第８章　トラス部材の非線形解析

8.1 はじめに

本章では、トラス部材の幾何学的非線形解析並びに部材の個材座屈を考慮した弾塑性解析について述べる。部材両端の変位は、トラス部材であるため、$\{u_1\ v_1\ w_1\ u_2\ v_2\ w_2\}$ の６個である。

8.2 仮想仕事の原理による静的釣合式

仮想仕事の原理より、部材の静的釣合式は次式で与えられる。

$$\int \delta(\Delta\varepsilon)(\sigma_x+\Delta\sigma_x)dV-\int \delta(\Delta u)(p+\Delta p)dS=0 \quad \cdots\cdots(8.1)$$

ここで、σ_x は軸方向応力、$\Delta\sigma_x$ は増分軸方向応力である。また増分ひずみは、

$$\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N \quad \cdots\cdots(8.2)$$

であり、次式で示すように、$\Delta\varepsilon_L$ は増分変位に対して一次式であり、$\Delta\varepsilon_N$ は二次式である。

$$\Delta\varepsilon_L=\Delta\varepsilon_0+\Delta\bar{\varepsilon}_L \quad \cdots\cdots(8.3)$$

$$\Delta\varepsilon_0=\frac{d\Delta u}{dx} \quad \cdots\cdots(8.4)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_L=\left(\frac{dv}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right) \quad \cdots\cdots(8.5)$$

$$\Delta\varepsilon_N=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots(8.6)$$

ここで、$\{u,v,w\}$ は増分前の変位であり、$\{\Delta u,\Delta v,\Delta w\}$ は増分変位である。式(8.2)を式(8.1)に代入すると、

$$\int \delta(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N)(\sigma_x+\Delta\sigma_x)dV=\int \delta(\Delta u)\,pdS+\delta(\Delta u)\Delta pdS \quad \cdots\cdots(8.7)$$

となる。上式を展開し、増分変位 $\{\Delta u\}$ のべきで整理すると、

$$\begin{aligned}&\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\sigma_x dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\Delta\sigma_x dV\\&\quad+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\Delta\sigma_x dV\\&\qquad=\int \delta\left(\Delta u\right)pdS+\int \delta\left(\Delta u\right)\Delta pdS\end{aligned} \quad \cdots\cdots(8.8)$$

として、非線形の静的釣合式が得られる。

8.3 有限要素法による剛性の評価

次に、有限要素法を用いて各項を求めることにする。最初に 3 方向の変位場を x の一次式で仮定し、部材両端の変位で表す。

$$\left.\begin{aligned} u &= (1 \quad x)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ v &= (1 \quad x)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \\ w &= (1 \quad x)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8.9)$$

また、その微分は、

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= (0 \quad 1)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \frac{dv}{dx} &= (0 \quad 1)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \\ \frac{dw}{dx} &= (0 \quad 1)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8.10)$$

となる。ここで、$\{u_1\ v_1\ w_1\ u_2\ v_2\ w_2\}$ は部材両端の変位を表し、$\left[A^{-1}\right]$ は

$$\left[A^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{bmatrix}$$

である。また、l は部材長さである。ここで、後で必要となる以下の値を求めておく。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right) &= \{v_1 \quad v_2\}\left[A^{-1}\right]^T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad 1)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix} \\ &= \{v_1 \quad v_2\}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix} \\ &= \left(\frac{v_1 - v_2}{\ell^2} \quad -\frac{v_1 - v_2}{\ell^2}\right)\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \cdots\cdots (8.11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right) &= \{w_1 \quad w_2\}\left[A^{-1}\right]^T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad 1)\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \\ &= \left(\frac{w_1 - w_2}{\ell^2} \quad -\frac{w_1 - w_2}{\ell^2}\right)\begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \cdots\cdots (8.12)$$

非線形の静的釣合式(8.8)を少し整理すると、

$$\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\Delta\sigma_x dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV = \int \delta\left(\Delta u\right) pdS+\int \delta\left(\Delta u\right)\Delta pdS -\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\sigma_x dV-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\Delta\sigma_x dV \qquad \cdots\cdots(8.13)$$

となり、増分変位に無関係な項を次のようにおく。

$$\Phi=\int \delta\left(\Delta u\right) pdS-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\sigma_x dV \qquad \cdots\cdots(8.14)$$

