第５章　ファイバーモデル

5.1 はじめに

ファイバーモデルは、部材断面を細かく分割し、平面保持とその分割された小さな断面の応力度－ひずみ度関係を簡単な 1 軸状態で仮定することで、部材全体の弾塑性挙動を模擬しようとするものである。ここでは、1 軸応力状態で表す小さな断面をファイバーと呼び、このファイバーで構成される部材をファイバーモデルと呼ぶ。本章では、このファイバーモデルの増分ひずみ及び増分応力を求め、線形及び非線形の剛性行列を求める。

5.2 ファイバーモデルの仮定

SPACE で用いているファイバーモデルは、以下の仮定に基づいて求められる。

1）部材の変形は、断面の図芯位置で表す。
2）断面内のひずみは平面保持の仮定を用い、せん断変形は無視する。
3）ファイバーの 1 軸応力度－ひずみ度関係は、各ファイバー独自に設定してよい。
4）隣接するファイバー間の力の釣合は満足していない。
5）部材間の力の釣合は、合応力で行い、接する位置における断面内部の応力の釣合はとれていない。
6）部材間の変形の適合は、図心位置での変位を用いる。

特に、本システムでは、処理スピードなどを考慮して以下の仮定を設けている。

7) ファイバー応力の評価とファイバーのヤング係数の設定は部材中央位置で行う。

5.3 ファイバー内の増分ひずみ

断面内の図芯より測った点(y,,z)に中心位置が存在する任意のファイバーの増分軸方向ひずみは、式(4.10)より

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N - y\frac{d^2 v}{dx^2} - z\frac{d^2 w}{dx^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(5.1)$$

で与えられる。部材内の増分軸方向ひずみは、次式で示すように、軸方向、法線方向共に 1 次式で仮定する。この仮定はファイバーモデルの部材長さが非常に短いことによるものである。

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \alpha_0 + \alpha_1 x \\ \Delta v &= \beta_0 + \beta_1 x \\ \Delta w &= \gamma_0 + \gamma_1 x\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

軸方向の増分変位および一階微分は、上式をまとめると

$$\Delta u = \{1 \quad x\}\begin{Bmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta u}{dx} = \{0 \quad 1\}\begin{Bmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

となる。両端の増分変位を考慮すると、

$$\Delta u = H_u A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta u_1 \\ \Delta u_2\end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta u}{dx} = B_u A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta u_1 \\ \Delta u_2\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

で与えられる。ここで、$H_u = \{1 \quad x\}$, $B_u = \{0 \quad 1\}$ であり、また、

$$A_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}$$

である。従って、線形の軸方向増分ひずみ $\Delta\varepsilon_L$ は、式(4.13)より

$$\Delta\varepsilon_L = \frac{d\Delta u}{dx} = \{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta u_1 \\ \Delta u_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell}\left(\Delta u_2 - \Delta u_1\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(5.5)$$

で与えられる。ここで、l はファイバー部材の長さを表す。また、非線形軸方向増分ひずみ $\Delta\varepsilon_N$ は、式(4.17)と(4.18)を参照すると、

$$\Delta\varepsilon_N = \Delta_1\varepsilon_N + \Delta_2\varepsilon_N = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\} + \frac{d\overline{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\overline{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.6)$$

となる。上記の非線形増分ひずみを具体的に求めるために、最初、各変位の微分を求めることにする。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Delta v}{dx} &= \left\{-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\Delta v_1 \\ \Delta v_2\end{Bmatrix} \\ \frac{d\overline{v}}{dx} &= \left\{-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\overline{v}_1 \\ \overline{v}_2\end{Bmatrix} \\ \frac{d\Delta w}{dx} &= \left\{-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\Delta w_1 \\ \Delta w_2\end{Bmatrix} \\ \frac{d\overline{w}}{dx} &= \left\{-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\overline{w}_1 \\ \overline{w}_2\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5.7)$$

上式より、非線形ひずみ $\Delta_1\varepsilon_N$ は、

$$\Delta_1\varepsilon_N = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell}\\ \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell}\\ \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell^2}\begin{Bmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix} + \frac{1}{\ell^2}\begin{Bmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{\ell}\right)^2\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(5.8)$$

で与えられる。また、$\Delta_2\varepsilon_N$ は、

$$\Delta_2\varepsilon_N = \frac{d\overline{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\overline{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx}$$

$$= \begin{Bmatrix}\overline{v}_1 & \overline{v}_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell}\\ \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\overline{w}_1 & \overline{w}_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell}\\ \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{\ell}\right)\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{\ell}\right) + \left(\frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\ell}\right)\left(\frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{\ell}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(5.9)$$

となる。ただし、$\overline{v}$, $\overline{w}$ は増分前の法線方向変位であり、これも 1 次式で仮定している。また、$(\overline{v}_1 , \overline{w}_1)$、$(\overline{v}_2 , \overline{w}_2)$ は 1、2 節点での増分前の法線方向変位を表す。以上をまとめるとファイバー内の軸方向ひずみは一定となり、次式で与えられる。

$$\Delta\varepsilon_x = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N$$

$$= \frac{1}{\ell}(\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$+ \left(\frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{\ell}\right)\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{\ell}\right) + \left(\frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\ell}\right)\left(\frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{\ell}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(5.10)$$

