



第 13 章 材料非線形性の追跡方法とその過程で生じる特異現象について

13.1 はじめに

構造物の非線形解析では、線形解析のように適切な結果が常に求められるわけではない。時には、解析途中で破綻をきたし、結果が得られない場合もある。求めた結果に誤差が多く含まれ、適切でない場合もある。ここでは、どのような状況で解析の破綻や誤差の集積が生じるのかについて考えてみよう。

構造解析における非線形性は、幾何学的な条件と材料特性に依存する場合とに分けられる。無論、同時に考慮しなければならない構造物も存在する。ここでは、立体骨組の弾塑性解析、座屈解析、動的解析において、特に材料非線形を追跡する過程で生じる各部材の変位や応力の誤差、あるいは数値解析が破綻するような特異な現象などを取りあげ、事例を挙げて紹介する。

現在、構造物の非線形解析は一般に増分法が用いられ、荷重増分法、変位増分法、弧長法など多くの方法が開発され、使用されている。増分法は、各増分間では変位や応力・ひずみなどが十分小さいことを前提に理論が組み立てられている。この前提が崩れるとき誤差が発生し、集積して適切な解から乖離することになる。時には解析途中で破綻し、無意味な結果をもたらす。

このような状況がどのようにして生じるのか、また、どのような結果をもたらすのか。これらについて次節以降で詳細に述べる。

13.2 骨組部材の履歴特性

立体骨組は線材と呼ばれる部材によって構成され、また、骨組に含まれる床や耐震壁などの面材は何らかの仮定を用いて 1 次元材に置換され、使用される。これらの線材は次に示す要素で弾塑性特性を表現する。

- (1) ファイバー要素
- (2) 塑性論アナロジー要素
- (3) バネ要素
- (4) マルチスプリング要素
- (5) MSS 要素 など

弾塑性履歴は塑性論アナロジー要素を除いて 1 変数で表され、骨格曲線（バックボーンカーブ）と履歴ループ規則によって表現される。骨格曲線は、バイリニア、トリリニアなど直線を結合して定義する区分線形

化手法と、R0 モデルや HD モデルなど曲線で表す方法がある。ここでは、一般に良く用いられる区分線形化した骨格曲線に限定して考察する。履歴ループ規則も同様で、直線によるものと曲線によって表すものが存在し、多くのループ規則が提案されている。ここでも直線の結合で表されるループ規則について考える。

区分線形化で表された履歴規則を用いて釣合位置を追跡すると、図-1 のように交点を介して直線 A から B に乗り移る部分が必ず存在する。増分法で構造物を解析すると、その過程で折れ曲がり点を飛び越して増分応力や増分ひずみが得られる。折れ曲がり点である c 点に乗るように増分値を調節する方法もあるが、構造物内に多くの履歴モデルが内在する場合は、この種の方法は効率的ではない。また、計算コストと競合するため増分値を無制限に小さくできるものでもない。

多くのプログラムでは、この種の小さな飛び越しに対する適切な対処法が考案され、一般には有用な結果を得ている。逆に、この対処法が適切でないと各種の誤差が生じることになる。以下に各種の対処法と誤差について、また、この対処法に関連して履歴ループを追跡する過程で生じる特異な現象について述べる。

13.3 履歴特性の追跡で生じる誤差の原因

最初に、単純な飛び越しによる誤差発生メカニズムについて考えてみよう。ここでは、部材断面内のファイバー履歴について考察する。ただし、この応力とひずみに関する考察をバネの応力と変位に置き換え、理解しても良い。

第 n ステップの応力とひずみは、図 3-1 の a 点で示され、 $(\sigma_a, \varepsilon_a)$ とする。次ステップ増分解析によって、応力とひずみは a 点の接線剛性 E_a を用いて $(\sigma_b, \varepsilon_b)$ となる。この応力とひずみは、履歴の折れ点である c 点を飛び越え、b 点に達している。そのため増分応力と増分ひずみの内、c 点から b 点までの応力-ひずみの釣合経路は不適切である。この釣合経路に対して何も対処しない場合、その後の応力-ひずみ履歴は B' 線上をたどることになり、さらに釣合経路が複雑になるに従ってこのような飛び越しが多く発生し、結果的に誤差が蓄積する。

次に、一般に良く用いられる対処法につい

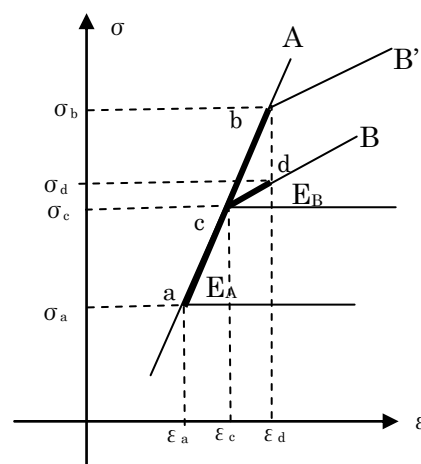


図 13-1 折れ曲がり点における飛び越

て述べる。図 3-1 のように剛性の大きい線分から小さい線分に移る際、増分ひずみは変更せず、線分 B との交点 d を次ステップの釣合位置となるように増分応力を調整する。その結果、応力—ひずみの履歴は、a 点から c 点を経由して d 点に至ると変更される。この方法で見かけ上、釣合経路は A 線分から B 線分に移ったことになる。

この対処法では、主に 2 種の誤差が発生する。ひとつは、応力 σ_c から σ_d 間では、接線剛性係数が E_B にもかかわらず、 E_A を使用して釣合状態が求められており、他の要素や部材との応力配分が適切でなく、ここに誤差が存在する。ふたつには、その際のひずみは他の要素と適合している（ファイバー断面であれば、法面保持を満足する）が、応力 $(\sigma_b - \sigma_d)$ は、他の要素との力の釣合が取れなくなっている。例えば、この増分応力を用いて計算した軸力や曲げモーメントは、結合する部材との力の釣合が取れていない。そこで、通常、この不釣合力を増分荷重と共に次ステップで荷重とみなして解除する。

この手法を用いると一見正しい結果が得られているようであるが、実は、材料非線形解析は非可逆性を有することから、ここにも誤差が生じることがある。例えば最終荷重状態が同じでも、荷重経路が異なると必ずしも同じ結果が得られるとはいえず、そのため不釣合力を利用してこのファイバーに蓄積されている過剰な応力 $\sigma_b - \sigma_d$ を解除しても、応力—ひずみの釣合経路が異なることから、必ずしも適切な解が得られているとはいえないことになる。

ただし、増分ひずみや増分応力が小さい場合

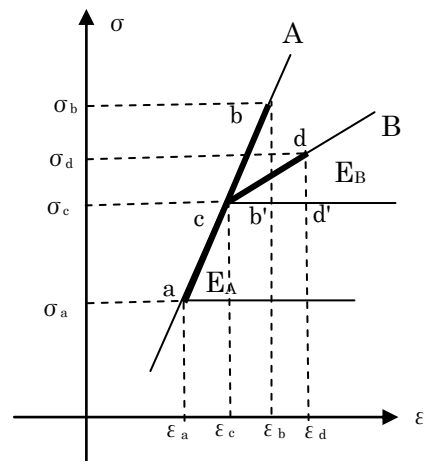


図 13-2 ひずみエネルギーを同一

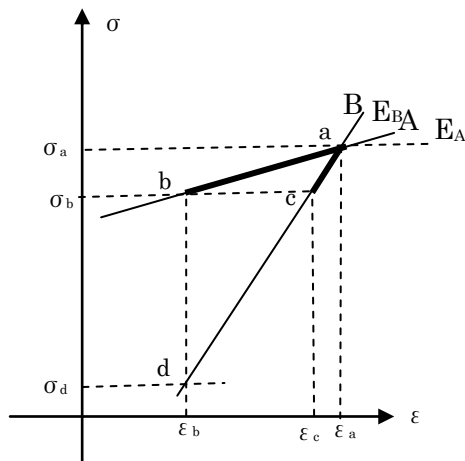


図 13-3 除荷点における誤差

はこれらの誤差は非常に小さく、全体の挙動に与える影響はほぼないといつて良い。そのため、ほとんどの解析モデルには適切な結果が得られることになる。

線分 A の剛性が線分 B の剛性に比較して非常に

大きい場合、前記の方法では不釣合応力はかなり大きくなる。この大きな不釣合応力が全体の挙動に影響を与えると思われる場合、異なった対処法を用いることになる。図 3-2 のように折れ点以後の増分応力と増分ひずみによる三角形の面積 (c, b, b') と (c, d, d') (これはひずみエネルギーを意味する) を同一にするように、増分ひずみと増分応力を同時に調整する。その結果、前の方法に比較して不釣合応力は小さくなる。ただし、増分ひずみが増加するため、ファイバー断面では法面保持が保たれなくなる。

