y_{n+1})\} = -\{\bar{f}_d\} - [K_T(y_n)]\{\Delta y_{n+1}\} + [K]\{y_{n+1}\} \cdots\cdots\cdots(9.14)$$

$$\{g\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}]\{a\} - [K]\{\bar{b}\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.15)$$

式(9.13)で示されるように、加速度は釣合座標系であることから、式(9.14)の線形剛性行列と接線剛性行列は釣合座標系に変換しておくことが必要である。次に、式(9.15)の第 1 と 2 項は、各節点において全体座標系で求めた後、釣合座標系に変換する。ここでの質量行列は、全体座標系である必要がある。

第 3 項は、部材座標系の節点力から釣合座標系の節点力ベクトルに変換する。第 4 と 5 項は、$\{a\}$ と $\{b\}$ は釣合座標系で求められているため、減衰行列 $[C]$ と接線剛性行列 $[K_T]$ は、釣合座標系で求めておく必要がある。このように動的解析では、剛床の座標変換式が他の座標変換と異なるため、多くの部分で独自の変換用のルーチンを組み込むことになる。

9.3 座標変換式

上記の剛床に関する座標変換式を整理し、実際に変換する方法について考えよう。まず、全体座標系で求められた剛性や質量行列を釣合座標系に変換することにする。剛性行列の変換式は、

$$\begin{aligned}
[\bar{k}] &= [\bar{R}_u]^T [k][\bar{R}_u] \\
&= \begin{bmatrix} I & & & \\ L_1^T & I & & \\ & & I & \\ & & L_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & L_1 & & \\ & I & & \\ & & I & L_2 \\ & & & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & & & \\ L_1^T & I & & \\ & & I & \\ & & L_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{11}L_1 + k_{12} & k_{13} & k_{13}L_2 + k_{14} \\ k_{21} & k_{21}L_1 + k_{22} & k_{23} & k_{23}L_2 + k_{24} \\ k_{31} & k_{31}L_1 + k_{32} & k_{33} & k_{33}L_2 + k_{34} \\ k_{41} & k_{41}L_1 + k_{42} & k_{43} & k_{43}L_2 + k_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{11}L_1 + k_{12} & k_{13} & k_{13}L_2 + k_{14} \\ L_1^T k_{11} + k_{21} & L_1^T k_{11} L_1 + L_1^T k_{12} + k_{21}L_1 + k_{22} & L_1^T k_{13} + k_{23} & L_1^T k_{13} L_2 + L_1^T k_{14} + k_{23}L_2 + k_{24} \\ k_{31} & k_{31}L_1 + k_{32} & k_{33} & k_{33}L_2 + k_{34} \\ L_2^T k_{31} + k_{41} & L_2^T k_{31} L_1 + L_2^T k_{32} + k_{41}L_1 + k_{42} & L_2^T k_{33} + k_{43} & L_2^T k_{33} L_2 + L_2^T k_{34} + k_{43}L_2 + k_{44} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots(9.16)$$

ただし、

$$[L_1]=\begin{bmatrix}0&0&-L_{1y}\\0&0&L_{1x}\\0&0&0\end{bmatrix}\quad[L_2]=\begin{bmatrix}0&0&-L_{2y}\\0&0&L_{2x}\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots\cdots(9.17)$$

であり、得られた剛性行列は対称行列となる。例えば部分行列(2,1)の転置行列は、

$$\left[k_{11}L_1+k_{12}\right]^T=\left[L_1^T k_{11}^T+k_{12}^T\right]\qquad\cdots\cdots\cdots(9.18)$$

となり、また、変換前の行列も対称行列であることより、次式となる。

$$\left[L_1^T k_{11}^T+k_{12}^T\right]=\left[L_1^T k_{11}+k_{21}\right]$$

また、部分行列(2,2)の転置行列を取ってみると、

$$\begin{aligned}&\left[L_1^T k_{11}L_1+L_1^T k_{12}+k_{21}L_1+k_{22}\right]^T=\left[L_1^T k_{11}^T L_1+k_{12}^T L_1+L_1^T k_{21}^T+k_{22}^T\right]\\&=\left[L_1^T k_{11}L_1+k_{21}L_1+L_1^T k_{12}+k_{22}\right]\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(9.19)$$