次に, 部材の増分曲げひずみを求めることにする。増分曲げひずみは、

$$\Delta\kappa = -y\frac{d^2\Delta v}{dx^2} - z\frac{d^2\Delta w}{dx^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(5.11)$$

で与えられる。ここで上式右辺の 2 つの二階微分を求める。曲げひずみに対しては、法線方向増分変位 Δv ,Δw は 3 次式で仮定する。

$$\left.\begin{aligned}\Delta v &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3\\ \Delta w &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5.12)$$

各々の増分変位の二階微分は、

$$\frac{d^2\Delta v}{dx^2} = B_v A_v^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta\theta_{z1} \\ \Delta v_2 \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(5.13)$$

$$\frac{d^2\Delta w}{dx^2} = B_w A_w^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta\theta_{y1} \\ \Delta w_2 \\ \Delta\theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(5.14)$$

となり、ここで、

$$B_v = \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} \quad , \quad B_w = \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\}$$

$$A_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \quad , \quad A_w^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.15)$$

となる。曲げひずみの二階微分から理解できるように、曲げひずみは、xに関する 1 次式で与えられている。上式を用いて、部材中央位置での曲げひずみを求める。

中央点では$x = \frac{\ell}{2}$とすると、

$$\left.\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\right|_{x=\frac{\ell}{2}} = \left\{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6\cdot\frac{\ell}{2}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta\theta_{z1} \\ \Delta v_2 \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{0 \quad -\frac{4}{\ell}+\frac{3}{\ell} \quad 0 \quad -\frac{2}{\ell}+\frac{3}{\ell}\right\} \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta\theta_{z1} \\ \Delta v_2 \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{0 \quad -\frac{1}{\ell} \quad 0 \quad \frac{1}{\ell}\right\} \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta\theta_{z1} \\ \Delta v_2 \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\ell}\left(\Delta\theta_{z2} - \Delta\theta_{z1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(5.16)$$

$$\left.\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\right|_{x=\frac{\ell}{2}}=\left\{0\quad 0\quad 2\quad 6\cdot\frac{\ell}{2}\right\}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & \frac{1}{\ell}\\ \frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\left\{0\quad \frac{4}{\ell}-\frac{3}{\ell}\quad 0\quad \frac{2}{\ell}-\frac{3}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\left\{0\quad \frac{1}{\ell}\quad 0\quad -\frac{1}{\ell}\right\}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\ell}\left(\Delta\theta_{y1}-\Delta\theta_{y2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(5.17)$$

となり、従って、部材中央での曲げひずみは、

$$\Delta\kappa=-y\frac{1}{\ell}\left(\Delta\theta_{z2}-\Delta\theta_{z1}\right)-z\frac{1}{\ell}\left(\Delta\theta_{y1}-\Delta\theta_{y2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(5.18)$$

で与えられる。

次に、曲げひずみの x 軸に関する平均値を求めることにする。曲げひずみの平均値は、

$$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \Delta\kappa dx=-y\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\frac{d^2\Delta v}{dx^2}dx-z\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\frac{d^2\Delta w}{dx^2}dx \qquad \cdots\cdots\cdots(5.19)$$

で与えられ、上式中の各項は、

$$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\frac{d^2\Delta v}{dx^2}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\{0\quad 0\quad 2\quad 6x\}dx\left[A_v^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta\theta_{z1}\\ \Delta v_2\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\ell}\left\{0\quad 0\quad 2\ell\quad 3\ell^2\right\}\left[A_v^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta\theta_{z1}\\ \Delta v_2\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}$$

$$=\left\{0\quad 0\quad 2\quad 3\ell\right\}\left[A_v^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta\theta_{z1}\\ \Delta v_2\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(5.20)$$

$$\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\{0\quad 0\quad 2\quad 6x\}dx\left[A_w^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\ell}\{0\quad 0\quad 2\ell\quad 3\ell^2\}\left[A_w^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\{0\quad 0\quad 2\quad 3\ell\}\left[A_w^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots(5.21)$$

となり、$x=\frac{\ell}{2}$ で評価したひずみと同一となる。このように、$x=\frac{\ell}{2}$ で求めた曲げひずみは、部材内の曲げひずみの平均値でもある。

5.4 ファイバーモデルの静的釣合

ファイバーモデルの静的釣合は、前章の弾性部材と同様に、式(4.29)より、次式で与えられる。

$$\int_V\left\{\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\Delta\sigma_x+\delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T\cdot\sigma_x\right\}dV$$
$$=\int_S\delta\{\Delta u\}^T\left(\Delta P\right)dS+\int_S\delta\{\Delta u\}^T\left(P\right)dS-\int_V\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\sigma dV \quad\cdots\cdots(5.22)$$