この Φ は、増分前でほとんど零となる値であり、１ステップ前の不釣合力を表す。さらに、

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda\left\{p_0\right\}&=\int \delta\left(\Delta u\right)\Delta pdS\\ \Delta\sigma_x&=E\cdot\Delta\varepsilon=E\left(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8.15)$$

とおくと、式(8.13)は

$$\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N\right)dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV =\Delta\lambda\left\{p_0\right\}+\left\{\Phi\right\}-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N\right)dV \qquad \cdots\cdots(8.16)$$

となる。ここで、E はヤング係数であり、$\Delta\lambda$ は荷重パラメータ、$\left\{p_0\right\}$ は荷重ベクトルである。さらに整理すると、最終的に非線形の釣合式は、

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV\\ &\quad=\Delta\lambda\left\{p_0\right\}+\left\{\Phi\right\}-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV\\ &\qquad-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV\\ &\qquad-\int \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8.17)\end{aligned}}$$

となる。

8.3.1 第１項の接線剛性項の評価

次に、式(8.17)の各項を有限要素法により具体的に求める。式(8.17)の第１項に式(8.2)を代入し、整理すると

$$\begin{aligned}\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV&=\int \delta\left(\Delta\varepsilon_0+\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_0+\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)dV\\ &=\int \delta\left(\Delta\varepsilon_0\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_0 dV+\int \delta\left(\Delta\varepsilon_0\right)\cdot E\cdot\Delta\overline{\varepsilon}_L dV\\ &\quad+\int \delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_0 dV+\int \delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\Delta\overline{\varepsilon}_L dV\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} [K_u] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{uv}]^T & [K_v] & [K_{vw}] \\ [K_{uw}]^T & [K_{vw}]^T & [K_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(8.18)$$

となる。右辺の剛性項を順次求めることにする。

まず、式(8.18)の第１項は、

$$\int \delta(\Delta\varepsilon_0) \cdot E \cdot \Delta\varepsilon_0 dV = \int \delta \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^T \cdot E \cdot \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right) dV$$

$$= [K_u]\{\Delta u\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8.19)$$

となり、剛性行列$[K_u]$は、

$$[K_u] = [A^{-1}]^T \int \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot E \cdot (0 \quad 1) dV [A^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}^T EA\ell \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。この項はトラス部材の線形剛性を表す。

続いて、式(8.18)の第 2 項は、

$$\int \delta(\Delta\varepsilon_0) \cdot E \cdot \Delta\overline{\varepsilon}_L dV = \int \delta \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right) \cdot E \cdot \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right) + \left(\frac{dw}{dx} \frac{d\Delta w}{dx} \right) \right\} dV$$

$$= \int \delta \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right) \cdot E \cdot \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right) \right\} dV + \int \delta \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right) \cdot E \cdot \left\{ \left(\frac{dw}{dx} \frac{d\Delta w}{dx} \right) \right\} dV$$

$$= [K_{uv}] \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix} + [K_{uw}] \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8.20)$$

となり、上式の剛性$[K_{uv}]$は、

$$[K_{uv}] = [A^{-1}] \int E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{v_1 - v_2}{\ell^2} \quad -\frac{v_1 - v_2}{\ell^2} \right) dV$$

$$= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{v_2 - v_1}{\ell} & -\frac{v_2 - v_1}{\ell} \\ -\frac{v_2 - v_1}{\ell} & \frac{v_2 - v_1}{\ell} \end{bmatrix}$$

となり、また、剛性$\left[K_{uw}\right]$

$$\left[K_{uw}\right]=\left[A^{-1}\right]\int E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2} & -\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2}\end{pmatrix}dV$$

$$=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}\dfrac{v_2-v_1}{\ell} & -\dfrac{v_2-v_1}{\ell}\\ -\dfrac{v_2-v_1}{\ell} & \dfrac{v_2-v_1}{\ell}\end{bmatrix}$$

となる。

続いて、式(8.18)の第３項は、

$$\int\delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_0 dV=$$

$$\int\delta\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\cdot E\cdot\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)dV$$

$$=\int\delta\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}\cdot E\cdot\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)dV+\int\delta\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\cdot E\cdot\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)dV$$

$$=\begin{bmatrix}\left[K_{uv}\right]^T\\ \left[K_{uw}\right]^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\\ \Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.21)$$