となり、これも対称行列となっている。

実際に、変換行列の内容を計算してみよう。まず、内部で使用する変換を先に求めておく。最初に、

$$[k_{L1}]=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-L_{1y}\\0&0&L_{1x}\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-k_{11}L_{1y}+k_{12}L_{1x}\\0&0&-k_{21}L_{1y}+k_{22}L_{1x}\\0&0&-k_{31}L_{1y}+k_{32}L_{1x}\end{bmatrix}\quad\cdots(9.20)$$

次に、

$$[k_{L2}]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-L_{1y}&L_{1x}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{11}L_{1y}+k_{21}L_{1x}&-k_{12}L_{1y}+k_{22}L_{1x}&-k_{13}L_{1y}+k_{32}L_{1x}\end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots(9.21)$$

最後は、

$$\begin{aligned}[k_{L3}]&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-L_{1y}&L_{1x}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-L_{1y}\\0&0&L_{1x}\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{11}L_{1y}+k_{21}L_{1x}&-k_{12}L_{1y}+k_{22}L_{1x}&-k_{13}L_{1y}+k_{32}L_{1x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-L_{1y}\\0&0&L_{1x}\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&L_{1y}k_{11}L_{1y}-L_{1y}k_{21}L_{1x}-L_{1x}k_{12}L_{1y}+L_{1x}k_{22}L_{1x}\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(9.22)$$

として与えられる。これで、剛性及び質量行列の変換は実行できることになる。

次に、釣合座標系から全体座標系に、節点変位を変換する変換式を求めてみよう。剛床による変換式は、式(9.3)より

$$\{u\}=[R_u]\{u_c\}$$

$$[R_u]=\begin{bmatrix}1 & & & & & -L_y\\ & 1 & & & & L_x\\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(9.23)$$

であり、次式の変換を行えば良いことになる。

$$\left.\begin{aligned}u_i&=u_c-L_y\theta_{zc}\\ v_i&=v_c+L_x\theta_{zc}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9.24)$$

次に、上式の逆変換を求めてみよう。式(9.23)の両辺に $[R_u]$ の逆行列を掛け、式(9.6)を利用すると、

$$[R_u]^{-1}\{u_i\}=[R_u]^{-1}[R_u]\{u_c\}=\{u_c\}$$

$$\{u_c\}=[R_u]^{-1}\{u_i\}=[R_f]^T\{u_i\} \cdots\cdots\cdots(9.25)$$

となり、次式の変換を行えば良いことになる。

$$\left.\begin{aligned}u_c&=u_i+L_y\theta_{zi}\\ v_c&=v_i-L_x\theta_{zi}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9.26)$$

最後に、全体座標系で得られた節点力を釣合座標系に変換する。式(9.4)より、釣合座標系から全体座標系に変換された節点力は

$$\begin{Bmatrix}P_{xi}\\ P_{yi}\\ M_{zi}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ L_y & -L_x & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_{xc}\\ P_{yc}\\ M_{zc}\end{Bmatrix}$$

$$\{P_i\}=[R_f]\{P_c\} \cdots\cdots\cdots(9.27)$$

となり、さらに、両辺の左より、$[R_f]$ の逆行列を掛けると、

$$[R_f]^{-1}\{P_i\}=[R_f]^{-1}[R_f]\{P_c\}=\{P_c\} \cdots\cdots\cdots(9.28)$$

ここで、式(9.6)より、

$$\left[R_f\right]^{-1}=\left[R_u\right]^T$$

であることから、

$$\left\{P_c\right\}=\left[R_u\right]^T\left\{P_i\right\}$$

$$\left[R_u\right]^T=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ -L_y & L_x & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(9.29)$$

