第２章　静的解析

2.1 はじめに

本章では、スペースフレームの静的解析システム（SPACE）に搭載されている静的解析ソルバーについて解説する。このソルバーは、幾何学的非線形性を考慮した弾塑性解析を行うものである。ここでは、システムで使用している増分法、ニュートン・ラフソン法、変位増分法、及び弧長法について説明する。

2.2 非線形増分釣合式

非線形方程式の解を求める場合、一般に増分区間で行うことが多い。各増分区間で得られる解は、当然直線解ではないので一回の計算では誤差が生じる。この誤差を力で表現すると不釣合い力であり、この不釣合い力を十分に小さくする手法が各増分ステップで採用される。この手法として、反復計算を必要とし、誤差を十分小さくした後、次のステップに進む。

静的釣合を表す非線形方程式は、一般的に次式で表される。

$$\{\phi(u)\} = \{K(u)\} - \{P\} = \{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(2.1)$$

ここで、$\{P\}$は荷重ベクトルであり、$\{K(u)\}$は非線形剛性で、次式で与えられる。

$$\{K(u)\} = \int_V \delta(\varepsilon)^T \sigma dV \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(2.2)$$

ベクトルεとσはひずみと応力であり、$\delta(\ldots)$は変分を意味する。上式を増分形式で表すと、

$$\begin{aligned}\{\Delta\phi(u)\} &= \{\phi(u+\Delta u)\} - \{\phi(u)\} \\ &= \{K(u+\Delta u)\} - \{K(u)\} - \{\Delta P\} = \{0\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(2.3)$$

ここで、$\{\Delta u\}$と$\{\Delta P\}$は増分変位と増分荷重である。上式を整理すると

$$\{\Delta\phi(u)\} = \{\Delta K(u,\Delta u)\} - \{\Delta P\} = \{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(2.4)$$

であり、上式中の$\{\Delta K(u,\Delta u)\}$は、$\{\Delta u\}$で整理すると、

$$\begin{aligned}\{\Delta K(u,\Delta u)\} &= \{K(u+\Delta u)\} - \{K(u)\} \\ &= [K_T]\{\Delta u\} + \psi(\Delta u)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(2.5)$$

である。ただし、$\{\Delta P\}$は変位が$\{u\}$から$\{u+\Delta u\}$に移る間の増分荷重である。式(2.5)を(2.4)に代入すると増分形の静的釣合式が

$$\{\Delta\phi(\Delta u)\} = [K_T]\{\Delta u\} + \{\psi(\Delta u)\} - \{\Delta P\} = \{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

として得られる。ここで、$[K_T]$は接線剛性行列であり、また、$\{\psi(\Delta u)\}$は、増分変位$\{\Delta u\}$に関する高次項を表す。

2.3 増分法と修正増分法

増分釣合式である式(2.6)の非線形項$\{\psi(\Delta u)\}$を無視し、次のように線形の増分釣合式を考える。

$$[K_T]\{\Delta u\} = \{\Delta P\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.7)$$

一般的な増分法では、上の増分釣合式を解くことによって増分変位$\{\Delta u\}$を求め、次のステップに移っていく。この増分変位を足すと変位ベクトルは、

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \{\Delta u\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.8)$$

となり、次のステップでは、この変位ベクトル$\{u\}_{i+1}$を用いて接線剛性$[K_T]$を作り直す。幾何学的非線形を考慮した弾性部材の接線剛性$[K_T]$は、

$$[K_T] = [K_L] + [K_G(u_i)] + [K_N(u_i)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.9)$$

として表される。ここで、$[K_L]$は線形剛性行列、$[K_G]$は幾何剛性行列、$[K_N]$は大変位剛性行列と呼ばれており、第 4 章で有限要素法を用いて求める。増分法では、このステップを次々と行うことによって、非線形方程式を解くことになる。

増分法では、増分を非常に小さくしない限り、誤差が集積し、大変位状態では、大きな誤差が生じてしまうことになる。そこで、増分法を少し修正して用いる方法が提案されている。この手法は修正増分法と呼ばれ、以下にその概略を示す。

まず、得られた変位ベクトル$\{u\}_i$を非線形の釣合式(2.1)に代入する。

$$\{\phi(u_i)\} = \{P\} - \{K(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.10)$$