となり、剛性$\left[K_{uv}\right]$と$\left[K_{uw}\right]$は、既に求められている。

最後に第４項は

$$\int\delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\Delta\overline{\varepsilon}_L dV$$

$$=\int\delta\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right)\cdot E\cdot$$

$$\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dV$$

$$=\int\delta\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right)\cdot E\cdot\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}dV$$

$$+\int\delta\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right)\cdot E\cdot\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dV$$

$$+\int\delta\left(\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right)\cdot E\cdot\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}dV$$

$$+\int \delta\left(\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right)\cdot E\cdot\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dV$$

$$=\begin{bmatrix}[K_v] & [K_{vw}] \\ [K_{vw}]^T & [K_w]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta w_1 \\ \Delta w_2\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8.22)$$

となる。次に、式(8.22)の各剛性を具体的に求める。まず、第 1 項は、

$$[K_v]=\int\begin{pmatrix}\frac{v_1-v_2}{\ell^2} & -\frac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}^T\cdot E\cdot\begin{pmatrix}\frac{v_1-v_2}{\ell^2} & -\frac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}dV$$

$$=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}\frac{(v_1-v_2)^2}{\ell^2} & -\frac{(v_1-v_2)^2}{\ell^2} \\ -\frac{(v_1-v_2)^2}{\ell^2} & \frac{(v_1-v_2)^2}{\ell^2}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.23)$$

となり、式(8.22)の第 2 項は、

$$[K_{vw}]=\int\begin{pmatrix}\frac{v_1-v_2}{\ell^2} & -\frac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}^T\cdot E\cdot\begin{pmatrix}\frac{w_1-w_2}{\ell^2} & -\frac{w_1-w_2}{\ell^2}\end{pmatrix}dV$$

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}\frac{v_1-v_2}{\ell}\frac{w_1-w_2}{\ell} & -\frac{v_1-v_2}{\ell}\frac{w_1-w_2}{\ell} \\ -\frac{v_1-v_2}{\ell}\frac{w_1-w_2}{\ell} & \frac{v_1-v_2}{\ell}\frac{w_1-w_2}{\ell}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.24)$$

続いて、式(8.22)の第 3 項は、

$$[K_{wv}]=\int\begin{pmatrix}\frac{w_1-w_2}{\ell^2} & -\frac{w_1-w_2}{\ell^2}\end{pmatrix}^T\cdot E\cdot\begin{pmatrix}\frac{v_1-v_2}{\ell^2} & -\frac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}dV$$

$$=[K_{vw}]^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.25)$$

最後に、第 4 項は以下のようである。

$$[K_w]=\int \delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\cdot E\cdot\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)dV$$

$$=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}\frac{(w_1-w_2)^2}{\ell^2} & -\frac{(w_1-w_2)^2}{\ell^2} \\ -\frac{(w_1-w_2)^2}{\ell^2} & \frac{(w_1-w_2)^2}{\ell^2}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(8.26)$$

以上をまとめると、(8.18)式は次式で与えられる。

$$\int \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV=\left[K_L\right]\left\{\Delta u\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(8.27)$$

ただし、増分変位ベクトルは式(8.18)の定義と異なり、次式で与える。

$$\left(\Delta u\right)^T=\left\{\Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta w_2\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(8.28)$$

増分変位ベクトルに従って、まとめると$\left[K_L\right]$は、次式となる。

$$\left[K_L\right]=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & a & b & -1 & -a & -b \\ & a^2 & ab & -a & -a^2 & -ab \\ & & b^2 & -b & -ab & -b^2 \\ & & & 1 & a & b \\ & sym & & & a^2 & ab \\ & & & & & b^2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(8.29)$$

ただし、係数a,bは、

$$a=\frac{v_2-v_1}{\ell} \quad , \quad b=\frac{w_2-w_1}{\ell} \quad \cdots\cdots\cdots(8.30)$$

である。

8.3.2 幾何剛性の評価

次に方程式(8.17)の左辺第二項を計算する。左辺第二項は、

$$\int\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV=\int\delta\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\cdot\sigma_x dV$$

$$=\frac{1}{2}\int\delta\left(\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right)\cdot\sigma_x dV+\frac{1}{2}\int\delta\left(\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right)\cdot\sigma_x dV$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & \left[K_{Gv}\right] & \\ & & \left[K_{Gw}\right] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.31)$$