となる。上式より、変換を書き下すと次の変換を行えば良いことになる。

$$M_{cz}=M_{zi}-L_yP_{xi}+L_xP_{yi} \quad \cdots\cdots\cdots(9.30)$$

また、逆変換は、式(9.27)より、

$$M_{zi}=M_{zc}+L_yP_{xc}-L_xP_{yc} \quad \cdots\cdots\cdots(9.31)$$

で与えられる。

9.4 剛性行列の剛床による変換

本節では、座標変換後の剛性行列を具体的に求める。変換前の行列は全体座標系で与えられているものとし、釣合座標系に変換する式は、既に、途中まで式(9.16)で与えられている。ここで再度示すと、変換後の行列は

$$\left[\bar{k}\right]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{11}L_1+k_{12} & k_{13} & k_{13}L_2+k_{14} \\ L_1^Tk_{11}+k_{21} & L_1^Tk_{11}L_1+L_1^Tk_{12}+k_{21}L_1+k_{22} & L_1^Tk_{13}+k_{23} & L_1^Tk_{13}L_2+L_1^Tk_{14}+k_{23}L_2+k_{24} \\ k_{31} & k_{31}L_1+k_{32} & k_{33} & k_{33}L_2+k_{34} \\ L_2^Tk_{31}+k_{41} & L_2^Tk_{31}L_1+L_2^Tk_{32}+k_{41}L_1+k_{42} & L_2^Tk_{33}+k_{43} & L_2^Tk_{33}L_2+L_2^Tk_{34}+k_{43}L_2+k_{44} \end{bmatrix}$$

であり、当然対称行列となっている。式(9.21)、(9.22)、(9.23)を考慮すると、変換後の各部分剛性行列は次式のように求められる。

$$\left[\bar{k}_{12}\right]=\left[k_{12}\right]+\left[k_{L1}\right]=\begin{bmatrix} k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6}+k_{1,1}L_{1y}+k_{1,2}L_{1x} \\ k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6}+k_{2,1}L_{1y}+k_{2,2}L_{1x} \\ k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6}+k_{3,1}L_{1y}+k_{3,2}L_{1x} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(9.32)$$

$$
\left[\bar{k}_{14}\right]=\left[k_{14}\right]+\left[k_{L1}\right]=\begin{bmatrix} k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12}+k_{1,7}L_{1y}+k_{1,8}L_{1x} \\ k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12}+k_{2.7}L_{1y}+k_{2,8}L_{1x} \\ k_{3,10} & k_{3.11} & k_{3,12}+k_{3.7}L_{1y}+k_{3.8}L_{1x} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.33)
$$

次に、$\left[\bar{k}_{22}\right]$ と $\left[\bar{k}_{24}\right]$ は、

$$
\left[\bar{k}_{22}\right]=\left[k_{22}\right]+\left[k_{L1}\right]+\left[k_{L2}\right]+\left[k_{L3}\right]
$$

$$
=\begin{bmatrix} k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6}+k_{4,1}L_{1y}+k_{6,1}L_{1x} \\ k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6}+k_{5,1}L_{1y}+k_{6,2}L_{1x} \\ k_{6,4}+k_{1,4}L_{1y}+k_{2,4}L_{1x} & k_{6,5}+k_{1,5}L_{1y}+k_{2,5}L_{1x} & \begin{array}{l} k_{6,6}+k_{6,1}L_{1y}+k_{6,2}L_{1x}+k_{1,6}L_{1y}+k_{2.6}L_{1x} \\ +L_{1y}^2k_{11}+2L_{1y}L_{1x}k_{12}+L_{1x}^2k_{22} \end{array} \end{bmatrix}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots(9.34)
$$

$$
\left[\bar{k}_{24}\right]=\left[k_{24}\right]+\left[k_{L1}\right]+\left[k_{L2}\right]+\left[k_{L3}\right]
$$

$$
=\begin{bmatrix} k_{4,10} & k_{4,11} & k_{4,12}+k_{4,7}L_{2y}+k_{4,8}L_{2x} \\ k_{5,10} & k_{5,11} & k_{5,12}+k_{5,7}L_{2y}+k_{5,8}L_{2x} \\ k_{6,10}+k_{1,7}L_{1y}+k_{2,7}L_{1x} & k_{6.11}+k_{2,7}L_{1y}+k_{2,8}L_{1x} & \begin{array}{l} k_{6,12}+k_{6,7}L_{2y}+k_{6,8}L_{2x}+k_{3,7}L_{1y}+k_{3,8}L_{1x} \\ +L_{1y}k_{1,7}L_{2y}+L_{1y}k_{2,7}L_{2x}+L_{1x}k_{1,8}L_{2y}+L_{1x}k_{2,8}L_{2x} \end{array} \end{bmatrix}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots(9.35)
$$