最後に、増分ひずみの進行方向が逆転する除荷の状態を考える。図 3-3 では、線分 A 上をひずみが正方向に進んできたとし、ここで、除荷によって増分ひずみが負となったとする。除荷が生じたその瞬間では、接線剛性は E_A であり、解析で求めた釣合位置は b 点となる。ここでは、ファイバーは既に塑性域に、あるいはバネでは第 2、第 3 剛性となっているとし、接線剛性 E_A は線分 B の除荷後の剛性 E_B に比較して非常に小さいとする。この場合、増分ひずみはかなり大きくなり、第 1 の方法では不釣合応力 $\sigma_d - \sigma_b$ も大きくなることが予想される。そこで、新たな方法として、増分応力を元に接線剛性 E_B を用いて増分ひずみを調整する手法を用いる。ただし、この場合不釣合力は発生しないが、ひずみが不適合となり、動的解析のように何度もひずみの進行方向が逆転する場合は、誤差が蓄積することになる。

特に、鉄骨や鉄筋の履歴で塑性後勾配をほぼゼロとすると、除荷時の増分ひずみが非常に大きくなる場合がある。特殊ではあるが、その時点の増分ひずみと増分応力をゼロとし、増分値をスキップする方法も用いられている。

以上のように、区分線形化した応力-ひずみ履歴を追跡する場合、折れ点を飛び越す際に、どのような対処法をとったとしても、応力かひずみ、あるいは両者にいくらかの誤差が発生する。一般には増分変位や増分荷重あるいは増分時間を十分小さくすることで、これらの誤差は全体の挙動に影響することなく、また集積も小さく、結果的に適切な応答が得られている。ただし、特殊な条件下では、これらの誤差は全体挙動に影響を与え、解析途中で計算が破綻をきたす場合もある。次節以降では、これらの例について考える。

増分法は、増分値が小さく、飛び越しも同様に小さいことを前提に成立している。しかし、増分値が小さくても、ファイバーやバネの増分量が

13.4 飛び越し対処 によって数値解析が 破綻をきたす例

比較的大きくなると飛び越し部分で誤差が発生し、異常な現象が見られることもある。また、解析自体が破綻し、数値計算を続行できなくなることもある。

荷重増分や変位増分を十分小さくしても、ファイバーやバネの増分値が大きくなる場合として、以下に代表的な例を挙げる。

- 1) 飛び越しや除荷時の処理が不適切
- 2) 内部に不安定な構造要素を含む骨組の解析
- 3) ファイバーやバネの剛性で軟化領域を有する骨組の解析

区分線形化で釣合経路が交点を通る際、解析の都合で飛び越しの発生と除荷時に誤差が生じることは先に述べた。特に、交点を挟んだこの2つの線分の剛性に大きな差があるとき、時にはひとつの剛性係数がほぼゼロとなるような場合、飛び越しと除荷時の処理が適切でないと大きな増分変位や不釣合力が発生する。

例えば、図4-1のように除荷時の処理が不適切で、次の折れ点を飛び越すほど増分変位が大きくなると、ここでも、どのような処理を行うかによって以後の解析結果に大きく影響を与える。例えば、求めたc点から、次のステップはC'線分に載り解析を進めるのか、もしくは再度d点で折れ曲がる処理を行い、釣合位置をe点に進めるかによって異なる結果が得られる。あるいは、d点で止めてしまうプログラムもある。

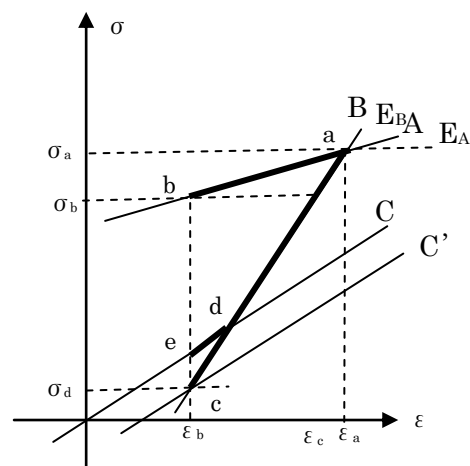


図13-4 次の折れ曲がり点を飛び越す場合

大きな不釣合力を解除すると、先に述べた不可逆性の誤差だけでなく、場合によっては、この不釣合力は増分荷重より大きな値を有することになり、次ステップでは思いもよらない解析結果が得られることもある。いずれにしても、このような大きな増分変位や不釣合力は解析結果に悪い影響を及ぼす原因となる。

飛び越しや除荷時の処理方法はプログラムによって異なる。荷重増分や変位増分を少し大きくとって解析し、その結果を分析することで、どのような処理方法を用いているかを検証すると良い。プログラムの特徴を理解する上で有効な手段となり得る。

- * ファイバーやバネの増分値が大きくなる場合として上に述べた「内部に不安定部材を含む骨組」や「剛性で軟化領域を有する部材」の解析では、さらに注意を払う必要がある。次節ではこれら

について述べる。

全体が不安定となるような全体座屈や局所的な座屈を生じる骨組、あるいは塑性ヒンジによってメカニズムが発生する骨組では、接線剛性が特異となり、行列式の値がゼロとなる釣合点が釣合経路上に存在する。釣合曲線上のこの点は分岐点あるいは屈服点と呼ばれ、特別な処理を組み込んだプログラムでないとこの点を通り抜けることはできない。

一般的なプログラムでは、この種の特別な処理を組み込んでいないため、最大耐力を求めたり、分岐座屈荷重を求めたりするために、代替的手法として小さな初期不整を挿入する。この方法によって釣合経路は特異点近傍を通ることになり、接線剛性は偽特異となる。特異点近傍では、ひとつもしくは数個の固有値がゼロに近似し、対応する固有モードは他の変位モードに比較して大きな変位を生じる。このように接線剛性の任意の固有値がゼロに近似するときや、ゼロを通過して負の値となる場合、その釣合経路の近傍では小さな増分変位や増分荷重でも、その固有ベクトルに対応する部材は大きな変位を伴う。結果、ファイバーの応力一ひずみ履歴やバネの履歴で大きな誤差が発生し、時には追跡が破綻することになる。

固有値ゼロ近傍では、増分荷重が自動的に小さくなる手法を用いるのが有効である。例えば、弧長法は増分荷重と増分変位の和が一定となるように解析を進めるため、上記の状態でも有効な方法である。ただし、ここでは、この種の話題には触れないことにする。

接線剛性がゼロ固有値を持つのは、全体座屈や塑性メカニズムによって骨組全体が不安定となる場合だけではない。例えば、局所的に一本の部材に 3 つの塑性ヒンジが発生してメカニズムを構成したときとか、軸方向剛性がゼロとなるなどがある。この状態でも接線剛性はゼロ固有値を有しており、この種の局所的な不安定要因が解析破綻の原因となる場合が多い。

次に、このような事例として両端ピン指示の柱材についてファイバー断面を用いた弾塑性座屈解析を実施し、解析破綻の要因を考察する。

事例：1 両端ピン支持のオイラー座屈の解析（長柱と短柱）

ここでは、最も単純な柱の弾塑性座屈と座屈後解析を行い、ファイバーの応力状態によっては解析が破綻することを示す。

使用する解析モデルは図 5-1 に示す両端ピン支持の柱であり、断面は

13.5 内部に不安定部材を含む骨組の解析

H型で弱軸方向の座屈を解析する。細長比は、 $\lambda = 60$ (非弾性)、 $\lambda = 180$ (弾性) の2種類で行うが、実際のH型断面を用いるため、細長比は $\lambda = 56$ と $\lambda = 176$ となる。部材の分割は10分割、初期変位は部材長さの1/1000を与えるものとする。

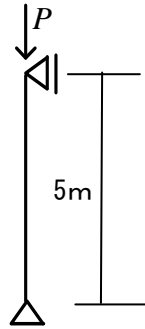


図13-5 解析モデル

鋼材の特性

SS400

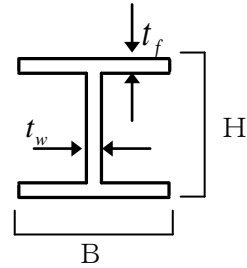
 $\sigma_y : 24.5 \text{ kN/cm}^2$ $E : 20500 \text{ kN/cm}^2$ 

図13-6 解析モデルで使用する断面

使用するH形鋼の断面特性

 $\lambda = 60$ のとき

SS400 H-350×350×12×19

 $A = 170.44 \text{ cm}^2$ $I = 13581.58 \text{ cm}^4$ $i_y = 8.93 \text{ cm}$ ($\lambda = 56$) $\lambda = 180$ のとき

SS400 H-248×124×5×8

 $A = 31.44 \text{ cm}^2$ $I = 254.46 \text{ cm}^4$ $i_y = 2.84 \text{ cm}$ ($\lambda = 176$)

次に、各解析モデルの座屈荷重を求める。

1) $\lambda = 60$ について (非弾性座屈)

解析モデルは両端ピン支持なので座屈長さは $l_k = l$ であり、細長比が60となるために、断面二次半径として以下の値となる断面が必要となる。

$$i_y = \frac{l_k}{\lambda} = \frac{500}{60} = 8.33 \quad \dots\dots\dots(12.1)$$