ここで、各増分ひずみは、

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_L&=\Delta\varepsilon_0+\Delta\bar{\varepsilon}_L+\Delta\kappa_z+\Delta\kappa_y\\
\Delta\varepsilon_0&=\frac{du}{dx}\\
\Delta\kappa_z&=-y\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\\
\Delta\kappa_y&=-z\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\\
\Delta\bar{\varepsilon}_L&=\frac{d\bar{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx}+\frac{d\bar{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx}=\Delta_2\varepsilon_N\\
\Delta\varepsilon_N&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}=\Delta_1\varepsilon_N
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5.23)$$

であった。

ここでは、上式の各項を、有限要素法を用いて求めるわけであるが、

ここでは、ファイバーモデルに関係する左辺の接線剛性を評価する。左辺の第１項は、増分応力を増分ひずみで表し、

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot\Delta\sigma dV=\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N)dV$$

増分ひずみの２次の項 $\Delta\varepsilon_N$ を無視すると、式(4.78)のように

$$\begin{aligned}&\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV\\&=\int_V\left[B_0+B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_0+B_L\left(\bar{u}\right)\right]\{\Delta u\}dV\\&=\left\{\int_V\left[B_0\right]E\left[B_0\right]dV+\int_V\left[B_0\right]E\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]dV\right.\\&\left.+\int_V\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_0\right]dV+\int_V\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]dV\right\}\{\Delta u\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(5.24)$$

として表される。

部材両端変位を次式のように

$$\{\Delta\mathbf{u}\}^T=\left\{\Delta u_1\quad\Delta u_2\quad\Delta v_1\quad\Delta\theta_{z1}\quad\Delta v_2\quad\Delta\theta_{z2}\quad\Delta w_1\quad\Delta\theta_{y1}\quad\Delta w_2\quad\Delta\theta_{y2}\right\}\quad\cdots\cdots(5.25)$$

とすると、式(5.24)の第１項は、線形剛性を表し、次式となる。

$$\begin{aligned}&\int_V\left[B_0\right]^T E\left[B_0\right]dV\\&=\int_V\left[A^{-1}\right]^T\left[B_b\right]^T\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}E\{1\quad -y\quad -z\}\left[B_b\right]\left[A^{-1}\right]dV\\&=\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}A_u^{-1}&&\\&A_v^{-1}&\\&&A_w^{-1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0&1&&&&&&&&\\&&0&0&2&6x&&&&\\&&&&&&0&0&2&6x\end{bmatrix}^T\int_A\begin{bmatrix}E&-Ey&-Ez\\-Ey&Ey^2&Eyz\\-Ez&Eyz&Ez^2\end{bmatrix}dA\\&\quad\begin{bmatrix}0&1&&&&&&&&\\&&0&0&2&6x&&&&\\&&&&&&0&0&2&6x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_u^{-1}&&\\&A_v^{-1}&\\&&A_w^{-1}\end{bmatrix}dx\\&=\begin{bmatrix}\left[K_u\right]&\left[K_{uv}\right]&\left[K_{uw}\right]\\\left[K_{uv}\right]^T&\left[K_v\right]&\left[K_{vw}\right]\\\left[K_{uw}\right]^T&\left[K_{vw}\right]^T&\left[K_w\right]\end{bmatrix}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(5.26)$$

上式の積分で、一般の弾性梁であれば、断面１次モーメントは零となるため、断面について積分を行うと行列の非対角項は零となる。しかしながら、ファイバーモデルでは、各ファイバーで任意の履歴特性を許すた

め、断面が塑性状態となると、断面中立軸が移動し、断面一次モーメントは必ずしも零にならない。したがって、この非対角項を残したままで積分を実行する必要がある。

有限要素法で用いる変形場として、Δu は増分軸方向変位であり、ここでは x に関する 1 次関数と仮定する。また、Δv と Δw は、各々 y 軸、z 軸方向の増分変位であり、x に関する 3 次関数と仮定する。

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \alpha_0 + \alpha_1 x \\ \Delta v &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \\ \Delta w &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (5.27)$$

5.5 増分軸方向剛性

最初に、増分軸ひずみによる剛性$[K_u]$を求める。軸方向の変位とその一階微分は、

$$\Delta u = \{1 \quad x\}\begin{Bmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta u}{dx} = \{0 \quad 1\}\begin{Bmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (5.28)$$

となり、さらに、

$$\Delta u = H_u A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta u_1 \\ \Delta u_2\end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta u}{dx} = B_u A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta u_1 \\ \Delta u_2\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (5.29)$$

ここで、$H_u = \{1 \quad x\} \quad , \quad B_u = \{0 \quad 1\}$

$$A_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (5.30)$$

である。

増分軸方向剛性行列$[K_u]$は、変形場を代入すると、

$$\begin{aligned} [K_u] &= \int_A \int_0^\ell E\left[A_u^{-1}\right]^T \{B_u\}^T \{B_u\}\left[A_u^{-1}\right] dx dA \\ &= \int_A \int_0^\ell E \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}0 \\ 1\end{Bmatrix} \{0 \quad 1\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} dx dA \\ &= \int_A \int_0^\ell \frac{E}{\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx dA \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (5.31)$$