最終的に、変換後の剛性は次式となる。

$$
\left[\bar{k}\right]=\left[k\right]+\left[k_L\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(9.36)
$$

ここで、$[k]$ は変換前の剛性行列であり、$[k_L]$ は

$$
\left[k_L\right]=\begin{bmatrix}
0 & & & & & k_{1,1}L_{1y}+k_{1,2}L_{1x} & & & & & & k_{1,7}L_{2y}+k_{1,8}L_{2x} \\
 & 0 & & & & k_{2,1}L_{1y}+k_{2,2}L_{1x} & & & & & & k_{2,7}L_{2y}+k_{2,8}L_{2x} \\
 & & 0 & & & k_{3,1}L_{1y}+k_{3,2}L_{1x} & & & & & & k_{3,7}L_{2y}+k_{3,8}L_{2x} \\
 & & & 0 & & k_{4,1}L_{1y}+k_{4,2}L_{1x} & & & & & & k_{4,7}L_{2y}+k_{4,8}L_{2x} \\
 & & & & 0 & k_{5,1}L_{1y}+k_{5,2}L_{1x} & & & & & & k_{5,7}L_{2y}+k_{5,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{6,1}L_{1y}+k_{6,2}L_{1x} & & & & & & k_{6,7}L_{2y}+k_{6,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{7,1}L_{1y}+k_{7,2}L_{1x} & 0 & & & & & k_{7,7}L_{2y}+k_{7,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{8,1}L_{1y}+k_{8,2}L_{1x} & & 0 & & & & k_{8,7}L_{2y}+k_{8,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{9,1}L_{1y}+k_{9,2}L_{1x} & & & 0 & & & k_{9,7}L_{2y}+k_{9,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{10,1}L_{1y}+k_{10,2}L_{1x} & & & & 0 & & k_{10,7}L_{2y}+k_{10,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{11,1}L_{1y}+k_{11,2}L_{1x} & & & & & 0 & k_{11,7}L_{2y}+k_{11,8}L_{2x} \\
 & & & & & k_{12,1}L_{1y}+k_{12,2}L_{1x} & & & & & & k_{12,7}L_{2y}+k_{12,8}L_{2x}
\end{bmatrix}+
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 &&&&&&&&&&& \\
& 0 &&&&&&&&&& \\
&& 0 &&&&&&&&& \\
&&& 0 &&&&&&&& \\
&&&& 0 &&&&&&& \\
\begin{matrix}k_{1,1}L_{1y}\\+k_{2,1}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,2}L_{1y}\\+k_{2,2}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,3}L_{1y}\\+k_{2,3}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,4}L_{1y}\\+k_{2,4}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,5}L_{1y}\\+k_{2,5}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,6}L_{1y}\\+k_{2,6}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,7}L_{1y}\\+k_{2,7}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,8}L_{1y}\\+k_{2,8}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,9}L_{1y}\\+k_{2,9}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,10}L_{1y}\\+k_{2,10}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,11}L_{1y}\\+k_{2,11}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{1,12}L_{1y}\\+k_{2,12}L_{1x}\end{matrix} \\
&&&&&& 0 &&&&& \\
&&&&&&& 0 &&&& \\
&&&&&&&& 0 &&& \\
&&&&&&&&& 0 && \\
&&&&&&&&&& 0 & \\
\begin{matrix}k_{7,1}L_{2y}\\+k_{8,1}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,2}L_{2y}\\+k_{8,2}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,3}L_{2y}\\+k_{8,3}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,4}L_{2y}\\+k_{8,4}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,5}L_{2y}\\+k_{8,5}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,6}L_{1y}+\\k_{8,6}L_{1x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,7}L_{2y}\\+k_{8,7}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,8}L_{2y}\\+k_{8,8}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,9}L_{2y}\\+k_{8,9}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,10}L_{2y}\\+k_{8,10}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,11}L_{2y}\\+k_{8,11}L_{2x}\end{matrix} & \begin{matrix}k_{7,12}L_{2y}\\+k_{8,12}L_{2x}\end{matrix}
\end{bmatrix}
+
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 &&&&& 0 &&&&&& 0 \\
& 0 &&&& 0 &&&&&& 0 \\
&& 0 &&& 0 &&&&&& 0 \\
&&& 0 && 0 &&&&&& 0 \\
&&&& 0 & 0 &&&&&& 0 \\
&&&&& L_{1y}^2k_{1,1}+2L_{1y}k_{1,2}L_{1x}+L_{1x}^2k_{2,2} &&&&&& L_{1y}k_{1,7}L_{2y}+L_{1y}k_{2,7}L_{2x}+L_{1x}k_{1,8}L_{2y}+L_{1x}k_{2,8}L_{2x} \\
&&&&& 0 & 0 &&&&& 0 \\
&&&&& 0 && 0 &&&& 0 \\
&&&&& 0 &&& 0 &&& 0 \\
&&&&& 0 &&&& 0 && 0 \\
&&&&& 0 &&&&& 0 & 0 \\
&&&&& L_{2y}k_{7,1}L_{1y}+L_{2y}k_{8,1}L_{1x}+L_{2x}k_{7,2}L_{1y}+L_{2x}k_{8,2}L_{1x} &&&&&& L_{2y}^2k_{7,7}+2L_{2y}k_{7,8}L_{2x}+L_{2x}^2k_{8,8}
\end{bmatrix}
$$