部材リストから $i_y = 8.33$ に近い部材を選択する。ここでは $i_y = 8.93 \text{ cm}$ ($\lambda = 56$) の部材を使用する。鋼材 SS400 の基準F値は $24.5 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$ であり、限界細長比 λ_p は次の値となる。

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{20500}{0.6 \times 24.5}} = 117.3$$

$\lambda = 56$ は $\lambda \leq \lambda_p$ (非弾性) であり、従って、 $\lambda = 56$ の座屈荷重 P_{cr} は、基準 F 値に断面積を掛けることによって次式で求められる。

$$P_{cr} = \sigma_y \cdot A = 24.5 \times 170.4 = 4174.8 \text{ kN}$$

また、弾性座屈荷重は次式で与えられる。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 20500 \cdot 13581.6}{500^2} = 10991.0 \text{ kN}$$

$$P_E / P_{cr} = 2.63$$

解析に使用したプログラムには、分岐座屈に対し特殊な処理を組み込んでいない。そのため、この種の分岐問題をそのままの状態で解くと、解析が破綻する。そこで、少しの初期変位を与えてこれを回避する。解析に必要となる初期変位は部材中央で 0.5cm とし、他の節点では、Sin 関数で初期変位を仮定する。

2) $\lambda = 180$ について (弾性座屈)

解析モデルは同じなので $l_k = l$ であり、断面二次半径は

$$i_y = \frac{l_k}{\lambda} = \frac{500}{180} = 2.77$$

となり、従って、 $i_y = 2.77$ に近い部材を選ぶ。ここでは $i_y = 2.84 \text{ cm}$ ($\lambda = 176$) の部材を使用する。座屈荷重はオイラー座屈荷重を用いると次の値となる。また、解析で用いる初期変位は前のモデルと同じである。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 20500 \cdot 254.46}{500^2} = 205.9 \text{ kN}$$

座屈解析は、幾何学的非線形性を考慮しなければならないので、解析手法として「幾何学的非線形弾塑性解析」を用いる。また、鉄骨材料の応力-ひずみ関係で、第2勾配は第1剛性の1/10を使用する。

両モデルの解析結果を図13-7と13-8に示す。両図共に、左上が部材中央部の断面内の応力状態を示し、また左下がフランジの履歴を、右上

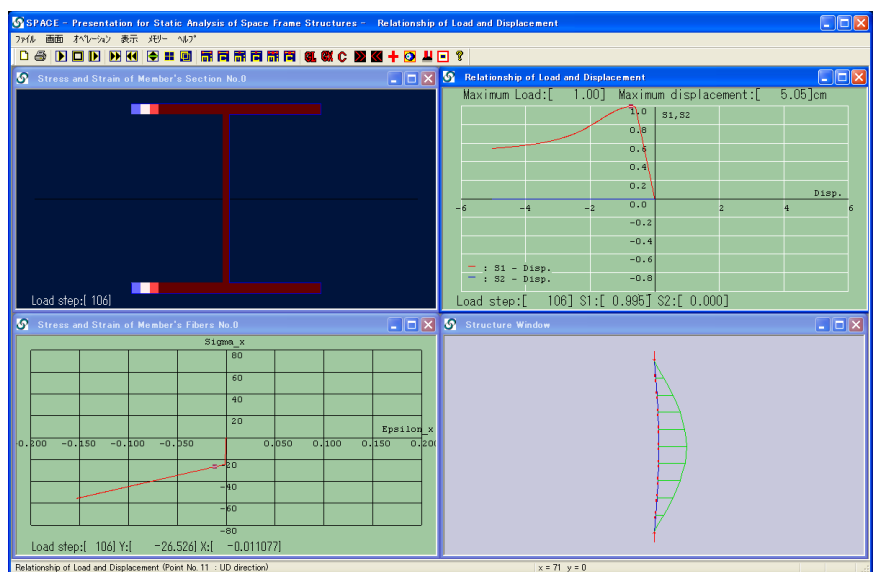


図 13-7 柱の非弾性座屈・座屈後解析 ($\lambda = 56$; 鉄骨第2剛性あり)

が解析モデル頂部の軸方向変位と荷重の関係、右下は座屈時の変形と曲げモーメントを表す。この 2 つの図形が示すように解析結果は適切であるといえる。

次に、この 2 つの解析モデルに対し、鉄骨材料特性の第 2 勾配をゼロとし、他は全て同じ条件で、再度、幾何学的非線形弾塑性解析を実施する。解析結果が、図 13-9 及び 13-10 に示されている。

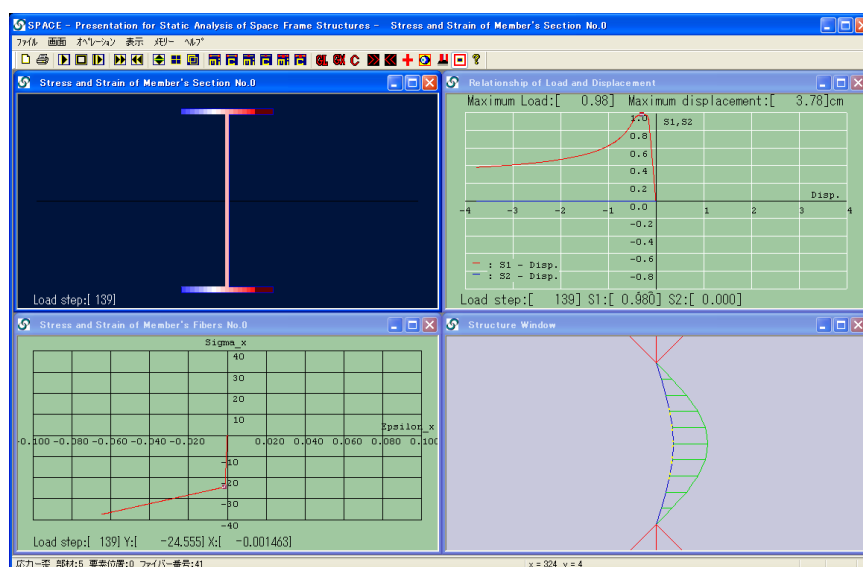


図 13-8 柱の弾性座屈・座屈後解析 ($\lambda = 176$; 鉄骨第 2 剛性あり)

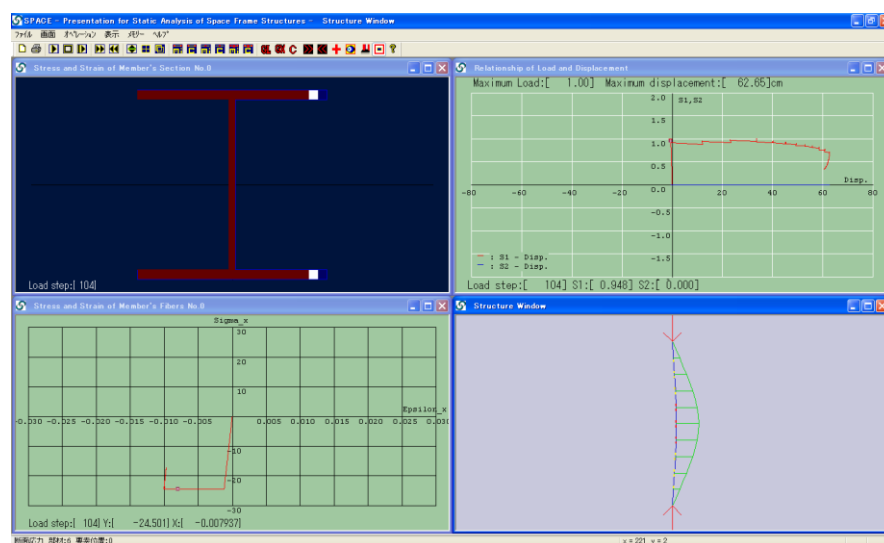


図 13-9 柱の非弾性座屈・座屈後解析 ($\lambda = 56$; 鉄骨第 2 剛性ゼロ)

図 13-9 の右上の図から分かるように、軸方向変位が極端に大きくなっており、明らかに解析は途中で破綻をきたしている。その原因は、同図左上の断面内の応力から分かるように、解析モデルが短柱であるため、座屈前に断面のファイバーが全て塑性状態となる（微小な初期不整を与えているため、座屈前に少し曲げモーメントが発生している）。その結果、ファイバーの第 2 剛性がゼロであるため、ファイバー断面内で積分して得る軸方向剛性はほぼゼロとなり、これが原因で接線剛性は偽特異となる。次ステップの解析で増分荷重に比較して軸方向の増分変位が非常に大きな値となるため、ファイバー応力の履歴を適切に追跡できず、

ここで数値解析は破綻することになる。

図13-10に見られるように、長柱の解析結果は適切に得られている。座屈後曲げが進行して、同図左上のようにフランジはほぼ塑性領域に達するが、ウェッブ部分は弾性のまま残るため軸方向剛性はゼロにはならない。そのため柱部材の軸方向剛性が残り、適

