

大規模構造物の動的解析に関する 留意点と数値積分法

Notes and Numerical Integration Method in Dynamic Analysis of Huge Structures

村田 賢*

Masaru MURATA

概要：コンピュータの飛躍的な向上に伴って大規模構造物の動的非線形解析が実施できる状況となってきた。しかしながら、膨大な自由度と非線形性が強い系では未だ多くの問題を抱えており、常に適切な解が得られるとは限らない。そこで、現在動的解析で使用されている積分法を紹介し、必要となる性能と各積分法の特性を調査する。また、大規模でしかも非線形性の強い解析モデルに対して、必要となる動的解析手順を紹介し、その過程で留意すべき点や技術的問題点について述べる。

キーワード：数値積分法、数値積分の精度・安定性・計算コスト、陰解法、陽解法、混合法、数値減衰、Newmark- β 法、 α 法、 α -OS法、MET法

1. はじめに

コンピュータの飛躍的な進歩と共に構造物の動的解析も格段に向上し、立体骨組やRCシェルなども静的解析と同様のモデルで解析が可能となりつつある。しかしながら、膨大な自由度を有する構造物の動的非線形解析は未だ多くの問題を抱えており、解析モデルを作成すれば常に正確な解が得られるという状況にはない。そこで、増大する自由度と強い非線形によって動的解析がどのように影響を受けるのか、あるいは何について注意しなければならないのか、以下の項目に従って検討する。

1. 数値積分法（特に安定性）
2. 計算コストに対する対処法
3. 動的解析を行う上での留意点
4. 非線形解析の技術的問題点

動的解析を数値計算する手法は各種あるが、多自由度と強い非線形を有する構造物の動的解析には、step-by-stepで積分する逐次積分法が多用されている。逐次積分法は、Newmark- β 法から α 法、Energy-Momentum法へと数値積分の安定性に関連して進化している。さらに、大規模構造物の動的非線形解析では、積分を実施する前に各種の方法（モーダル法、サブストラクチャ法、OS（Operator Splitting）法など）を用いて計算コストや安定性の改善を行っている。ここでは、何故このような処置が必要となるのか、また、数値積分における安定性とは何かについて説明し、必要となる動的解析手順を紹介する。

*名城大学理工学部建築学科 教授

2. 数値積分法

2.1 数値積分法に要求される性能

最初に、動的解析を行う上で最も重要な数値積分法の基礎及び積分法に要求される主な性能について述べる。数値積分の要求性能は中規模以下の自由度及び線形解析では主に精度であったが、自由度が大規模で、しかも非線形性が強くなると計算コストと安定性がより重要となる。特に、線形解析で無条件安定といわれる解析手法でも非線形解析では不安定となり、解が発散する場合がある¹⁾。そのため、積分手法やその特性を知ることが重要となる。まず、動的解析における数値積分で必要とされる主な性能について以下に示す。

1. 計算コスト
2. 精度
3. 安定性
4. 数値減衰の制御（高周波振動では数値減衰（Numerical dissipation）があり、低周波振動ではほとんどなし）
5. ゼロ質量がある場合も数値積分が可能

一般的に、1、2、3は数値積分で必要とされ、4と5は、大規模なあるいは特殊な構造物の解析に必要な性能である。特に建築構造の動的解析では節点の回転慣性項を無視する場合が多く、このような状態でも積分可能な手法が要求される。また、ゼロ質量はその系に固有振動数が無限大、つまり限りなくゼロに近い固有周期を含むことを意味し、このことは積分の安定性に影響する。

大規模構造物の動的解析では、膨大な自由度と極端に短い固有周期を含む系を数値積分する必要がある。一方、構造物の動的挙動は、

特殊な解析（例えば局所的な振動の解析や他の構造物との衝突問題など）を除いて、長い固有周期の重ね合わせで表現できることが良く知られている。そのため増分時間 Δt は、解析で必要とする周期の 1/10 から 1/30 で良いことになり、一般に建築構造物の地震応答解析では、線形解析 $\Delta t = 0.01$ 秒、非線形振動解析 $\Delta t = 0.001$ 秒から RC 構造では 0.0001 秒程度が多く用いられる。このことから、大規模構造物における逐次積分では増分時間より短い周期の積分を含むことになる。

増分時間より短い固有周期の系の数値積分では、当然精度は期待できないが、積分が不安定となり、発散しないことが必須である。例えば、中央差分と Newmark- β 法における安定条件が、系の固有振動数 ω に関連して以下のように求められており、これを満足しない場合は、解が発散する可能性があることを示唆している。

$$\Delta t < \frac{2}{\omega}; \quad \Delta t < \frac{2}{\omega\sqrt{1-4\beta}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

上式右の Newmark- β 法で $\beta \geq 1/4$ を用いると、右辺が無限大もしくは虚数となり、 ω に関係なく増分時間は任意の値でも安定となる。これを無条件安定と呼び、増分時間が固有周期より大きくても不安定とならず、積分が可能となる。一方、条件付安定の積分手法では、増分時間が固有振動数に関連する式(1)のような条件を満足しないと不安定となり、解が発散する場合もある。

条件付安定はもとより、無条件安定であっても非線形解析で不安定となった例が報告されており、増分時間より短い固有周期の振動に対しては何らかの対策を立てる必要がある。ここでは 2 つの方法を紹介する。一つは数値減衰であり、積分を実施すると自動的に粘性減衰と同様の減衰効果が得られる。この効果は高振動状態では減衰が大きく、逆に低振動状態では小さく、精度の良い応答が得られなければならない。この特性を有する手法の一つに α 法があり、多くの解析で用いられている。他の一つはモーダル法であり、十分に安定・精度が得られる低振動モードで数値積分を行い、高振動モードを省く方法である。一般的にモーダル法は非線形解析には適しないが、線形の仮想剛性を仮定することで適用可能となり、その手法は MET (Modal-Explicit Integration Technique) 法⁸⁾と呼ばれている。

