第６章　塑性論アナロジーモデル

6.1 はじめに

固体の力学で発展した数理塑性論を、部材合応力の塑性理論に応用し、降伏則・流れ則・硬化則などを使用して、部材の構成則としてとらえたものをアナロジーモデルと呼ぶ。本章では、このアナロジーモデルの基本原理を述べ、SPACE でどのように実現しているかについて説明する。

最初、塑性論について簡単に復習し、最後に、アナロジーモデルについて述べる。

6.2 塑性ポテンシャルとひずみ硬化仮説

塑性状態の材料が、変形を生じるとき、その材料の応力$\{\sigma\}$が次の降伏条件を満足しているものとする。

$$f(\sigma)=c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.1)$$

ここで、cはひずみ履歴の関数を表し、またfは正値であり、外に向かって凸の関数とする。塑性理論では式(6.1)の降伏条件を塑性ポテンシャルとし、塑性ひずみ増分$\{\Delta\varepsilon^p\}$が次のように与えられるものとする。

$$\{\Delta\varepsilon^p\}=\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\Delta f \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.2)$$

ここで、gは比例係数である。

塑性ひずみ増分$\{\Delta\varepsilon^p\}$の中の比例係数や、Δfを具体的に設定するためには材料のひずみ硬化に関する仮説が必要である。一般にパラメータｃは次式で示す塑性仕事W^pの関数とする。

$$f(\sigma)=F\left(W^p\right) \quad ; \quad W^p=\int dW^p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.3)$$

ここで、ΔW^pは、式(6.2)を考慮して次式で表される塑性仕事増分である。

$$\Delta W^p=\{\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon^p\}=\frac{1}{g}\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\Delta f \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.4)$$

次に、塑性仕事増分を具体的に求めることにする。今、応力状態$\{\sigma\}$から計算される$f(\sigma)$の値を$\bar{\sigma}$とし、次式で定義される相当塑性ひずみ増分$\Delta\bar{\varepsilon}^p$を導入する。

$$\left.\begin{aligned}&\Delta W^p=\bar{\sigma}\Delta\bar{\varepsilon}^p\\&f=\bar{\sigma}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.5)$$

式(6.4)と(6.5)より、

$$\bar{\sigma} = F\left(\int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{p}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.6)$$

となり、また、$\bar{\sigma}$ は $\bar{\varepsilon}^{p}$ の関数であり、次式が成立するものとする。

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^{p}} = H' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.7)$$

上式は、$\bar{\sigma}$ のに $\bar{\varepsilon}^{p}$ 対する曲線の勾配を表しており、一軸状態のひずみ硬化率に相当する。

式(6.7)を式(6.2)に代入すると、塑性ひずみ増分は

$$\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\} = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} H' \Delta\bar{\varepsilon}^{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.8)$$

となる。ただし、

$$\Delta f = \Delta\bar{\sigma} = H' \Delta\bar{\varepsilon}^{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.9)$$

である。式(6.8)の左から $\{\sigma\}^{T}$ を掛け、少し整理すると、

$$\{\sigma\}^{T}\left\{d\varepsilon^{p}\right\} = dW^{p} = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{p} = \frac{1}{g}\{\sigma\}^{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} H' d\bar{\varepsilon}^{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.10)$$

となる。したがって、g は、上式より、次式で与えられる。

$$g = \frac{1}{\bar{\sigma}}\{\sigma\}^{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} H' = \frac{1}{\bar{\sigma}}\{\sigma\}^{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^{p}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.11)$$

6.3 塑性状態における構成式

弾性状態と同様に、塑性状態における応力とひずみの関係を表す構成方程式を求めることにする。塑性状態では、この関係は増分形で表すことになる。

まず、弾性状態における応力とひずみの関係を増分形式で表すことにする。

$$\left\{\Delta\varepsilon^{e}\right\} = \left[C^{e}\right]\{\Delta\sigma\} \quad ;or \quad \{\Delta\sigma\} = \left[D^{e}\right]\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.12)$$

ここで、$\left[C^{e}\right]$ は弾性の柔性係数であり、$\left[D^{e}\right]$ は同じく弾性の剛性係数である。塑性状態において、全ひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon\}$ は、弾性成分 $\left\{\Delta\varepsilon^{e}\right\}$ と塑性成分 $\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\}$ の和で与えられる。

$$\{\Delta\varepsilon\} = \left\{\Delta\varepsilon^{e}\right\} + \left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.13)$$

あるいは、

$$\left\{\Delta\varepsilon^{e}\right\}=\{\Delta\varepsilon\}-\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.14)$$

式(6.12)に、式(6.14)を代入すると、増分応力は、

$$\{\Delta\sigma\}=\left[D^{e}\right]\{\Delta\varepsilon\}-\left[D^{e}\right]\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.15)$$