上式は、非線形性を有するために、一般的に$\{\phi(u_i)\}$はゼロベクトルにはならず、誤差を生じる。そこで、この誤差ベクトルを次のステップで解消するために、次ステップの増分釣合式を変更する。ただし、SPACE では、非線形剛性$\{K(u_i)\}$の替わりに、弾塑性解析を考慮して部材の材端応力$\{Q(u_i)\}$を用いる。したがって、式(2.10)は、

$$\{\phi(u_i)\} = \{P\} - \{Q(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.11)$$

となり、このベクトルが不釣合い力と呼ばれる。不釣合い力$\{\phi(u_i)\}$を次のステップで解消するために、次ステップの増分釣合式を以下のように変更する。

$$\left[K_T\right]\{\Delta u\}=\{\Delta P\}+\{\phi(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.12)$$

この方程式を解くことによって、増分変位が得られるが、明らかに式(2.7)で得た増分変位ベクトルとは異なり、前ステップの誤差を解消している。修正増分法は、ここで得た増分変位を繋げることで、非線形方程式の解としている。

2.4 荷重増分法と変位増分法

静的な釣合式は、荷重パラメータλを用いて、次式で表す場合が多い。以後は、この形式を用いることにする。

$$\{\phi(u)\}=\lambda\{P\}-\{K(u)\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.13)$$

増分荷重パラメータ$\Delta\lambda$を用いた修正荷重増分法は、式(2.12)より

$$\left[K_T\right]\{\Delta u\}=\Delta\lambda\{P\}+\{\phi(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.14)$$

となる。

荷重増分法は、増分荷重パラメータ$\Delta\lambda$を適宜設定し、式(2.14)を解く事によって増分変位$\{\Delta u\}$を求める。

$$\{\Delta u\}=\left[K_T\right]^{-1}\left\{\Delta\lambda\{P\}+\{\phi(u_i)\}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.15)$$

上式で増分変位が求められるためには、接線剛性行列の逆行列$\left[K_T\right]^{-1}$が得られることが条件となる。求められない場合は、骨組が分岐座屈や屈服座屈を生じるときであり、特別な扱いが必要である。ただし、<u>SPACEでは、この特別の扱いを考慮していないので注意が必要である。</u>

骨組に大変位が生じるとき、一般に同じ増分荷重に対しても増分変位が大きくなり、解析誤差が大きくなることがある。そこで、増分荷重パラメータを先に設定する替わりに、任意点の変位Δu_sを増分することで、増分荷重パラメータを逆に求める手法が考えられており、変位増分法と呼ばれている。まず、釣合式を次の２式に分解する。

$$\left.\begin{aligned}\left[K_T\right]\{\Delta u_1\}&=\{P\}\\ \left[K_T\right]\{\Delta u_2\}&=\{\phi(u_i)\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.16)$$

上の２式の解を、各々$\{\Delta u_1\}$と$\{\Delta u_2\}$とすると、設定した任意点の増分変位Δu_sは、

$$\Delta u_s = \Delta\lambda \Delta u_{1s} + \Delta u_{2s} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.17)$$

で与えられる。したがって、$\Delta\lambda$ 及び $\{\Delta u\}$ は、次式で求められる。

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\lambda = (\Delta u_s - \Delta u_{2s})/\Delta u_{1s} \\ &\{\Delta u\} = \Delta\lambda\{\Delta u_1\} + \{\Delta u_2\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.18)$$

SPACE では、この手法によって変位増分法を実現している。

2.5 ニュートン・ラフソン法と修正ニュートン・ラフソン法

修正増分法では、増分値はかなり小さい値にしなければ誤差が生じる。そこで、非線形の増分釣合式は、式(2.13)、(2.14)より

$$\{\Delta\phi(\Delta u)\} = \Delta\lambda\{P\} + \{\phi(\Delta u)\} - [K_T]\{\Delta u\} = \{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.19)$$

となり、これを反復計算で精度良く解く事になる。

反復 k 回の近似増分変位 $\{\Delta u\}_k$ は、以下の式で更新されるものとする。

$$\{\Delta u\}_{k+1} = \{\Delta u\}_k + \{\delta\Delta u\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.20)$$

また、n 回で収束すると、変位ベクトル $\{u\}_{i+1}$ と荷重 λ_{i+1} は、

$$\left.\begin{aligned} &\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \{\Delta u\}_n \\ &\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.21)$$

で表され、$\{\delta\Delta u\}$ は更新増分変位ベクトルと呼ばれる。

反復計算の初期値として、前ステップで得られた変位 $\{u\}_i$ とその荷重 $\lambda_i\{P\}$ に対し、非線形項を無視した修正増分法の釣合式が用いられる。

$$[K_T]\{\delta\Delta u\} = \Delta\lambda\{P\} + \{\phi(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.22)$$