となる。ここで、式(5.31)の中で、次の積分が必要となる。

$$\overline{EA} = \int_A \int_0^\ell \frac{E}{\ell} dxdA \qquad \cdots\cdots\cdots(5.32)$$

上記の積分が実行できるとすると、軸方向剛性は、

$$\left[K_u\right] = \frac{\overline{EA}}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(5.33)$$

となる。

ここで $\overline{EA}$ の積分であるが、 E の軸方向の変化をどのように仮定するかによって各種の積分法が考えられる。各ファイバーの軸方向剛性係数 E は一定であるとすると、積分は次式で表される。

$$\overline{EA} = \int_A EdA \int_0^\ell \frac{1}{\ell} dx = \int_A EdA \qquad \cdots\cdots\cdots(5.34)$$

上式の積分は、ファイバー断面内の E を一定であるとすると、近似的に次式のように部材断面内のファイバー全ての和で表すことができる。

$$\overline{EA} = \sum E_i A_i \qquad \cdots\cdots\cdots(5.35)$$

無論、 E_i は各ファイバーの接線剛性係数を表し、 A_i は各ファイバーの断面を表す。本システムではこの剛性を用いることにする。

5.6 増分曲げ剛性

次に、増分曲げひずみに対する増分剛性を求める。増分の曲げひずみに対する剛性は線形剛性の式（5.26）の対角項の第２番目と第３番目にあたり、各々、$\left[K_v\right]$と$\left[K_w\right]$である。

曲げひずみに対する増分剛性を求めるための変形場は、三次式を仮定しているため、$\left[K_v\right]$は、以下のように表される。

$$\left[K_v\right] = \int_A \int_0^\ell Ey^2 \left[A_v^{-1}\right]^T \left\{B_v\right\}^T \left\{B_v\right\} \left[A_v^{-1}\right] dxdA$$
$$= \left[A_v^{-1}\right]^T \int_A \int_0^\ell Ey^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dxdA \left[A_v^{-1}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(5.36)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}\overline{EAY_1^2} &= \int_A \int_0^{\ell} \frac{Ey^2}{\ell} dxdA \\ \overline{EAY_2^2} &= \int_A \int_0^{\ell} \frac{2Ey^2 x}{\ell^2} dxdA \\ \overline{EAY_3^2} &= \int_A \int_0^{\ell} \frac{3Ey^2 x^2}{\ell^3} dxdA\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(5.37)$$

とすると、

$$\left[K_v\right] = \left[A_v^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\overline{EAY_1^2}\ell & 6\overline{EAY_2^2}\ell^2 \\ 0 & 0 & 6\overline{EAY_2^2}\ell^2 & 12\overline{EAY_3^2}\ell^3 \end{bmatrix} \left[A_v^{-1}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.38)$$

として表される。また、各積分で E が x に関して定数であると、積分が容易に実行でき、以下のように積分値が全て同一となる。

$$\left.\left.\begin{aligned}\overline{EAY_1^2} &= \int_A Ey^2 dA \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell} dx = \int_A Ey^2 dA = \sum E_i Y_i^2 A_i \\ \overline{EAY_2^2} &= \int_A Ey^2 dA \int_0^{\ell} \frac{2x}{\ell^2} dx = \int_A Ey^2 dA = \sum E_i Y_i^2 A_i \\ \overline{EAY_3^2} &= \int_A Ey^2 dA \int_0^{\ell} \frac{3x^2}{\ell^3} dx = \int_A Ey^2 dA = \sum E_i Y_i^2 A_i\end{aligned}\right\} = \overline{EAY^2}\right\} \cdots(5.39)$$

さらに、上式を利用して $\left[K_v\right]$ を整理すると、

$$\left[K_v\right] = \overline{EAY^2} \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ & \frac{4}{\ell} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ & & \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ sym & & & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(5.40)$$

となる。同様に、式（5.26）の対角項の第３番目 $\left[K_w\right]$ は、次式となる.

$$\begin{aligned}\left[K_w\right] &= \int_A \int_0^{\ell} Ez^2 \left[A_w^{-1}\right]^T \left\{B_w\right\}^T \left\{B_w\right\} \left[A_w^{-1}\right] dxdA \\ &= \left[A_w^{-1}\right]^T \int_A \int_0^{\ell} Ez^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dxdA \left[A_w^{-1}\right] \quad \cdots\cdots\cdots(5.41)\end{aligned}$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}\overline{EAZ_1^2}&=\int_A\int_0^\ell \frac{Ez^2}{\ell}dxdA\\ \overline{EAZ_2^2}&=\int_A\int_0^\ell \frac{2Ez^2x}{\ell^2}dxdA\\ \overline{EAZ_3^2}&=\int_A\int_0^\ell \frac{3Ez^2x^2}{\ell^3}dxdA\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5.42)$$