となり、さらに、$\left\{\Delta\varepsilon^{p}\right\}$が式(6.2)で与えられているので次式となる。

$$\{\Delta\sigma\}=\left[D^{e}\right]\{\Delta\varepsilon\}-\frac{1}{g}\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\Delta f \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.16)$$

塑性状態が持続するとき、f の変化は、

$$\Delta f=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{\Delta\sigma\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.17)$$

であり、増分応力の式(6.15)を上式に代入すると、

$$\Delta f=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\{\Delta\varepsilon\}-\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\Delta f \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.18)$$

となり、Δf について解けば、次式となる。

$$\frac{1}{g}\Delta f=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\{\Delta\varepsilon\}}{g+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.19)$$

上式を式(6.16)に代入すると、応力とひずみの関係

$$\{\Delta\sigma\}=\left[D^{p}\right]\{\Delta\varepsilon\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.20)$$

が得られる。ここで、$\left[D^{p}\right]$は、塑性応力－ひずみ行列と呼ばれ、次式で表される。

$$\left[D^{p}\right]=\left[D^{e}\right]-\frac{\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]}{g+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.21)$$

式(6.11)の g を上式に代入すると、塑性応力－ひずみ行列は、

$$\left[D^{p}\right]=\left[D^{e}\right]-\frac{\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]}{\frac{1}{\bar{\sigma}}\{\sigma\}^{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}H'+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\left[D^{e}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.22)$$

となる。

6.4 アナロジーモデルの構成式（塑性流動則に従う場合）

前節で求めた塑性応力―ひずみ行列を基に、アナロジーモデルにおける同様の構成式を求める。

塑性論の応力とひずみに対応する、アナロジーモデルの合応力と変位は、

$$\{\sigma\}=\{N,M_y,M_z\} \quad ; \quad \{\varepsilon\}=\{u,\theta_y,\theta_z\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.23)$$

であり、また、増分応力と増分ひずみは、

$$\{\Delta\sigma\}=\{\Delta N,\Delta M_y,\Delta M_z\} \quad ; \quad \{\Delta\varepsilon\}=\{\Delta u,\Delta\theta_y,\Delta\theta_z\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.24)$$

で表される。

塑性論における降伏条件式をアナロジーモデルでも以下の式で表す。

$$f\left(N,M_y,M_z\right)=c$$

次に、降伏条件式の微分を、

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T=\left(\frac{\partial f}{\partial N},\frac{\partial f}{\partial M_y},\frac{\partial f}{\partial M_z}\right)=\left(f_n,f_{my},f_{mz}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.25)$$

で示す。

塑性流動則が成立する場合、式(6.22)の H' がゼロとなり、塑性応力―ひずみ行列は

$$\left[D^p\right]=\left[D^e\right]-\frac{\left[D^e\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\left[D^e\right]}{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\left[D^e\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.26)$$

となり、塑性域における増分応力と増分変位の関係は次式となる。

$$\begin{Bmatrix}\Delta N\\ \Delta M_y\\ \Delta M_z\end{Bmatrix}=\left[D^p\right]\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.27)$$

弾性状態における構成方程式は軸方向ばねと曲げばねが独立に挙動するとして、次式で表す。

$$\left[D^e\right]=\begin{bmatrix}k_x & 0 & 0\\ 0 & k_{\theta y} & 0\\ 0 & 0 & k_{\theta z}\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.28)$$

ここで、$k_x,k_{\theta y},k_{\theta z}$ は、各々軸方向ばね、y 軸と z 軸に関するばねである。

式(6.25)と(6.28)を式(6.26)に代入すると、塑性応力―ひずみ行列は、

$$
\left[D^p\right]=\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_{\theta y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta z} \end{bmatrix}
-\frac{1}{k_x f_n^2+k_{\theta y} f_{my}^2+k_{\theta z} f_{mz}^2}\begin{bmatrix} \left(k_x f_n\right)^2 & \left(k_x f_n\right)\left(k_{\theta y} f_{my}\right) & \left(k_x f_n\right)\left(k_{\theta z} f_{mz}\right) \\ \left(k_x f_n\right)\left(k_{\theta y} f_{my}\right) & \left(k_{\theta y} f_{my}\right)^2 & \left(k_{\theta y} f_{my}\right)\left(k_{\theta z} f_{mz}\right) \\ \left(k_x f_n\right)\left(k_{\theta z} f_{mz}\right) & \left(k_{\theta y} f_{my}\right)\left(k_{\theta z} f_{mz}\right) & \left(k_{\theta z} f_{mz}\right)^2 \end{bmatrix}
\qquad \cdots\cdots\cdots(6.29)
$$