ただし、上式中の不釣合い力 $\{\phi(u_i)\}$

$$\{\phi(u_i)\} = \lambda_i\{P\} - \{Q(u_i)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.23)$$

は前ステップの応力 $\{Q(u_i)\}$ から計算されている。式(2.22)を解いて得た更新増分変位 $\{\delta\Delta u\}$ を近似増分変位 $\{\Delta u\}_1$ の初期値とすると、

$$\{\Delta u\}_1 = \{\delta\Delta u\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.24)$$

新しい近似増分変位が得られる。この変位 $\{\Delta u\}_1$ を用いて計算された不釣合い力は、

$$\{\phi(u_i + \Delta u_1)\} = (\lambda_i + \Delta\lambda)\{P\} - \{Q(u_i + \Delta u_1)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.25)$$

となり、次の反復式は、次式となる。

$$[K_T]\{\delta\Delta u\}=\{\phi(u_i+\Delta u_1)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.26)$$

さらに、ｋ回の反復では、反復式は上式より

$$[K_T]\{\delta\Delta u\}=\{\phi(u_i+\Delta u_k)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.27)$$

となり、不釣合い力は、式(2.25)より

$$\{\phi(u_i+\Delta u_k)\}=(\lambda_i+\Delta\lambda)\{P\}-\{Q(u_i+\Delta u_k)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.28)$$

なる。

式(2.27)における接線剛性$[K_T]$は、ニュートン・ラフソン法では、式(2.9)を参考に、

$$[K_T]=[K_L(u_i+\Delta u_k)]+[K_G(u_i+\Delta u_k)]+[K_N(u_i+\Delta u_k)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.29)$$

となり、反復ステップ毎に更新されることになる。ここでは、弾性部材であれば、$[K_L]$は常に一定であるが、弾塑性を考慮すると変化するため、変位に依存する値とした。後は、このステップを続けることによって、不釣合い力が小さくなり、精度の良い非線形解が得られることになる。

収束判定は種々の方法があるが、SPACE では閾値εと比較する次式を用いる。この条件を満たすとき反復計算を終えて次ステップに進む。

$$\varepsilon\ge\frac{\sqrt{\sum\{\delta\Delta u\}^2}}{\sqrt{\sum\{\Delta u\}_{i+1}^2}} \quad ;or \quad \varepsilon\ge\frac{\sum|\{\delta\Delta u\}|}{\sum|\{\Delta u\}_{i+1}|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.30)$$

接線剛性$[K_T]$は、必ずしも式(2.29)を用いる必要はない。例えば、初期剛性である$[K_L]$を用いても良い。ただし、収束が遅くなる場合や、収束しない場合があるかもしれない。

SPACE では、接線剛性$[K_T]$を求めるとき、次式のように前ステップで得た変位$\{u\}_i$を用い、反復時には変更しない手法を適用する。

$$[K_T]=[K_L(u_i)]+[K_G(u_i)]+[K_N(u_i)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.31)$$

この手法は、修正ニュートン・ラフソン法と呼ばれている。

2.6 弧長法クリスフィールド法

本節では、SPACE で用いている弧長法について述べる。最初は、増分型の非線形釣合式から始める。非線形釣合式は、

$$[K_T]\{\delta\Delta u\}=\Delta\lambda\{P\}+\{\phi(u_i)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.32)$$

であり、$\{\phi(u_i)\}$ は不釣合い力ベクトルを表す。増分変位 $\{\Delta u\}_{k+1}$ 及び増分荷重パラメータ $\Delta\lambda_{k+1}$ は、以下の式で更新されるものとする。

$$\left.\begin{aligned}\{\Delta u\}_{k+1} &= \{\Delta u\}_k + \{\delta\Delta u\}\\ \Delta\lambda_{k+1} &= \Delta\lambda_k + \delta\Delta\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.33)$$

また、n 回で収束すると、次のステップでの変位ベクトル $\{u\}_{i+1}$ と増分荷重 λ_{i+1} は、

$$\left.\begin{aligned}\{u\}_{i+1} &= \{u\}_i + \{\Delta u\}_n\\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i + \Delta\lambda_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.34)$$

で表すものとする。ただし、釣合式の数より、未知数 $\{\Delta u\}$ と $\Delta\lambda$ の数が多くなるため、更新増分変位 $\delta\Delta u$ と増分荷重 $\delta\Delta\lambda$ に次のような制限を加え、釣合式と同時に解くことを考える。

$$f(\delta\Delta\lambda, \delta\Delta u) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2.35)$$