であり、ここで軸方向応力は部材内一定を仮定していることから、

$$\int\sigma_x dA=N$$

となる。上式を利用すると (8.31)式の第１項は、

$$\int \frac{1}{2}\delta\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}\cdot\sigma_x dV$$
$$=\frac{1}{2}\int\left\{\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}\cdot\sigma_x dV$$
$$=N\int\left\{\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right\}dx$$

従って、剛性$\left[K_{Gv}\right]$は

$$\left[K_{Gv}\right]=N\left[A^{-1}\right]^T\int_0^\ell\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}dx\left[A^{-1}\right]$$
$$=N\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{\ell}\\ 0 & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \ell\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.32)$$

となる。同様に第二項は、

$$\int\frac{1}{2}\delta\left(\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^T\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right)\cdot\sigma_x dV$$
$$=N\int\delta\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)$$

となり、

$$\left[K_{Gw}\right]=N\left[A^{-1}\right]^T\int_0^\ell\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}dx\left[A^{-1}\right]$$
$$=\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.33)$$

となる。

以上をまとめると、

$$\int\delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\sigma_x dV=\left[K_G\right]\left\{\Delta u\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.34)$$

となり、ここで、剛性$\left[K_G\right]$は幾何剛性と呼び、次式となる。ただし、式(8.31)で定義した増分変位ベクトルと異なり、ここでは、式(8.28)で定義した増分変位ベクトルを用いている。そのため、式(8.32)と(8.33)で得た幾何剛性を少し並べ替える必要がある。並べ替えた幾何剛性$\left[K_G\right]$は、

$$[K_G]=\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ &1&0&0&-1&0\\ &&1&0&0&-1\\ &&&0&0&0\\ &&&&1&0\\ &&&&&1\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(8.35)$$

となる。

接線剛性$[K_T]$は、(8.29)式と(8.35)式より

$$[K_T]=[K_L]+[K_G] \quad \cdots\cdots\cdots(8.36)$$

で表される。

8.4 右辺項の評価

次に、(8.17)式の荷重項以外の右辺項で、増分変位に関する二次以上の項を求める。

最初に、(8.17)式より、

$$\int\delta(\Delta\varepsilon_N)\Delta\sigma_x dV+\int\delta(\Delta\varepsilon_L)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV \quad \cdots\cdots\cdots(8.37)$$

を求める。上式の第一項は、

$$\int\delta\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\cdot\Delta\sigma_x dV \quad \cdots\cdot(8.38)$$

であり、ここで、増分軸力は材に沿って一定としたことから、

$$\int_A\Delta\sigma_x dA=\Delta N \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.39)$$

であることを利用する。式(8.38)の積分は、

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta N}{2}\int_0^l\left\{\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\right.\\&\qquad\left.+\delta\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)+\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\delta\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dx\\&=\Delta N\int_0^l\left\{\delta\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\delta\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dx \quad \cdots\cdot(8.40)\end{aligned}$$

となり、仮定した変形場を代入し、積分を実行すると以下のようになる。

$$\Delta N\left[A^{-1}\right]^T\int_0^\ell\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}dx\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\\Delta v_2\end{Bmatrix}$$

$$+\Delta N\left[A^{-1}\right]^T\int_0^{\ell}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}dx\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\Delta N}{\ell}\begin{bmatrix}1 & & -1 & \\ & 1 & & -1\\ -1 & & 1 & \\ & -1 & & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta w_1\\ \Delta v_2\\ \Delta w_2\end{Bmatrix} = \Delta N\begin{Bmatrix}-\dfrac{\Delta v_2-\Delta v_1}{\ell}\\ -\dfrac{\Delta w_2-\Delta w_1}{\ell}\\ \dfrac{\Delta v_2-\Delta v_1}{\ell}\\ \dfrac{\Delta w_2-\Delta w_1}{\ell}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdot(8.41)$$

次に、(8.37)式の第二項は、

$$\int\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV=\int\delta\left(\Delta\varepsilon_0+\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_N\right)dV$$
$$=\int\delta\left(\Delta\varepsilon_0\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_N\right)dV+\int\delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\left(\Delta\varepsilon_N\right)dV \quad \cdots\cdot(8.42)$$

となり、上式の第一項は、

$$\int\delta\left(\Delta\varepsilon_0\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV$$
$$=\int\delta\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)E\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}dV \quad \cdots\cdot(8.43)$$