となる。

材端変位と内部変位、材端応力と内部応力の関係は、

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta u=\Delta u_2-\Delta u_1;\quad \Delta\theta_y=\Delta\theta_{y2}-\Delta\theta_{y1};\quad \Delta\theta_z=\Delta\theta_{z2}-\Delta\theta_{z1} \\
\Delta N=\Delta N_2-\Delta N_1;\quad \Delta M_y=\Delta M_{y2}-\Delta M_{y1};\quad \Delta M_z=\Delta M_{z2}-\Delta M_{z1}
\end{array}\right\}\cdots(6.30)
$$

であり、上式を用いると材端変位と材端応力の関係が

$$
\{\Delta \mathrm{n}\}=\left[K^p\right]\{\Delta\mathbf{u}\} \qquad \cdots\cdots\cdots(6.31)
$$

ここで、

$$
\left.\begin{array}{l}
\{\Delta\mathbf{u}\}^T=\{\Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{x1} \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta\theta_{z1} \\
\qquad\qquad \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{x2} \quad \Delta\theta_{y2} \quad \Delta\theta_{z2}\ \} \\
\{\Delta \mathrm{n}\}^T=\{\Delta N_1 \quad \Delta Q_{y1} \quad \Delta Q_{z1} \quad \Delta M_{x1} \quad \Delta M_{y1} \quad \Delta M_{z1} \\
\qquad\qquad \Delta N_2 \quad \Delta Q_{y2} \quad \Delta Q_{z2} \quad \Delta M_{x2} \quad \Delta M_{y2} \quad \Delta M_{z2}\ \}
\end{array}\right\}\cdots(6.32)
$$

である。また、剛性行列$\left[K^p\right]$は、

$$
\left[K^p\right]=\begin{bmatrix}
k_x-\frac{\alpha^2}{\omega} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\beta}{\omega} & -\frac{\alpha\gamma}{\omega} & -\left(k_x-\frac{\alpha^2}{\omega}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha\beta}{\omega} & \frac{\alpha\gamma}{\omega} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & k_{\theta y}-\frac{\beta^2}{\omega} & -\frac{\beta\gamma}{\omega} & \frac{\alpha\beta}{\omega} & 0 & 0 & 0 & -\left(k_{\theta y}-\frac{\beta^2}{\omega}\right) & \frac{\beta\gamma}{\omega} \\
 & & & & & k_{\theta z}-\frac{\gamma^2}{\omega} & \frac{\alpha\gamma}{\omega} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\gamma}{\omega} & -\left(k_{\theta z}-\frac{\gamma^2}{\omega}\right) \\
 & & & & & & k_x-\frac{\alpha^2}{\omega} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\beta}{\omega} & -\frac{\alpha\gamma}{\omega} \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & k_{\theta y}-\frac{\beta^2}{\omega} & -\frac{\beta\gamma}{\omega} \\
 & & & & & & & & & & & k_{\theta z}-\frac{\gamma^2}{\omega}
\end{bmatrix}
\qquad \cdots\cdots\cdots(6.33)
$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}&\alpha = k_x f_n;\quad \beta = k_{\theta y} f_{my};\quad \gamma = k_{\theta z} f_{mz}\\&\omega = k_x f_n^2 + k_{\theta y} f_{my}^2 + k_{\theta z} f_{mz}^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6.34)$$

である。

SPACE には、アナロジーモデルの降伏条件として、次の３つの型が組み込まれている。

$$\left.\begin{aligned}&f = \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2} - 1\\&f = \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 - 1\\&f = \left|\frac{N}{N_p}\right| + \sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2} - 1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6.35)$$

ここで、 N_p, M_{yp}, M_{zp} は各々降伏軸力、y、z 軸に関する降伏曲げモーメントである。式(6.35)の第１式の降伏条件式の微分は、

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{my} \\ f_{mz} \end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(6.36)$$

$$\left.\begin{aligned}&f_n = \frac{2N}{N_p^2}\\&f_{my} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2}}\frac{M_y}{M_{yp}^2}\\&f_{mz} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2}}\frac{M_z}{M_{zp}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6.37)$$

となる。

同様に、式(6.35)の第２式の降伏条件式の微分は、

$$\left.\begin{aligned}&f_n = \frac{2N}{N_p^2}\\&f_{my} = \frac{2M_y}{M_{yp}^2}\\&f_{mz} = \frac{2M_z}{M_{zp}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6.38)$$

となる。

また、式(6.35)の第３式の降伏条件式の微分は、

$$
\left.
\begin{aligned}
f_n &= \frac{\pm 1}{N_p^2} \\
f_{my} &= \frac{2M_y}{M_{yp}^2} \\
f_{mz} &= \frac{2M_z}{M_{zp}^2}
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (6.39)
$$

となる。

6.5 アナロジーモデルの構成方程式（ひずみ硬化がある場合）

SPACE Ver.3.00 では、ひずみ硬化については扱っておらず、次期のバージョンにおいて搭載予定である。説明も次期バージョンで行う。