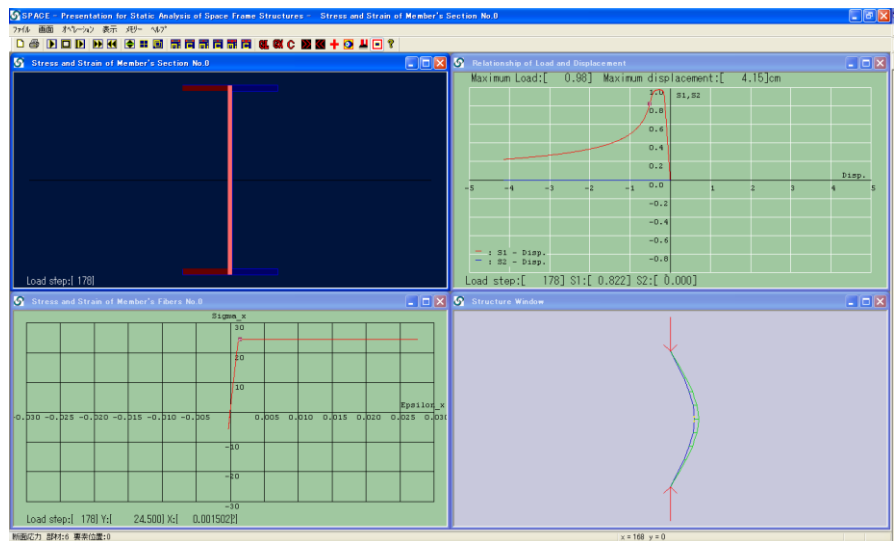


図13-10 柱の弾性座屈・座屈後解析 ($\lambda = 176$; 鉄骨第2 剛性ゼロ)

切な解析結果が得られている。もし中立軸がずれてウェッブ部分も塑性化すると、前のモデルと同様に軸方向剛性が極端に小さくなり解析途中で破綻をきたすことになる。一方強軸方向の座屈解析では、座屈後ウェッブの一部が弾性として残るが、他の部分が塑性化するため軸方向剛性が極端に小さくなり、この場合も解析が破綻する可能性がある。

13.6 骨組内に軟化部材・軟化バネを有する解析

コンクリートの圧壊後や、柱・耐震壁のせん断耐力後、あるいは鉄骨ブレースの座屈後の挙動を考慮する解析では、履歴の中に剛性が負勾配の軟化領域を有することになる。骨組にこのような部材を含むと適切な解が直ぐには得られないことがある。その際、解析条件を変えながら思考錯誤を繰り返すことになる。ここでは軟化領域を含む部材で構成された骨組の解析では、応力-ひずみ履歴が軟化に進行するとどのような現象が生じるかについて述べる。

弾塑性解析を実施する際、ある部材の履歴特性が正勾配から負勾配に変化する瞬間、他のファイバーの履歴追跡が正常であるにもかかわらず、その履歴の釣合経路で応答が振動して前に進まないことがある。例えば、振動状態に陥ると耐震壁のせん断バネはせん断耐力に達したにもかかわらず軟化領域に進まず、せん断剛性を維持した状態でせん断力を負担する。結果、骨組全体の水平耐力が過剰に評価されることになる。

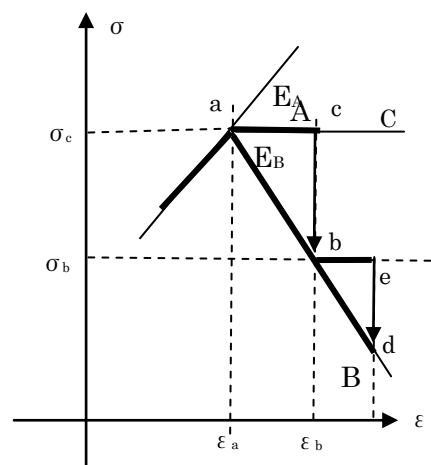


図13-11 階段上に増分解析を行う

耐震壁や柱のせん断バネの履歴特性が正勾配から負勾配に変化する瞬間、振動して釣合点が前に進まない現象は、当該せん断剛性の絶対値が曲げ剛性に比較して大きい場合に多く現れる。そこで、この振動現象を避けるために、図 13-11 のように、負勾配をゼロに近い正勾配とみなして増分解析を行い、次のステップで不釣合力を解除するという方法がある。

図 13-11 をファイバーの履歴とすれば、線分 A の a 点で最大耐力となり、後は B 線の軟化履歴となる。上記の方法ではファイバーの剛性を線分 C のようにほぼゼロとし、増分解析を行う。得られた増分変位によって釣合位置は c 点となったとすると、線分 B の勾配を用いて b 点を求め、応力 σ_b を得る。次に、不釣合力 $\sigma_b - \sigma_a$ は次のステップで解除する。後は軟化領域である線分 B が終了するまでこの手法を繰り返すことになる。

この手法は比較的有効であるが、常に良い結果が得られるとは限らない。増分変位が小さい場合は有効であるが、逆に何らかの影響で増分変位が大きくなり、しかも負の勾配が大きいと不釣合力は非常に大きくなり、その解除で解析が破綻するという場合も発生する。次に、簡単なモデルを用いてこの現象を実際に検証してみよう。

事例：2 鉄筋コンクリート柱の曲げ降伏とせん断バネの降伏

ここでは、柱のクリアスパンによって曲げ破壊とせん断崩壊との関連を調査し、軟化剛性を有するせん断バネの追跡が困難になる場合があることを示す。

まず、軸力と曲げモーメントを受ける鉄筋コンクリート柱の数値解析を行い、その結果を分析する。特に、柱のせん断破壊を考慮したモデル化を行い、クリアスパンを変化させて破壊モードの変化と最大耐力を分析する。

柱の解析モデルはせん断破壊を考慮した独立柱を使用する。この部材モデルは、図 13-12a に示すように、両端にファイバー要素が配置され、また、中央にはせん断破壊を考慮した剛塑性バネが付加されており、他は弾性部材である。また、部材の下端は固定境界、上端は曲げ拘束され、水平方向変位と鉛直方向変位は自由とす

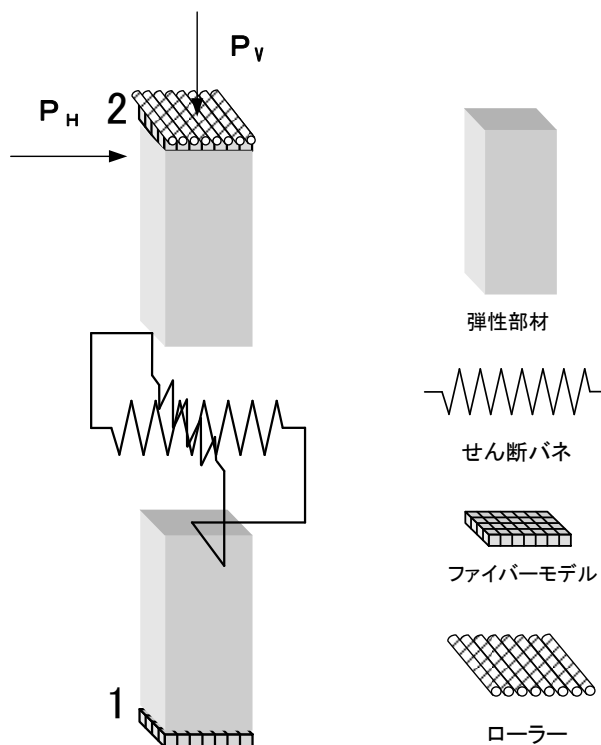
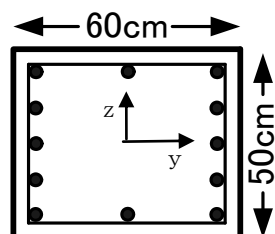


図 13-12a 解析モデル

る。柱の断面はその諸元と共に図 6-2b に示されている。

荷重はモデル上端に鉛直荷重と水平荷重を加える。ここでは、鉛直荷重は長期軸力 $P_v = 637 \text{ kN}$ とする。



$$b = 50 \text{ [cm]}, \quad D = 60 \text{ [cm]}$$

$$F_c = 2.4 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

かぶり厚 4 [cm]

鉄筋重心まで 5.25 [cm]