となる。変形場を代入すると

$$\int\left[A^{-1}\right]^T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}E\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\right\}dV$$

$$=\frac{EA\ell}{2}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\ell}\\ \dfrac{1}{\ell}\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell^2}\\ -\dfrac{1}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix}\\ \qquad +\begin{pmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell^2}\\ -\dfrac{1}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{EA}{2}\begin{Bmatrix}-\left(\dfrac{\Delta v_1-\Delta v_2}{\ell}\right)^2-\left(\dfrac{\Delta w_1-\Delta w_2}{\ell}\right)^2\\ \left(\dfrac{\Delta v_1-\Delta v_2}{\ell}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta w_1-\Delta w_2}{\ell}\right)^2\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdot(8.44)$$

次に、(8.42)式の第二項は、

$$
\begin{aligned}
&\int \delta\left(\Delta\overline{\varepsilon}_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_N dV \\
&=\int\delta\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\cdot E\cdot \\
&\quad\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\right]dV \\
&=EA\ell\left[\delta\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\right\}\right. \\
&\qquad\left.+\delta\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)\right\}\right\}\right]
\end{aligned}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.45)
$$

となり、上式の第一項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{EA\ell}{2}\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{v_1-v_2}{\ell^2}\\ -\dfrac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]^T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\begin{pmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]^T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left[A^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\right\}\right\} \\
&=\frac{EA}{2}\begin{pmatrix}\dfrac{v_1-v_2}{\ell^2}\\ -\dfrac{v_1-v_2}{\ell^2}\end{pmatrix}\left\{\left(\frac{\Delta v_1-\Delta v_2}{\ell}\right)^2+\left(\frac{\Delta w_1-\Delta w_2}{\ell}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\cdots\cdots\cdots(8.46)
$$

同様に第二項は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{EA\ell}{2}\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2}\\ -\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\Delta v_1 & \Delta v_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell^2}\\ -\dfrac{1}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\begin{pmatrix}\Delta w_1 & \Delta w_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell^2}\\ -\dfrac{1}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}\right\}\right\} \\
&=\frac{EA}{2}\begin{pmatrix}\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2}\\ -\dfrac{w_1-w_2}{\ell^2}\end{pmatrix}\left\{\left(\frac{\Delta v_1-\Delta v_2}{\ell}\right)^2+\left(\frac{\Delta w_1-\Delta w_2}{\ell}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\cdots\cdots\cdots(8.47)
$$

となる。ここで、

$$C=\frac{EA}{2}\left(\left(\frac{\Delta v_2-\Delta v_1}{\ell}\right)^2+\left(\frac{\Delta w_2-\Delta w_1}{\ell}\right)^2\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(8.48)$$

とおき、以上をまとめると次式のようになる。

$$\int\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)E\Delta\varepsilon_N dV$$

$$=C\begin{Bmatrix} -1 \\ -\dfrac{v_2-v_1}{\ell} \\ -\dfrac{w_2-w_1}{\ell} \\ 1 \\ \dfrac{v_2-v_1}{\ell} \\ \dfrac{w_2-w_1}{\ell} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.49)$$

最後に、右辺項の非線形項を全てまとめると、

$$\left\{f_N\right\}=\Delta N\begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\Delta v_2-\Delta v_1}{\ell} \\ -\dfrac{\Delta w_2-\Delta w_1}{\ell} \\ 0 \\ \dfrac{\Delta v_2-\Delta v_1}{\ell} \\ \dfrac{\Delta w_2-\Delta w_1}{\ell} \end{Bmatrix}+C\begin{Bmatrix} -1 \\ -\dfrac{v_2-v_1}{\ell} \\ -\dfrac{w_2-w_1}{\ell} \\ 1 \\ \dfrac{v_2-v_1}{\ell} \\ \dfrac{w_2-w_1}{\ell} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.50)$$

となる。

8.5 増分型の釣合式

以上のように有限要素法を用いて、増分型の非線形方程式は、

$$\boxed{\left(K_L+K_G\right)\left\{\Delta u\right\}=\Delta\lambda\left\{p_0\right\}+\Phi-\left\{f_N(\Delta u)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.51)}$$