とすると、

$$[K_w]=\left[A_w^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4\overline{EAZ_1^2}\ell&6\overline{EAZ_2^2}\ell^2\\0&0&6\overline{EAZ_2^2}\ell^2&12\overline{EAZ_3^2}\ell^3\end{bmatrix}\left[A_w^{-1}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.43)$$

となる。各積分で E が x に関して定数であると、

$$\left.\left.\begin{aligned}\overline{EAZ_1^2}&=\int_A Ez^2dA\int_0^\ell \frac{1}{\ell}dx=\int_A Ez^2dA=\sum E_iZ_i^2A_i\\ \overline{EAZ_2^2}&=\int_A Ez^2dA\int_0^\ell \frac{2x}{\ell^2}dx=\int_A Ez^2dA=\sum E_iZ_i^2A_i\\ \overline{EAZ_3^2}&=\int_A Ez^2dA\int_0^\ell \frac{3x^2}{\ell^3}dx=\int_A Ez^2dA=\sum E_iZ_i^2A_i\end{aligned}\right\}=\overline{EAZ^2}\right\}\cdots\cdots(5.44)$$

となる。上式を利用して$[K_w]$を整理すると、次式のように増分曲げに対する増分剛性$[K_w]$が得られる。

$$[K_w]=\overline{EAZ^2}\begin{bmatrix}\frac{12}{\ell^3}&-\frac{6}{\ell^2}&-\frac{12}{\ell^3}&-\frac{6}{\ell^2}\\ &\frac{4}{\ell}&\frac{6}{\ell^2}&\frac{2}{\ell}\\ &&\frac{12}{\ell^3}&\frac{6}{\ell^2}\\ sym&&&\frac{4}{\ell}\end{bmatrix}\cdots\cdots(5.45)$$

5.7 軸ひずみと曲げひずみの相互作用を表す増分剛性

軸ひずみと曲げひずみの相互作用を表す増分剛性を求めることにする。線形剛性の式（5.26）の中の$[K_{uv}]$は、

$$[K_{uv}]==-\int_A\int_0^\ell Ey\left[A_u^{-1}\right]^T\{B_u\}^T\{B_v\}\left[A_v^{-1}\right]dxdA$$

$$=-\int_A\int_0^\ell Ey\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{\ell}\\0&\frac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\{0\quad 0\quad 2\quad 6x\}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{\ell^2}&-\frac{2}{\ell}&\frac{3}{\ell^2}&-\frac{1}{\ell}\\ \frac{2}{\ell^3}&\frac{1}{\ell^2}&-\frac{2}{\ell^3}&\frac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}dxdA$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} \int_A \int_0^\ell Ey \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} dxdA \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(5.46)$$

で与えられ、ここで、

$$\left.\begin{aligned} \overline{EAY_1} &= \int_A \int_0^\ell \frac{Ey}{\ell} dxdA \\ \overline{EAY_2} &= \int_A \int_0^\ell \frac{2Eyx}{\ell^2} dxdA \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5.47)$$

とすると、

$$\begin{aligned} [K_{uv}] &= -\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\overline{EAY_1}\ell & 3\overline{EAY_2}\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\overline{EAY_1} & -3\overline{EAY_2}\ell \\ 0 & 0 & 2\overline{EAY_1} & 3\overline{EAY_2}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(5.48) \end{aligned}$$

となり、さらに整理すると

$$[K_{uv}] = -\begin{bmatrix} \dfrac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAY_1} - \overline{EAY_2}\right) & \dfrac{1}{\ell}\left(4\overline{EAY_1} - 3\overline{EAY_2}\right) & -\dfrac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAY_1} - \overline{EAY_2}\right) & \dfrac{1}{\ell}\left(2\overline{EAY_1} - 3\overline{EAY_2}\right) \\ -\dfrac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAY_1} - \overline{EAY_2}\right) & -\dfrac{1}{\ell}\left(4\overline{EAY_1} - 3\overline{EAY_2}\right) & \dfrac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAY_1} - \overline{EAY_2}\right) & -\dfrac{1}{\ell}\left(2\overline{EAY_1} - 3\overline{EAY_2}\right) \end{bmatrix} \cdots\cdots(5.49)$$

ここで、各積分で E が x に関して定数であるとすると、

$$\left.\left.\begin{aligned} \overline{EAY_1} &= \int_A EydA \int_0^\ell \frac{1}{\ell} dx = \int_A EydA = \sum E_i Y_i A_i \\ \overline{EAY_2} &= \int_A EydA \int_0^\ell \frac{2x}{\ell^2} dx = \int_A EydA = \sum E_i Y_i A_i \end{aligned}\right\} = \overline{EAY} \quad \right\} \cdots\cdots\cdots(5.50)$$

となり、剛性$[K_{uv}]$は、

$$
\left[K_{uv}\right]=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\overline{EAY}}{\ell} & 0 & \dfrac{\overline{EAY}}{\ell} \\ 0 & \dfrac{\overline{EAY}}{\ell} & 0 & -\dfrac{\overline{EAY}}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.51)
$$