主筋 SD345、12-D25

せん断補強筋 SD295A、D10@100

図 13-12b 柱断面とその諸元

せん断破壊を考慮した剛塑性バネの履歴特性は、図 6-3 に示すように原点指向型モデルとする。この履歴特性の代表値は次式で示される。

せん断第 1 剛性（初期剛性）

$$K_1 = \frac{GA}{1.2 \cdot l}$$

せん断第 2 剛性（せん断ひび割れ後剛性）

$$K_2 = b_1 \cdot l \quad (\text{ex}; b_1 = 1/10)$$

せん断第 3 剛性（せん断強終局強度後剛性）

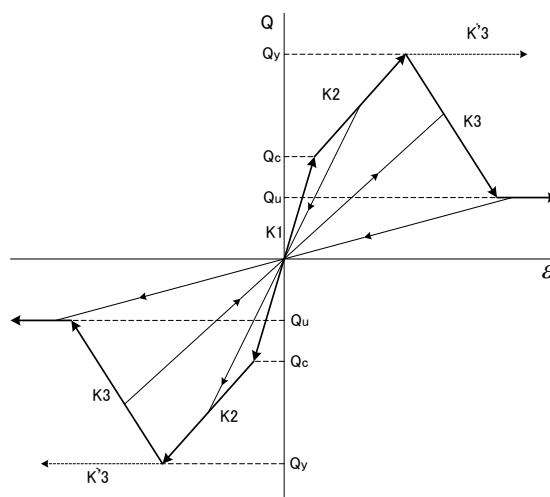
$$K_3 = b_2 \cdot K_1 \quad (\text{ex}; b_2 = -0.05)$$

ひび割れせん断強度

$$Q_{c1} = (1/2) \cdot Q_y$$

残存せん断耐力

$$Q_u = 0.3 \cdot Q_y$$



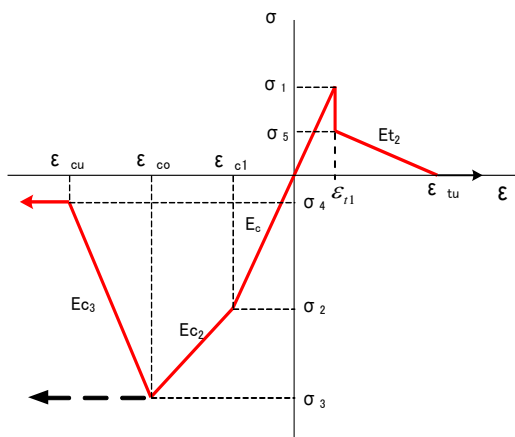


図 13-14a コンクリートの履歴特性

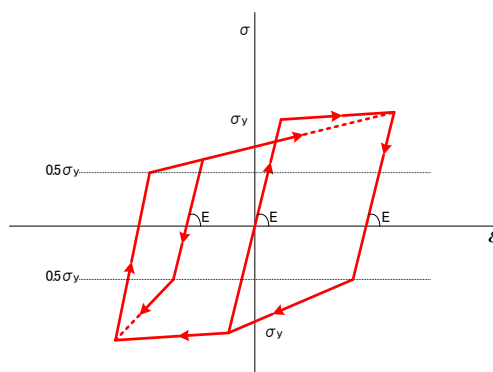


図 13-14b 鉄筋の履歴特性

数値解析を実施する前に、対象となる柱がどのような破壊形式となるかについて検討する。解析モデルは両端曲げ固定であるため、曲げ破壊時におけるせん断力 Q_{my} とはり両端の曲げモーメント M_y との関係は、次式で与えられる。

$$Q_{my} = 2 \cdot M_y / l$$

上式の曲げモーメントとして、軸力がある場合の曲げ終局強度式（式(6.2)-(6.4)）を用いると、 Q_{my} は曲げ破壊を生じる際のせん断力となる。なお、曲げ終局強度 M_y は、軸力の大きさによって次の3種に分類されている。

1) $N_{\max} \geq N > 0.4bDF_c$ のとき、

$$M_y = \left(0.8a_t \cdot \sigma_y \cdot D + 0.12b \cdot D^2 \cdot F_c \right) \left(\frac{N_{\max} - N}{N_{\max} - 0.4b \cdot D \cdot F_c} \right)$$

2) $0.4bDF_c \geq N \geq 0$ のとき、

$$M_y = 0.8a_t \cdot \sigma_y \cdot D + 0.5N \cdot D \cdot \left(1 - \frac{N}{b \cdot D \cdot F_c} \right)$$

3) $0 > N \geq N_{\min}$ のとき、

$$M_y = 0.8a_t \cdot \sigma_y \cdot D + 0.4N \cdot D$$

ここで、 N_{\max} と N_{\min} は軸力のみが加わった際の圧縮側と引張側の耐力であり、次式で与えられる。

$$N_{\max} = b \cdot D \cdot F_c + a_g \cdot \sigma_y$$

$$N_{\min} = -a_g \cdot \sigma_y$$

また、上で用いた記号は以下の意味である。

F_c : 設計基準強度 (コンクリート圧縮強度 σ_B) [N/mm^2]

a_t : 引張側主筋断面積 [mm^2]

a_g : 主筋全断面積 [mm^2]

σ_y : 鉄筋の降伏点強度 [N/mm^2]

D : 柱断面せい b : 柱断面幅 [mm]

柱のせん断終局強度 Q_y として、以下に示す平均側の値 (式 (6.6)) と安全側の値 (式 (6.7)) となる修正大野・荒川式を用いる (単位を N, mm とした実験式)。どちらを選択するかは、使用者が選択することになる。

$$Q_y = \left\{ \frac{0.068 p_t^{0.23} (F_c + 18)}{M/(Qd) + 0.12} + 0.85 \sqrt{p_w \sigma_{wy}} + 0.1 \sigma_0 \right\} \cdot bj \quad [N]$$

平均側の値

$$Q_y = \left\{ \frac{0.053 p_t^{0.23} (F_c + 18)}{M/(Qd) + 0.12} + 0.85 \sqrt{p_w \sigma_{wy}} + 0.1 \sigma_0 \right\} \cdot bj \quad [N]$$

安全側の値

上で用いた記号は以下の意味である。

p_t : 引張鉄筋比 [%]

F_c : 設計基準強度 (コンクリートの圧縮強度) [N/mm^2]

$M/(Qd)$: せん断スパン比 ただし、 $1 \leq M/(Qd) \leq 3$

d : 柱の有効せい [mm]

p_w : あばら筋 (せん断補強筋) 比 (小数)

σ_{wy} : あばら筋 (せん断補強筋) の降伏点強度 [N/mm^2]

σ_0 : 平均軸方向応力度 = N/bD [N/mm^2] で $0.4F_c$ 以下としているので $N > 0.4bDF_c$ では、利用できないことに注意をしなければならない。

b : はり幅 [mm]

j : 応力中心間距離 $0.8D$

なお、 M と Q は設計時応力を基本とするが、地震時の M と Q の分布

を想定し、” 内法長さ/2d” を設定する

図 13-15 は、クリアスパンを 5cm ずつ変化させて、 Q_{my} と Q_y (式(13.7)を使用)を計算し、その値を図示したグラフである。図から分かるように、クリアスパン 245cm 以下で、柱はせん断破壊することになる。また、この値以上では曲げ破壊が先行し、その後、鉄筋の第 2 勾配などによってせん断力が増加し、その結果、せん断終局強度に達すると、せん断破壊が生じる。この破壊モードは曲げせん断破壊と呼ばれる。一方、せん断終局強度に達しない場合は曲げ破壊となる。