と表される。右辺項に未知ベクトルである増分変位ベクトルがあるため、

精度良く上式を解くためには、ニュートン・ラフソン法などの反復解法を使用する必要がある。

8.6 トラスの個材座屈を考慮した弾塑性解析

本節では、トラス材の個材座屈を考慮した弾塑性挙動を理論的に述べる。理論式を導くにあたって、次の仮定をおく。

1. 断面は変形後も平面を保持する
2. 微小変形状態である
3. せん断力の影響を無視する
4. 初期不整はない

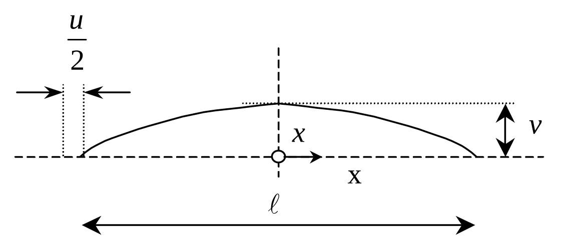

図 8-1

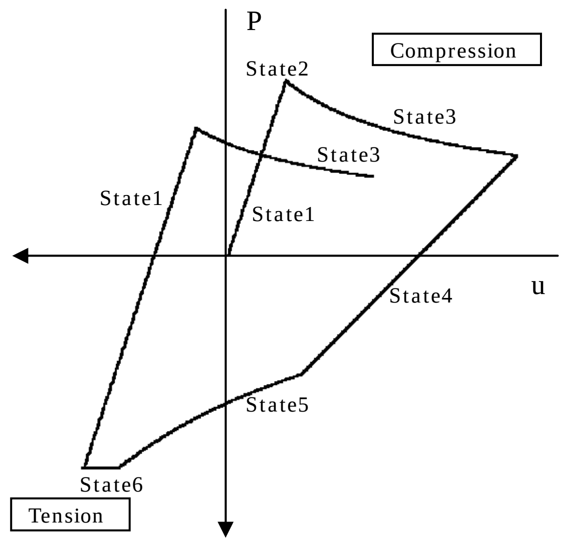

図 8-2

図 8-1 に示すような両端ピンの部材が繰り返し軸力を受ける際、その挙動を塑性流れ則と座屈たわみ角法を用いて解析する。

軸力と軸方向変位の関係は変形状態によって、図 8-2 のように 6 つに区分する。

State：１　弾性範囲

この領域での変位は軸方向ひずみによる変位のみで、$\Delta P - \Delta u$ 関係は線形とする。

$$\Delta P = \frac{EA}{\ell}\Delta u \qquad \cdots\cdots\cdots(8.52)$$

State：２　弾性座屈不安定範囲

この領域は、部材が弾性座屈を起こし、変形が増大する領域である。ここでの荷重は、座屈荷重とし、その値を示す。

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda \le \Lambda \text{ のとき} & \\ \quad P_{cr} = \sigma_Y A & \text{（塑性座屈）} \\ \lambda > \Lambda \text{ のとき} & \\ \quad P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EA}{\lambda^2} & \text{（弾性座屈）} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(8.53)$$

ここで、Λ は限界細長比であり、σ_y は降伏応力である。

次に、この領域における軸方向変位を求める。まず、座屈後の力の釣合式は、

$$EIy'' + Py = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(8.54)$$

で表される。上式を、以下の境界条件

$$\left.\begin{array}{l} y|_{x=0} = v \\ y|_{x=\frac{\ell}{2}} = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(8.55)$$

で、理論的に解を求める。ただし、vは、部材中央点の最大変位である。
式(8.54)の解析解は次式で与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} y = v\left\{\cos kx - \cot\dfrac{k\ell}{2}\sin kx\right\} \\ k = \sqrt{\dfrac{P}{EI}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(8.56)$$

上式より、たわみによる軸方向変位は、

$$u_\delta \simeq \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{2}(y')^2 dx$$

$$= v^2k^2\left[\frac{\ell}{4}\frac{1}{\sin\dfrac{k\ell}{2}} + \frac{1}{2k}\cot\frac{k\ell}{2}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(8.57)$$

として求められる。上式より、不定であったこの領域での変位u_δは、
部材中央点の変位vを与えることより求まる。

State：３　圧縮崩壊曲線

この領域では、座屈後の応力状態で、特に部材中央点位置に塑性ヒンジが形成される。部材中央点の回転角は式(8.56)より、次式で与えられる。

$$\theta = -vk\cot\frac{k\ell}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.58)$$