となる。

次に、増分線形剛性式（5.26）の中の$\left[K_{uw}\right]$を求めることにする。線形剛性$\left[K_{uw}\right]$は、

$$
\begin{aligned}
\left[K_{uw}\right] &= -\int_A\int_0^\ell Ez\left[A_u^{-1}\right]^T\left\{B_u\right\}^T\left\{B_w\right\}\left[A_w^{-1}\right]dxdA \\
&= -\int_A\int_0^\ell Ez\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\left\{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\right\}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}dxdA \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\int_A\int_0^\ell Ez\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}dxdA\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots(5.52)$$

となり、ここで、

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{EAZ_1} &= \int_A\int_0^\ell \frac{Ez}{\ell}dxdA \\
\overline{EAZ_2} &= \int_A\int_0^\ell \frac{2Ezx}{\ell^2}dxdA
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.53)
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\left[K_{uw}\right] &= -\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\overline{EAZ_1}\ell & 3\overline{EAZ_2}\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\overline{EAZ_1} & -3\overline{EAZ_2}\ell \\ 0 & 0 & 2\overline{EAZ_1} & 3\overline{EAZ_2}\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.54)
\end{aligned}
$$

となり、さらに整理すると

$$[K_{uw}]=-\begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAZ_1}-\overline{EAZ_2}\right) & -\frac{1}{\ell}\left(4\overline{EAZ_1}-3\overline{EAZ_2}\right) & -\frac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAZ_1}-\overline{EAZ_2}\right) & -\frac{1}{\ell}\left(2\overline{EAZ_1}-3\overline{EAZ_2}\right) \\ -\frac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAZ_1}-\overline{EAZ_2}\right) & \frac{1}{\ell}\left(4\overline{EAZ_1}-3\overline{EAZ_2}\right) & \frac{6}{\ell^2}\left(\overline{EAZ_1}-\overline{EAZ_2}\right) & \frac{1}{\ell}\left(2\overline{EAZ_1}-3\overline{EAZ_2}\right) \end{bmatrix} \cdots\cdots(5.55)$$

となる。ここで、各積分で E が x に関して定数であるとすると、

$$\left.\begin{array}{l} \overline{EAZ_1}=\int_A EzdA\int_0^\ell \frac{1}{\ell}dx=\int_A EzdA=\sum E_iZ_iA_i \\ \overline{EAZ_2}=\int_A EzdA\int_0^\ell \frac{2x}{\ell^2}dx=\int_A EzdA=\sum E_iZ_iA_i \end{array}\right\}=\overline{EAZ} \quad \Bigg\} \cdots\cdots(5.56)$$

となり、増分剛性 $[K_{uw}]$ は、

$$[K_{uw}]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\overline{EAZ}}{\ell} & 0 & -\frac{\overline{EAZ}}{\ell} \\ 0 & -\frac{\overline{EAZ}}{\ell} & 0 & \frac{\overline{EAZ}}{\ell} \end{bmatrix} \cdots\cdots(5.57)$$

となる。

5.8 両軸曲げひずみの相互作用を表す増分剛性

曲げに関するｙ方向とｚ方向の間の相互作用を表す増分剛性の評価を行う。この増分剛性 $[K_{vw}]$ は、式（5.26）より、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}[K_{vw}]&=\int_A\int_0^\ell Eyz\left[A_v^{-1}\right]^T\{B_v\}^T\{B_w\}\left[A_w^{-1}\right]dxdA \\ &=\left[A_v^{-1}\right]^T\int_A\int_0^\ell Eyz\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix}dxdA\left[A_w^{-1}\right] \end{aligned} \cdots\cdots(5.58)$$

ここで、上式の中の積分が次のように表されるとすると、

$$\left.\begin{array}{l} \overline{EAYZ_1}=\int_A\int_0^\ell \frac{Eyz}{\ell}dxdA \\ \overline{EAYZ_2}=\int_A\int_0^\ell \frac{2Eyzx}{\ell^2}dxdA \\ \overline{EAYZ_3}=\int_A\int_0^\ell \frac{3Eyzx^2}{\ell^3}dxdA \end{array}\right\}\cdots\cdots(5.59)$$

となり、$[K_{vw}]$ は、

$$[K_{vw}]=\left[A_v^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4\overline{EAYZ_1}\ell&6\overline{EAYZ_2}\ell^2\\0&0&6\overline{EAYZ_2}\ell^2&12\overline{EAYZ_3}\ell^3\end{bmatrix}\left[A_w^{-1}\right]\quad\cdots\cdots(5.60)$$

となる。

各積分において、E が x に関して定数であるとすると、

$$\left.\begin{aligned}\overline{EAYZ_1}&=\int_A EyzdA\int_0^\ell\frac{1}{\ell}dx=\int_A EyzdA=\sum E_iY_iZ_iA_i\\\overline{EAYZ_2}&=\int_A EyzdA\int_0^\ell\frac{2x}{\ell^2}dx=\int_A EyzdA=\sum E_iY_iZ_iA_i\\\overline{EAYZ_3}&=\int_A EyzdA\int_0^\ell\frac{3x^2}{\ell^3}dx=\int_A EyzdA=\sum E_iY_iZ_iA_i\end{aligned}\right\}=\overline{EAYZ}\quad\cdots(5.61)$$