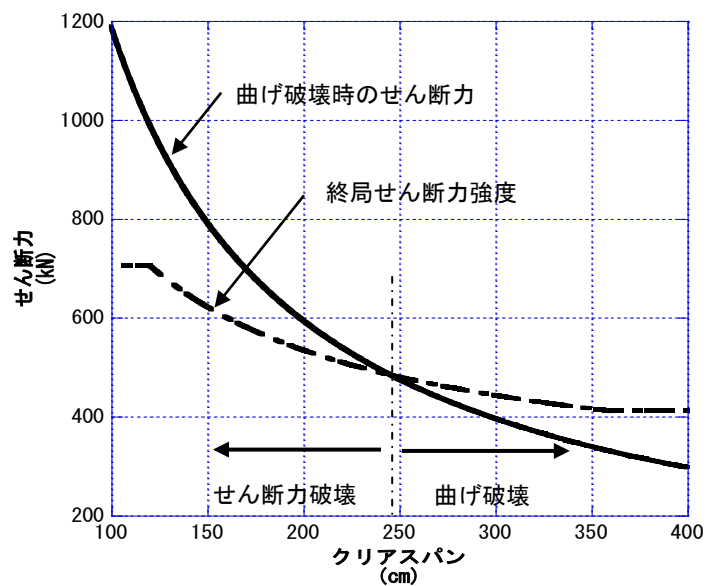


図 13-15 クリアスパンに対するせん断終局強度

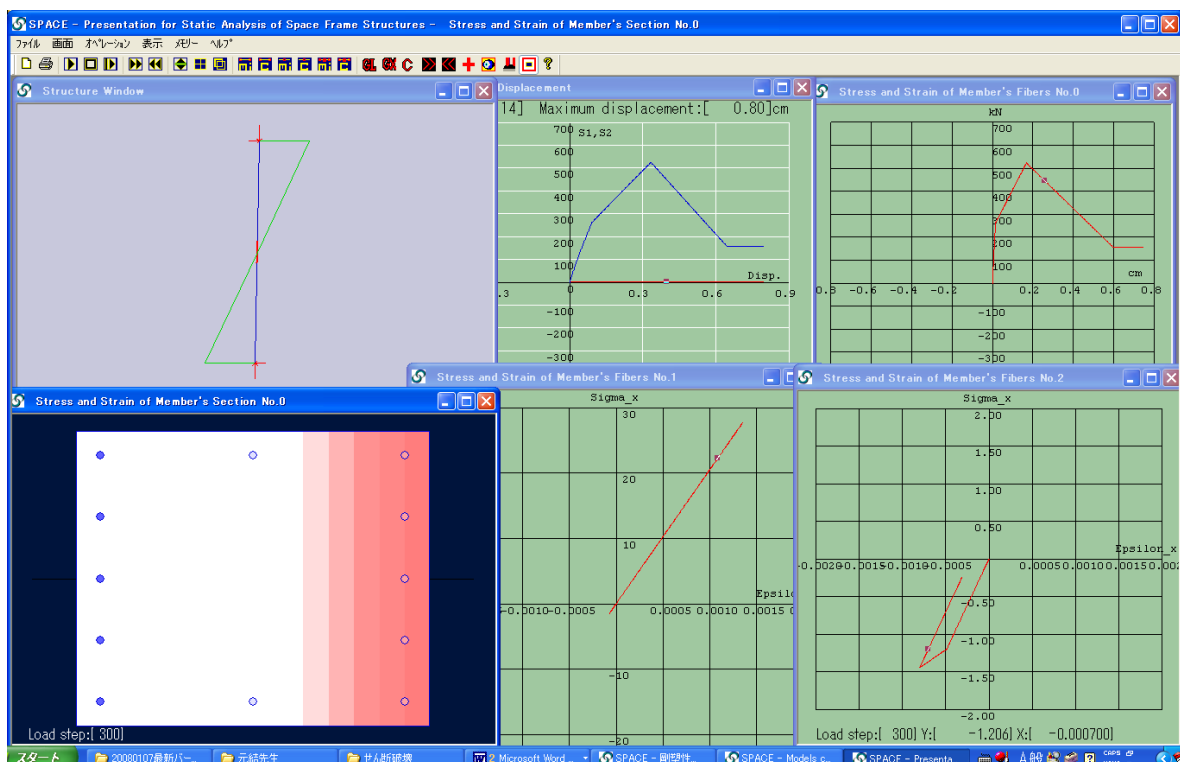


図 13-16 クリアスパン 200 モデルの解析結果
(せん断バネ破壊直後、鉄筋第 2 勾配あり、コンクリート軟化考慮せず)

ここでは、解析モデルを次の 2 種とし、柱の破壊挙動を分析する。一つ目はせん断破壊する事例、二つ目は曲げせん断破壊する事例である。

この 2 種のモデルはクリアスパンを 200cm と 300cm として設定する。

次にこの 2 種類の解析モデルについて弾塑性解析を実施し、以下にその結果を分析する。

最初は、クリアスパン 200 のモデルに関する弾塑性解析の結果が図 6-6 に示されている。同図の左上は柱の曲げモーメント図、中上の図は柱上部の荷重と水平変位の関係を、右上の図は柱中央部におけるせん断バネのせん断力ー変位履歴を示す。また、左下の図は柱脚の断面内応力を表し、中下は引張側鉄筋の応力ーひずみ履歴を、最後に右下の図はコンクリートの圧縮側縁部の応力ーひずみ履歴を示す。

同図より分かるように柱は、クリアスパンが短いため、曲げモーメントが曲げ終局強度に達する前にせん断破壊を生じている。荷重ー変位関係によれば、このモデルはひび割れせん断耐力を超えて第 2 勾配になった後、せん断終局強度に達するとせん断破壊が発生して耐力を低下させている。せん断破壊を生じると、せん断バネの剛性は軟化となり、そのため柱全体の水平方向剛性は負勾配となる。この負勾配領域における釣合状態では、水平変位は増加するが、逆に部材両端の回転角は減少して曲げモーメントが小さくなることから、圧縮側のコンクリート応力も引張鉄筋の応力も除荷となり、鉄筋は降伏していない。

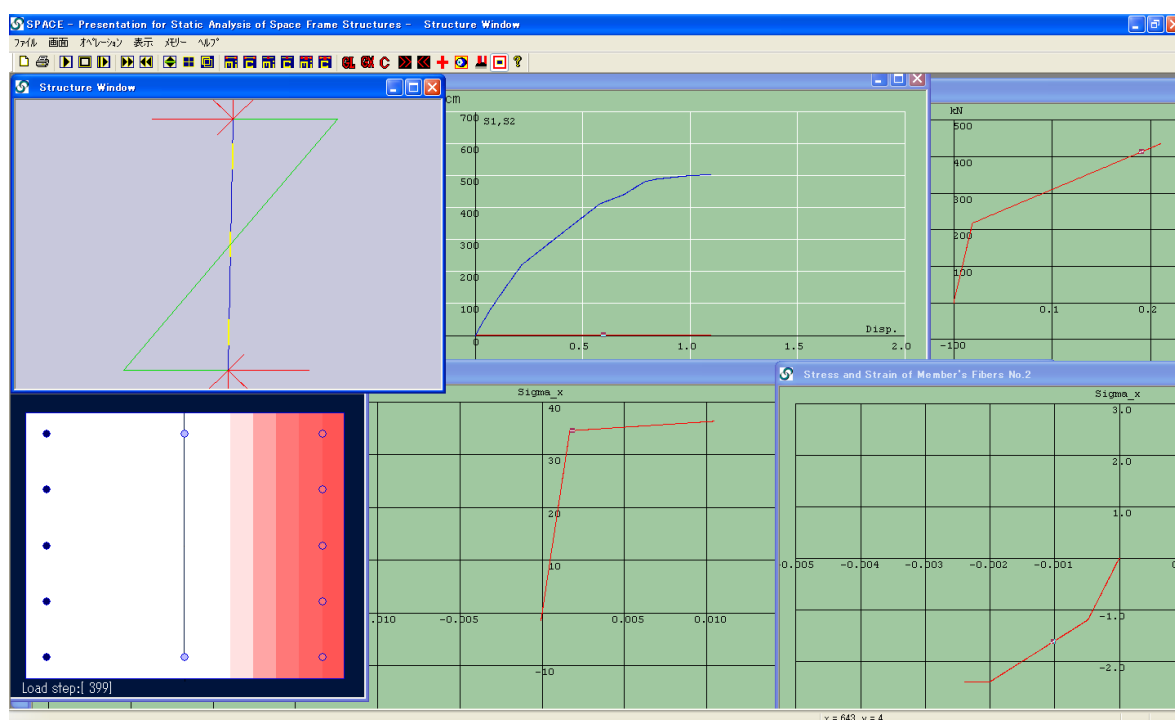


図 13-17 クリアスパン 300 モデルの解析結果
(引張鉄筋降伏時、鉄筋第 2 勾配あり、コンクリート軟化考慮せず)

解析結果より分かるように、先にせん断破壊を生じる場合は、せん断バネが軟化となっても増分変位に従って履歴を十分に追跡できている。

次に、クリアスパン 300cm のモデルに関する弾塑性解析結果について述べる。このモデルの解析結果が図 6-7 に示されている。同図の配置は図 6-6 と同一であり、曲げ破壊を起こした後、せん断破壊が発生している。

左下の断面内の応力状態及び下中央の図よりわかるように、引張鉄筋が降伏して柱の曲げ終局強度を迎えた後、このモデルではひずみ硬化によって引張鉄筋は第2勾配の剛性を有しており、柱の負担せん断力は増加している。その結果コンクリートの圧縮ひずみは大きくなり、右下の図に見られるようにコンクリートの圧縮強度を超え、最終的に柱の水平剛性をなくしている。しかしながら、柱上部の荷重と水平変位の関係から分かるように、コンクリートの圧壊以前に、せん断破壊が生じているが、その後の負担せん断力は、前のモデルのように急激な低下が得られておらず、せん断破壊後の挙動を適切に評価しておらず、間違った結果となっている。

この現象はせん断バネの履歴を検証することによって理解される。同図の右上のせん断力-変位関係図によれば、釣合経路はひび割れせん断耐力を超えて第2勾配に移動し、最大耐力には至っている。その後、せん断バネは軟化領域に入り、負担せん断力を低下させなければならない。しかしながら、解析結果ではせん断バネの履歴を追跡することができず、せん断バネの耐力点で釣合が振動状態となっている。そのため、柱の水平耐力は増加し、最終的に、コンクリートの圧縮側が圧壊して柱の水平剛性を失っている。

このようにバネやファイバーの履歴に軟化領域を含むとその移行点で、増分解析で求めた解によって、このバネの状態が載荷と除荷を繰り返し、振動して前に進めないことがある。特に、その柱の曲げ剛性が塑性ヒンジの発生などで低下した後バネの軟化領域に達すると、このような現象が生じ易いことが経験的に分かっている。