部材中央点における力と変位の関係は、

$$\left.\begin{array}{l} M = P\cdot v \\ P = \dfrac{EA}{\ell}u_e \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(8.59)$$

で与えられる。上式を増分表示すると、

$$\left.\begin{aligned} dM &= P \cdot dv + dP \cdot v \\ dP &= \frac{EA}{\ell} du_e \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (8.60)$$

となる。また、降伏関数を次のように仮定する。

$$f(P, M) = \frac{M}{M_P} + \left(\frac{P}{P_Y}\right)^2 - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots (8.61)$$

ここで、M_P は部材弱軸回りの降伏曲げモーメントであり、P_Y は降伏軸力である。また、部材中央点において塑性ヒンジが形成されるとき、塑性流れ則を仮定すると次式を満足する。

$$df = \frac{\partial f}{\partial P} dP + \frac{\partial f}{\partial M} dM = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (8.62)$$

式(8.61)を応力で偏微分して得られた式及び式(8.60)を、式(8.62)に代入すると、

$$dP = -\frac{\dfrac{P}{M_P}}{\dfrac{2P}{P_Y^{\,2}} + \dfrac{v}{M_P}} dv \qquad \cdots\cdots\cdots (8.63)$$

が与えられる。数値解析では、まず、中央点の変位 dv を求め、その値を式(8.63)に代入して、dP を求める。この増分荷重を 1 ステップ前の P に加え、次ステップの荷重とする。

$$P_i = P_{i-1} + dP_i \qquad \cdots\cdots\cdots (8.64)$$

State：４　除荷範囲

　除荷の際、塑性変位成分は保持されるので、P=0 のときの残留ひずみは

$$\left.\begin{aligned} v &= \theta_P \frac{\ell}{4} \\ u &= \theta_P^{\,2} \frac{\ell}{8} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (8.65)$$

と表せる。その後、引張力が働くと釣合式は軸力の符号が変わって、

$$y = v\left\{\cosh kx - \coth\frac{k\ell}{2}\sinh kx\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.66)$$

$$u_\delta = v^2k^2\left[\frac{\ell}{4}\frac{1}{\sinh\frac{k\ell}{2}} + \frac{1}{2k}\coth\frac{k\ell}{2}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(8.67)$$

となる。上式が成立する範囲は

$$P \geq 0\ ,\ f(P,M) < 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(8.68)$$

である。

State：５　引張側崩壊曲線

軸力の符号が逆になるのみで、State３と同様の式で表せる。すなわち、次式となる。

$$\Delta P = \frac{\dfrac{P}{M_P}}{\dfrac{2P}{P_Y^{\ 2}} - \dfrac{v}{M_Y}}\Delta v \qquad \cdots\cdots\cdots(8.69)$$

State：６　引張降伏範囲

この領域は、引張降伏状態を表し、次式で表される。

$$\Delta P = \frac{E_2A}{\ell}\Delta u \qquad \cdots\cdots\cdots(8.70)$$

ただし、E_2は第二弾性係数とする。

トラス部材の弾塑性挙動は、上記の６つの状態で表すことになり、部材の幾何学的非線形性と組み合わせて、大変形弾塑性解析が実行される。

現在、SPACE に組み込まれている座屈を考慮したトラスモデルは、論文５，６に従って作成されたモデルである。詳細は、論文を参照されたい。また、使用にあたっては、制限があり、それも論文を参照されたい。

参考文献

1) 野中泰二郎、繰返し軸方向最荷を受ける部材の履歴挙動に関する閉解、昭和 58 年 12 月、日本建築学会論文報告集

２）五十嵐定義ほか、筋違付架構の復元力特性(その１), 昭和 47 年 6 月, 日本建築学会論文報告集
３）加藤勉・秋山宏、鋼構造筋違付骨組の復元力特性、昭和 52 年 10 月、日本建築学会論文報告集
４）鋼構造物の座屈に関する諸問題, 1992 年, 日本建築学会
５）柴田道生、中村武、若林稔、鋼構筋違付の履歴特性の定式化 その１　定式化関数の誘導、昭和 57 年 6 月、日本建築学会論文報告集
６）柴田道生、若林稔、鋼構筋違付の履歴特性の定式化　その２　応答解析への適用、昭和 57 年 10 月、日本建築学会論文報告集