増分型の釣合式(2.32)を 2 式に分解し、次のように解を求めることにする。

$$\left.\begin{aligned}\{\delta\Delta u_1\} &= [K_T]^{-1}\{P\}\\ \{\delta\Delta u_2\} &= [K_T]^{-1}\{\phi(u_i)\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.36)$$

したがって、釣合式の解である更新増分変位ベクトルは、

$$\{\delta\Delta u\} = \delta\Delta\lambda\{\delta\Delta u_1\} + \{\delta\Delta u_2\} \qquad \cdots\cdots\cdots(2.37)$$

として得られる。ここで、$\{\delta\Delta u\}$ と $\delta\Delta\lambda$ には、制限式(2.35)が存在する。ここでは、具体的に制限式として、超円を表す次式を用いる。

$$f(\delta\Delta\lambda, \delta\Delta u) = \{\Delta u\}_{i+1}^T\{\Delta u\}_{i+1} + \left(\beta\Delta\lambda_{i+1}\right)^2 - \Delta l^2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2.38)$$

ここで、β は荷重に対するスケールファクターであり、Δl は増分値であり、超円の半径を表す。式(2.38)に式(2.33)と(2.37)を代入すると、

$$\begin{aligned}\{\Delta u\}_{i+1}^T\{\Delta u\}_{i+1} &= \left(\{\Delta u\}_i + \delta\Delta\lambda\{\delta\Delta u_1\} + \{\delta\Delta u_2\}\right)^T\left(\{\Delta u\}_i + \delta\Delta\lambda\{\delta\Delta u_1\} + \{\delta\Delta u_2\}\right)\\ &= \left(\{\Delta u\}_i + \{\delta\Delta u_2\}\right)^T\left(\{\Delta u\}_i + \{\delta\Delta u_2\}\right)\\ &\quad + 2\left(\{\Delta u\}_i + \{\delta\Delta u_2\}\right)^T\{\delta\Delta u_1\}\delta\Delta\lambda\\ &\quad + \left(\delta\Delta\lambda\right)^2\{\delta\Delta u_1\}^T\{\delta\Delta u_1\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(2.39)$$

$$\begin{aligned}\left(\beta\Delta\lambda_{i+1}\right)^2 &= \beta^2\left(\Delta\lambda_i + \delta\Delta\lambda\right)^2\\ &= \beta^2\left(\left(\Delta\lambda_i\right)^2 + 2\Delta\lambda_i\delta\Delta\lambda + \left(\delta\Delta\lambda\right)^2\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(2.40)$$

となり、$\delta\Delta\lambda$ で整理すると、次のような二次式が得られる。

$$a\left(\delta\Delta\lambda\right)^2+2b\delta\Delta\lambda+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.41)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}
a&=\left(\left\{\delta\Delta u_1\right\}^T\left\{\delta\Delta u_1\right\}+\beta^2\right)\\
b&=\left(\left\{\delta\Delta u_1\right\}^T\left(\left\{\Delta u\right\}_i+\left\{\delta\Delta u_2\right\}\right)+\beta^2\Delta\lambda_i\right)\\
c&=\left(\left(\left\{\Delta u\right\}_i+\left\{\delta\Delta u_2\right\}\right)^T\left(\left\{\Delta u\right\}_i+\left\{\delta\Delta u_2\right\}\right)+\left(\beta\Delta\lambda_i\right)^2-\Delta l^2\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.42)$$

である。二次方程式(2.41)を $\delta\Delta\lambda$ について解くと

$$\delta\Delta\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.43)$$

として、$\delta\Delta\lambda$ が得られる。この $\delta\Delta\lambda$ を式(2.37)と(2.33)に代入することで、更新する増分変位ベクトルと増分荷重が得られる。二次方程式における 2 つの解のうち、どちらを選択するかは、第 i+1 次の増分変位ベクトルと第 i 次の増分変位ベクトルが次式で示す交差角度のうち、小さいほうの値 $\delta\Delta\lambda$ を採用する。

$$\theta=\arccos\left(\frac{\left\{\Delta u\right\}_i^T\left\{\Delta u\right\}_{i+1}}{\left|\left\{\Delta u\right\}_i\right|\left|\left\{\Delta u\right\}_{i+1}\right|}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.44)$$

SPACE では、弧長法における収束条件も、ニュートン・ンラフソン法と同様に、式(2.30)を用いている。