ファイバーやバネなどで発生する剛性の急激な変化は、動的解析の結果にも特異な現象を生じさせ、ときには解析を破綻させる。ここでは、どのようなメカニズムで特異な現象が発生するかを分析する。

弾塑性挙動は各種のファイバーや有限要素あるいはバネによって表

13.7 剛性の変化 による応答への影 響

され、その履歴特性は区分線形化されているものとする。次式は構造物全体における振動方程式の一部を表し、剛性が変化する前の状態を示す。ここで、変位 y_0 は構造物全体の振動状態を表し、比較的周期が長く、ゆっくりと変動しているものとする。

$$m\ddot{y}_0 + c\dot{y}_0 + k_0 y_0 = f(t)$$

次に、時刻 t で、このファイバーの剛性が k_0 から $k_0 + k$ に変化すると、この部分の振動方程式は次式となる。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + (k_0 + k)y = f(t)$$

時刻 t 秒以降における変位を、次のように構造物全体の変位 y_0 と剛性が変化することによって生じる変位 Y に分離する。

$$y = y_0 + Y$$

式(7-3)を式(7-2)に代入すると、

$$m(\ddot{y}_0 + \ddot{Y}) + c(\dot{y}_0 + \dot{Y}) + (k_0 + k)(y_0 + Y) = f(t)$$

となり、変位 Y について整理すると、

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + (k_0 + k)Y = f(t) - m\ddot{y}_0 - c\dot{y}_0 - k_0 y_0 - ky_0$$

となる。ここで、変位 y_0 は構造物全体の変位によるものであり、変位 Y の影響をほとんど受けないとすると、 t 秒後も式(7-4)の右辺は、

$$m\ddot{y}_0 - c\dot{y}_0 - k_0 y_0 = f(t)$$

が成立するため、結果、剛性変化による変位 Y に関する方程式が下式のように得られる。

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + (k_0 + k)Y = -ky_0$$

荷重 ky_0 が非常に局所的であるため、上式は部材レベルあるいは部材を含んだ局所的な振動状態を表す。そのため上式における固有周期は骨組全体の周期に比較してかなり短いことが予測される。そこで、変位 Y の変化に比べ、変位 y_0 はゆっくりと変化するとし、 Y の振動時間内では一定と考えて良く、上式はステップ荷重 $-ky_0$ が加わる振動方程式を表すことになる。

部材やバネが塑性化して剛性が低下し、折れ点を通過するとき、また、除荷となって剛性が復帰したときに、上式で示されるように全体変位の上にその部分の近傍で高振動数の波が雑音のように載ることになる。こ

の波の特徴は、全体変位に比較して高周波で、しかも剛性の変化が激しいと、大きなステップ荷重が加わるため、振幅が大きくなることである。

式(7-5)が支配する質量と構造物全体の質量に大きな差がある場合や、ステップ荷重 $-ky_0$ が全体の剛性に比較して小さい場合では、剛性の変化による応答は全体挙動に影響を与えることはなく、一般の構造物の弾塑性解析ではこのことによって解析が破綻するようなことはないといっている。ただし、上記の条件を満たさないような解析モデルでは、このステップ荷重の応答によって適切な解が得られない場合がある。次にはステップ荷重の応答に大きく影響を受け、解析が破綻する事例を紹介する。

事例：3 衝突用バネを有するせん断系モデルの動的解析（名城大学松井研究室より提供）

ここでの目的は、材料非線形性によって剛性が極端に変化する際、大きなステップ荷重により全体挙動の解析が破綻する事例を示し、その要因を分析することにある。

表 13-1 せん断系モデルの剛性と質量

階・層	質量 (重量 kN)	第1 剛性 (kN/cm)	第2 剛性 (kN/cm)	第1 折れ点せん 断力 kN
5	0.01	10.0	0.1	10.0
4	0.01	10.0	0.1	10.0
3	0.01	10.0	0.1	10.0
2	0.01	10.0	0.1	10.0
1	0.01	10.0	0.1	10.0

このモデルは、簡単な5層のせん断型モデルであり、第2層の床部分に衝突を模擬したバネが付加されている。せん断バネの履歴は最大点指向型のバイリニアとしており、その特性値は表 7-1 に示されている。なお、これらの値はテスト用であり、現実の構造物を模擬したデータではない。

骨組の横には壁があり、5cmのクリアランスがある。骨組が振動したとき、この壁に衝突する。この衝突を模擬するバネは、

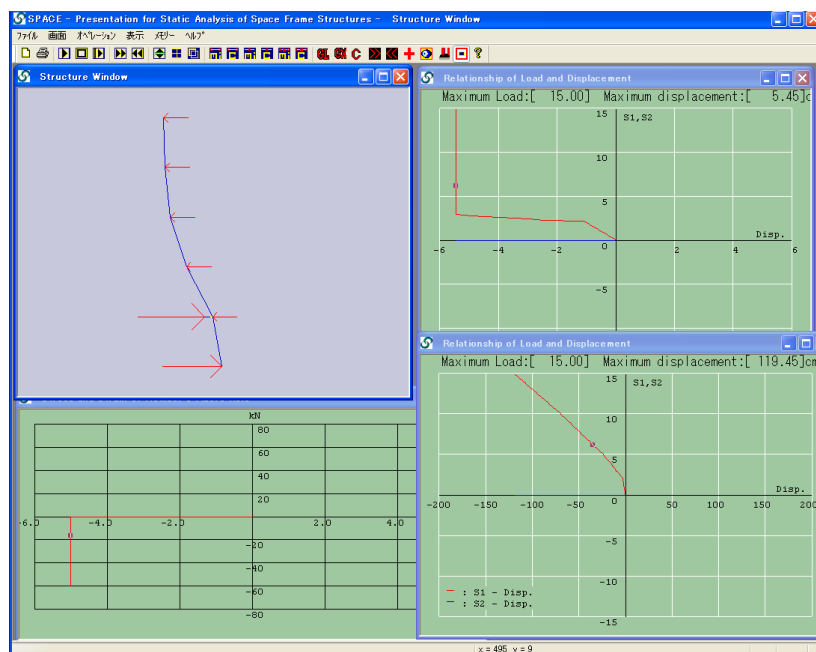


図 13-18 せん断系モデルの静的解析

圧縮側に 5cm のクリアランスを有し、バネ定数 K_n を持つ。また、その位置より引張側方向はスリップするものとする。ここではこのバネの定数 K_n をパラメータにして動的解析を行い、その結果を比較する。なお、この構造物の第 1 固有周期は 0.7 秒である。

図 7-1 には、同じ値の水平力を加えたときの静的解析結果が示されている。バネ定数として非常に硬い $K_n = 1.0 \times 10^5 \text{ kN/cm}$ を用いている。図の左下にはバネの挙動を示し、5cm で衝突して反力が生

じており、解析結果は妥当であるといえる。図右上は、バネの着いている節点の水平変位を示しており、右下は、同じく骨組頂部の水平変位を示している。

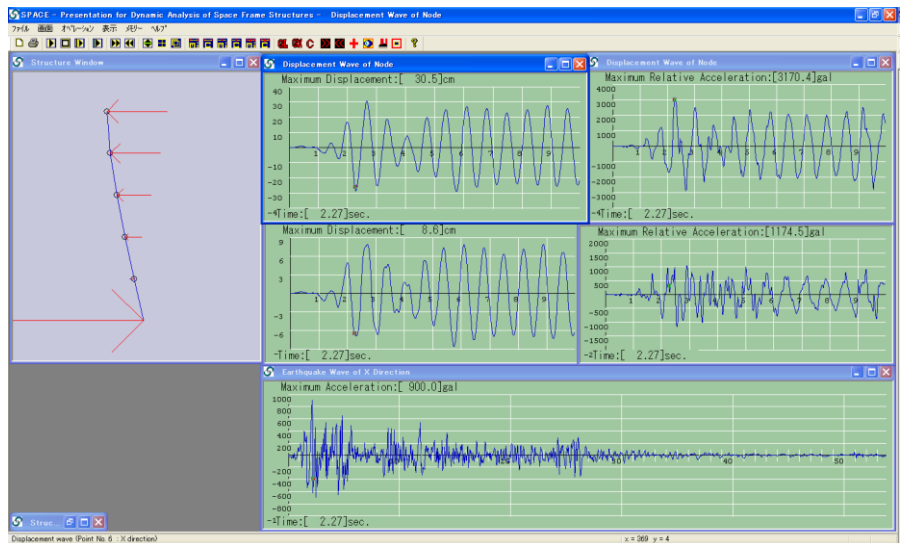


図 13-19 せん断系モデルの動的解析 (KN=0.0)