となり、行列内の各積分値が同一となる。

この積分値を用いると、増分剛性$[K_{uw}]$は、

$$[K_{vw}]=\overline{EAYZ}\left[A_v^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4\ell&6\ell^2\\0&0&6\ell^2&12\ell^3\end{bmatrix}\left[A_w^{-1}\right]\quad\cdots\cdots(5.62)$$

となる。さらに、上式を整理すると、

$$[K_{vw}]=\overline{EAYZ}\begin{bmatrix}\frac{12}{\ell^3}&-\frac{6}{\ell^2}&-\frac{12}{\ell^3}&-\frac{6}{\ell^2}\\\frac{6}{\ell^2}&-\frac{4}{\ell}&-\frac{6}{\ell^2}&-\frac{2}{\ell}\\-\frac{12}{\ell^3}&\frac{6}{\ell^2}&\frac{12}{\ell^3}&\frac{6}{\ell^2}\\\frac{6}{\ell^2}&-\frac{2}{\ell}&-\frac{6}{\ell^2}&-\frac{4}{\ell}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(5.63)$$

として、曲げに対する両方向の相互作用に関する増分剛性が得られる。

本システムでは、両方向の相互作用に関する増分剛性の扱いをより簡単にするため、$\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_z$ を次式のようにおく。

$$\left.\begin{aligned}\Delta\theta_y&=\alpha_0+\alpha_1x\\\Delta\theta_z&=\beta_0+\beta_1x\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.64)$$

上式より、各係数は、

$$\frac{d^2\Delta v}{dx^2}=\frac{d\Delta\theta_z}{dx}=\beta_1\quad,\quad\frac{d^2\Delta w}{dx^2}=\frac{d\Delta\theta_y}{dx}=\alpha_1$$

$$\Delta\theta_y = \{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta\theta_y}{dx} = \{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta\theta_z = \{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{z1} \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\Delta\theta_z}{dx} = \{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{z1} \\ \Delta\theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$\cdots\cdots(5.65)$$

となり、従って、$[K_{uw}]$は、

$$[\bar{K}_{vw}] = \int_A\int_0^\ell Eyz \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} dxdA$$

$$= \int_A\int_0^\ell \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Eyz \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} dxdA \qquad \cdots\cdots(5.66)$$

となる。前述と同様に、ここで、Eがxに関して定数であるとすると、

$$\overline{EAYZ} = \int_A\int_0^\ell \frac{Eyz}{\ell} dxdA = \int_A EyzdA\int_0^\ell \frac{1}{\ell} dx = \int_A EyzdA = \sum E_i Y_i Z_i A_i \quad \cdots(5.67)$$

となり、曲げに対する両方向の相互作用に関する増分剛性が次式のように得られる。

$$[\bar{K}_{vw}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} & -\dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} \\ -\dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} & \dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.68)$$

剛性の変位場を式(5.63)と同じとすると、剛性係数は、次式となる。

$$[K_{vw}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} & 0 & -\dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} & 0 & \dfrac{\overline{EAYZ}}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.69)$$

5.9 線形増分剛性行列

前節において、増分変位に対する線形増分剛性を求めた。線形増分剛性は、

$$K_L=\begin{bmatrix}[K_u] & [K_{uv}] & [K_{uw}]\\ [K_{uv}]^T & [K_v] & [K_{vw}]\\ [K_{uw}]^T & [K_{vw}]^T & [K_w]\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.70)$$

である。ただし、上式の両端変位は、式(5.25)であり、これを通常の両端変位

$$\{\Delta u\}^T=\{\Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{x1} \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta\theta_{z1} \quad \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{x2} \quad \Delta\theta_{y2} \quad \Delta\theta_{z2}\} \qquad \cdots\cdots(5.71)$$

に変更すると、ファイバー部材の接線剛性行列は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix}
\frac{\overline{EA}}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{\overline{EAZ}}{\ell} & -\frac{\overline{EAY}}{\ell} & -\frac{\overline{EA}}{\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\overline{EAZ}}{\ell} & \frac{\overline{EAY}}{\ell}\\
 & \frac{12\overline{EAY^2}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\overline{EAY^2}}{\ell^2} & 0 & -\frac{12\overline{EAY^2}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\overline{EAY^2}}{\ell^2}\\
 & & \frac{12\overline{EAZ^2}}{\ell^3} & 0 & -\frac{6\overline{EAZ^2}}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\overline{EAZ^2}}{\ell^3} & 0 & -\frac{6\overline{EAZ^2}}{\ell^2} & 0\\
 & & & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0\\
 & & & & \frac{4\overline{EAZ^2}}{\ell} & -\frac{\overline{EAYZ}}{\ell} & -\frac{\overline{EAZ}}{\ell} & 0 & \frac{6\overline{EAZ^2}}{\ell^2} & 0 & \frac{2\overline{EAZ^2}}{\ell} & \frac{\overline{EAYZ}}{\ell}\\
 & & & & & \frac{4\overline{EAY^2}}{\ell} & \frac{\overline{EAY}}{\ell} & -\frac{6\overline{EAY^2}}{\ell^2} & 0 & 0 & \frac{\overline{EAYZ}}{\ell} & \frac{2\overline{EAY^2}}{\ell}\\
 & & & & & & \frac{\overline{EA}}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{\overline{EAZ}}{\ell} & -\frac{\overline{EAY}}{\ell}\\
 & & & & & & & \frac{12\overline{EAY^2}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\overline{EAY^2}}{\ell^2}\\
 & & & & & & & & \frac{12\overline{EAZ^2}}{\ell^3} & 0 & \frac{6\overline{EAZ^2}}{\ell^2} & 0\\
 & & sym & & & & & & & \frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & & \frac{4\overline{EAZ^2}}{\ell} & -\frac{\overline{EAYZ}}{\ell}\\
 & & & & & & & & & & & \frac{4\overline{EAY^2}}{\ell}
\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(5.72)$$