………(9.37)

で与えられる。

9.5 集中質量行列の剛床による変換

質量行列の変換は、一般的には、剛性行列と同じで良い。ただし、集中質量系では、全体座標系における質量行列が対角行列であり、しかも、回転慣性項を無視している。ここで、この特殊な行列に対する剛床変換を検討しよう。

式(9.16)を参考にすると、変換後の質量行列は次式となる。

$$
[\overline{m}] = \begin{bmatrix} m_1 & m_1L_1 \\ L_1^Tm_1 & L_1^Tm_1L_1 \end{bmatrix}
$$
………(9.38)

実際に、$m_{11}L_1$ と $L_1^Tm_{11}L_1$ を計算する。

$$
\left[m_{L1}\right]=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_{1y} \\ 0 & 0 & L_{1x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{11}L_{1y} \\ 0 & 0 & m_{22}L_{1x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[m_{L2}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -L_{1y} & L_{1x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_{y} \\ 0 & 0 & L_{x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_y m_{11} L_y + L_x m_{22} L_x \end{bmatrix}
$$

最終的に、変換後の質量行列は以下のように与えられる。

$$
\left[\bar{m}\right]=\begin{bmatrix} m_{11} & & & & & -m_{11}L_y \\ & m_{22} & & & & m_{22}L_x \\ & & m_{33} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ -m_{11}L_y & m_{22}L_x & & & & L_y m_{11} L_y + L_x m_{22} L_x \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(9.39)
$$

9.6 剛床仮定の使用上の注意

以上で、剛床処理に関する理論的な説明は終え、本節では、使用上の注意について述べる。SPACE における剛床仮定は、２，３の仮定の元に設計されている。

剛床の回転項は、微小であるとして線形変換を用いて計算されている。したがって、大きな回転量がある場合は誤差が生じる。また、幾何学的非線形解析を行う場合、法線方向の変位によって軸力が生じ、剛床上の節点では力の釣り合いが取れなくなる。その結果、プレゼンターなど、荷重や反力を表示すると、荷重が加わっていないところに荷重ベクトルが表示される。これは、剛床上の全節点で力の釣合を取る替わりに、代表点で力の釣り合いを取るためである。

荷重や反力の表示で、上記の荷重ベクトル表示の他に注意しなければならない点は、剛床の境界部分で荷重ベクトルが表示されることである。この現象は、線形解析においても現れ、幾何学的非線形によるものではない。これは、剛床上の部材に軸力が生じないために現れるもので、剛床に生じる反力となっている。したがって、剛床上の全ての反力は自己釣合となっている。

これらの注意点を良く理解して、剛床仮定を使用されたい。