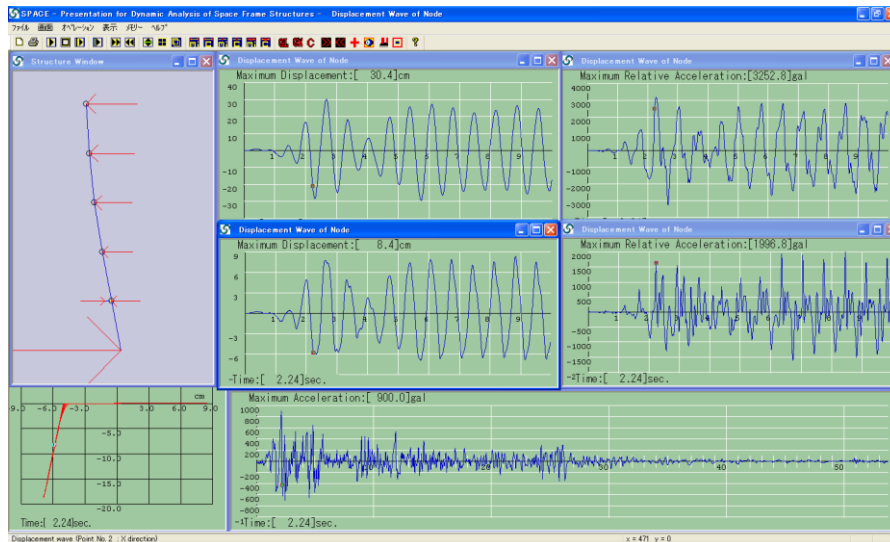


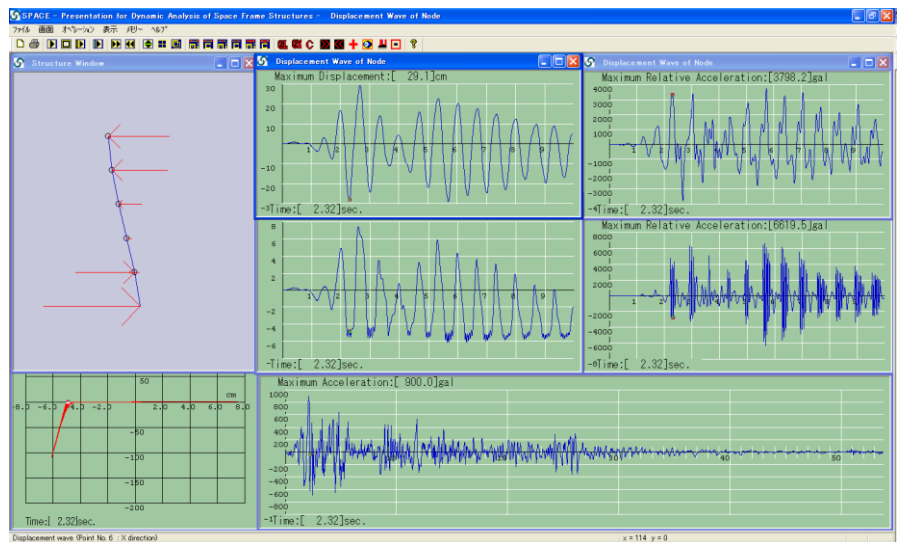
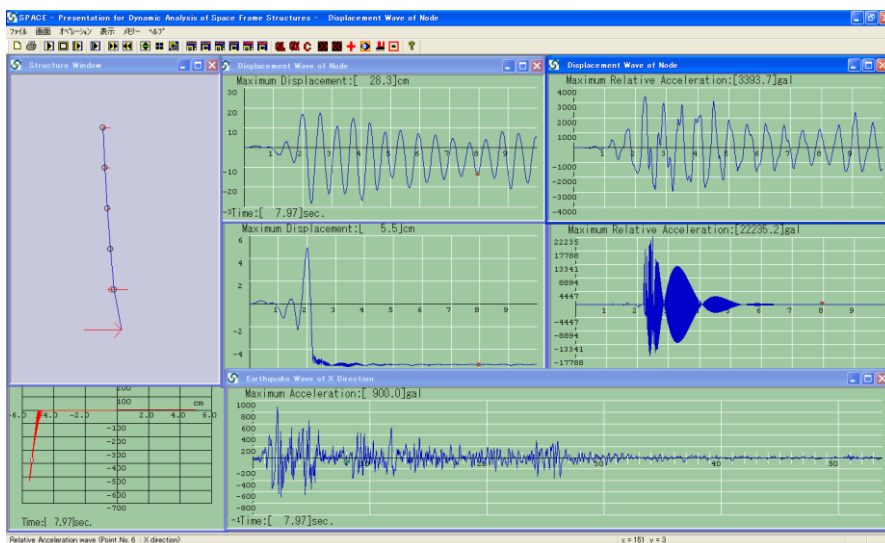
図 13-20 せん断系モデルの動的解析 (KN=1.0x10²)

次に、衝突を模擬するバネ定数として、 $K_n = 0.、1. \times 10^2、1. \times 10^3、1. \times 10^4、1. \times 10^5$ の 5 種類について動的解析を実施する。解析時間は 10 秒とし、ニューマーク β 法で $\beta = 1/4$ 、 $\Delta t = 0.001$ を用いる。入力地震波は El-Centro NS とし、最大加速度を 900 cm/sec^2 とする。減衰はレーリー型とし、1 次、2 次モードに対し、2%とする

図 7-2 は、衝突用のバネがなく、通常の振動状態と加速度波形が得られている。同図の左はせん断系に働く慣性力と反力を示し、中央の上は骨組頂部の変位、その下にバネが取り付けられている第 2 層の床部分の変位を示す。同じく図右は中央と同じ節点の加速度波形である。図下には地震波形を示す。図 7-3、4、5 も同様の並びで各図が示されており、左下には衝突用のばねの履歴として応力—変位関係が示されている。

図 7-3 には、衝突後のバネ定数が骨組のせん断バネの第 1 剛性とほぼ同じ程度（ただし、衝突時には、第 1 層と第 2 層のせん断バネは塑性化し、第 2 剛性となっている）の場合で、剛性の変化が極端でないことから、図 7-2 と比較して、変位の振動状態に大きな変化は見られない。ただし、図 7-3 の右のように衝突時に大きな加速度が発生していることがわかる。

図 7-4 では、さらに衝突用のバネ剛性が大きくなるため衝突時に大きなステップ荷重が加わり、衝突直後から骨組がバネから離れるまで（バネのスリップ部分）、全体変位の上に短周期の波形が見られる。これは、衝突用のバネが振動している状態を示す。無論、加速度波形に

図 13-21 せん断系モデルの動的解析 (KN=1.0x10³)図 13-22 せん断系モデルの動的解析 (KN=1.0x10⁴)

も大きな加速度が発生している。

さらに、もう一桁衝突バネの剛性が大きくなると ($K_n=1. \times 10^4$)、図 7-5 のように衝突時のステップ荷重は非常に大きくなり、バネは最初の衝突で大きく圧縮される。次に全体の変形が逆方向に移動する状態になってもバネはスリップ部分に戻る事ができなくなってしまう、バネ内部で振動する。このように解析結果は現実的な振動状態を表しているとはいえず、特異な現象となっている。

図 7-6 では、衝突ばねの剛性は $K_n=1. \times 10^5$ と非常に硬く、そのため第 1 の衝突時に大きなステップ荷重が加わり、結果バネ内部に大きく食い込み、その部分を中心にバネ固有の短周期で振動する。この荷重による衝突用のバネの固有周期は、およそ $T=0.006$ 秒となり、非常に早い周期でバネが振動する。この振動の振幅が大きいため、全体挙動とは独立にバネはスリップ部に移動し、再度衝突することによって大きな衝撃を受けることになる。そのため、このバネ部の振動は徐々に大きくなり、解析は破綻をきたすことになる。

このようにバネやファイバーの履歴が大きく変化する場合、その瞬間に大きなステップ荷重が加わり、骨組全体の揺れとは独立して当該バネの近傍が短周期で振動することになる。この短周期の振動が骨組全体に影響を与えるような解析モデルでは、この状態を回避し現実的な応答を得るためには、ファイバーやバネ履歴の変化や衝突バネの剛性を小さくしてステップ荷重の大きさを抑えるか、あるいはバネ内部に大きな減衰を設定することで、バネの振動を抑える必要がある。

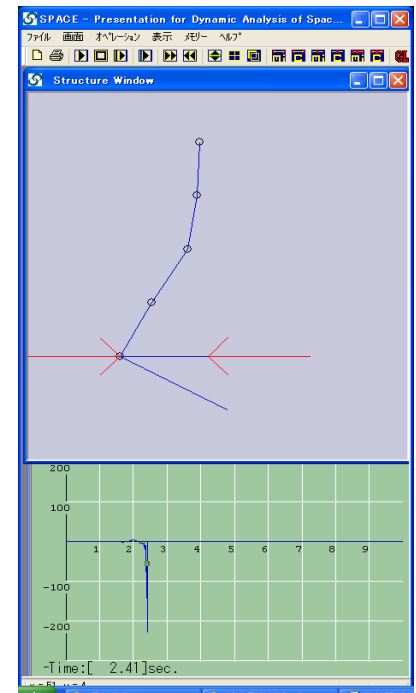


図 13-23 せん断系モデルの動的解析 ($KN=1.0 \times 10^5$)