ただし、上の行列の中で、断面極２次モーメントについては弾性部材の剛性を用いることになる。

5.10 非線形増分剛性

ファイバーモデルにおける接線剛性のうち、幾何剛性と大変位剛性について考察する。接線剛性は

$$[K_T]=[K_L]+[K_G]+[K_N] \qquad \cdots\cdots(5.73)$$

で表され、幾何剛性と大変位剛性は、式(5.22)の左辺第２項と式(5.24)より、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}[K_G]&=\int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta_1\varepsilon_N\right)^T\sigma_x dAdx\\ [K_N]&=\int_0^{\ell}\int_A \Delta\varepsilon_L{}^T\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dAdx\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5.74)$$

以下に、各項を具体的に求める。

5.10.1 幾何剛性行列 $[K_G]$

幾何剛性行列 $[K_G]$ は、

$$\begin{aligned}[K_G]&=\int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta_1\varepsilon_N\right)\sigma_x dAdx\\ &=\int_0^{\ell}\int_A \delta\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2\right\}\sigma_x dAdx+\int_0^{\ell}\int_A \delta\left\{\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\}\sigma_x dAdx\end{aligned} \qquad \cdots(5.75)$$

であり、上式では y 軸、z 軸に関する関数は σ_x のみであるため、積分は次式のように軸力 $\bar{N}$ となる。

$$\bar{N}=\int_A \sigma_x dA=\sum_i \sigma_{xi}A_i \qquad \cdots\cdots(5.76)$$

ここで、σ_{xi} は、各ファイバーの軸力である。従って、幾何剛性 $[K_G]$ は、

$$[K_G]=\bar{N}\left[\int_0^{\ell}\delta\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2\right\}dx+\int_0^{\ell}\delta\left\{\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\}dx\right] \qquad \cdots\cdots(5.77)$$

となり、軸力の積分を表す式(5.76)のみ異なり、弾性部材の幾何剛性行列 $[K_G]$ と同一となる。

5.10.2 大変位剛性行列 $[K_N]$

大変位剛性行列 $[K_N]$ は、

$$
\begin{aligned}
\left[K_N\right] &= \int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T \cdot E \cdot \Delta\varepsilon_L dAdx \\
&= \int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta\varepsilon_o + \Delta\kappa\right)^T \cdot E \cdot \Delta_2\varepsilon_N dAdx + \int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta_2\varepsilon_N\right)^T \cdot E \cdot \left(\Delta\varepsilon_o + \Delta\kappa\right) dAdx \\
&= \int_0^{\ell}\int_A \delta\left(\Delta_2\varepsilon_N\right)^T \cdot E \cdot \Delta_2\varepsilon_N dAdx
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(5.78)
$$

である。上式は、式(4.89)より

$$
\begin{aligned}
\left[K_N\right] &= \int_V \left[B_0\right]^T E\left[B_L\right]dV + \int_V \left[B_L\right]^T E\left[B_0\right]dV + \int_V \left[B_L\right]^T E\left[B_L\right]dV \\
&= \left[K_{N1}\right] + \left[K_{N2}\right] + \left[K_{N3}\right]
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(5.79)
$$

となる。上式中で、ファイバー部材の長さが非常に短いとして、ここでは、曲げひずみを省略する。したがって、式(5.79)の中で、 y 軸、 z 軸に関する関数は E のみとなり、さらに、 E が x に関して一定であるとすると、断面についての積分は、

$$
\int_A EdA = \sum E_i A_i = \overline{EA} \qquad \cdots\cdots(5.80)
$$

として与えられる。上式を用いると、 $\left[K_N\right]$ は、断面に関する積分を除いて、弾性部材のそれと一致する。ただし、 $\overline{EA}$ は式（5.80）を用いることになる。したがって、ファイバーモデルの接線剛性は、線形剛性を除いて、幾何剛性と大変位剛性は弾性の剛性を用いればよいことになる。ただし、式中の積分値は、式(5.76)と(5.80)を用いなければならない。