解析モデルの大規模化・精密化は、数値積分の安定性だけでなく、計算コストの増大にも対処しなければならない。逐次積分法には、陽解法(Explicit Method)と陰解法(Implicit Method)があり、各々利点と欠点がある。陽解法は各ステップで連立方程式を解く必要がないため、自由度が大きくなるに従って、計算コストに対し威力を発揮する。しかし、多くの陽解法は条件付安定であるため上記の対策が必要であり、また、精度の面では陰解法に比較してかなり劣る。

一方、Newmark- β 法に代表される陰解法は精度の良い解が得られるが、各ステップで連立方程式を解く必要があり、自由度の増加と共に膨大な解析時間を要する。現在でも自由度が比較的小さい場合は、Newmark- β 法の無条件安定 $\beta = 1/4$ を使用して解析されるが、解析モデルの大規模化で今後の使用に耐え得るかどうかは、コンピュータの大幅な進歩と並列処理など解析手法の改善に依存する。

最後に、陽解法と陰解法を併用する混合法(Semi-Implicit method)がある。その中で線形剛性と非線形項を分離して解析を進める OS 法があり、 α 法を適用した α -OS 法、あるいは MET 法がある。これらはいずれも陽解法の計算スピードと陰解法の安定性・精度の良さを併せ持ち、大規模構造物の動的解析に適した有望な手法といえる。

2.2 数値積分法の分類

建築構造物の動的解析手法で多く用いられる積分法として、次の方法が挙げられる。

1. モーダル法+応答スペクトル法
2. 周波数領域での積分法
3. 直接積分法（逐次積分法）

逐次積分法(step-by-step)は、陰解法と陽解法あるいは両者の中間的手法となる混合法に分類される。以下に代表的な手法を示す¹⁾。

1. 陰解法 (implicit method)

Houbolt 法 (1950 年)

Newmark β 法 (1959 年)

Wilson θ 法 (1973 年)

α 法のグループ

WBZ- α (Wood-Bossak-Zienkiewicz method) (1981 年)

HHT- α (Hilber-Hughes-Taylor method) (1977 年)

G- α (Generalized α method)

Generalized Energy-momentum method

2. 陽解法 (explicit method)

RK 法 (Runge-Kutta-Gill 法)

中央差分法 (陽的 Newmark 法)

3. 混合法 (Semi-implicit method)

Trujillo 法

Park-Housner 法

α 法 (Operator-splitting methods) (1990 年)

α -OS 法 (1993 年)

MET 法 (Modal-explicit integration technique) (1995 年)

OS-Newmark β 法 (2001 年)

未知数の比較的小さい動的問題では、Newmark β 法の一種である $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ とした平均加速度法が現在でも主流である。この手法は無条件安定が保障されており、使いやすい手法といえる。ただし、この手法では非線形問題でしかも構造減衰が小さい場合、増分時間より短い周期の振動によって積分が不安定となる場合がある。そのため、上記の特殊な構造物では、高次モードの振動を数値減衰で抑制する α 法のグループ、特に HHT- α 法が多く用いられる。

これらの手法は全て陰解法であり、精度の良い解を得るために、各増分ステップでニュートン・ラフソン法によって連立方程式を何度も解くことになる。動的問題の大規模化と解析モデルの精密化がますます増加すると、計算コストは膨大なものになり、その結果、使用内部メモリと計算時間を如何に減少させるかが大きな課題となる。スーパーコンピュータの使用や PC の進歩を待つのも一つの方法ではあるが、その他の解決策として並列処理が挙げられる。現在の PC でも十分可能であり、少しの工夫で計算時間が大幅に減少することがある。

並列処理は分散メモリ型と SMP 型(Symmetric Multi-Processing: メモリ共有型)に分けられる。前者の代表は、インターネットでパソコンを繋ぎ、クラスターを構成する方法⁹⁾である。解析手法の基本はサブストラクチャや静的縮合モデルであり、各 PC が受け持つ構造の情報、特に材料の履歴を各 PC(Personal Computer)に蓄え、必要メモリの分散化を図る。また、各部材、あるいは有限要素の履歴は他の

要素に依存しないため、各 PC は独立に接線剛性行列を作成でき、そのため並列化によって計算効率を飛躍的に上げることができる。この手法の問題点は陰解法における連立方程式の解法²⁰⁾であり、どのように分散させて効率よく解くかがキーポイントとなる。

後者の並列処理は PC 内のマルチスレッドで処理する方法である。今日の PC はコアが 2 あるいは 4 となり、並列処理を行うことで計算効率を向上させやすい状況となっている。さらにコアは増加する傾向にあり、この資源を有効利用した手法が今後主流となる。現在、fortran と C(C++) で並列処理用の Open-MP が使用でき、逐次処理を容易に並列化することができる。連立方程式の解法もスカイライン法を筆頭に並列化が進んでおり、計算効率を一層高めている。

2.3 非線形振動における数値計算法

建築構造の動的非線形解析では、特殊な場合を除いて以下の非線形振動方程式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{N}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 \mathbf{M} は質量行列、 \mathbf{C} は減衰行列、 \mathbf{N}_{i+1} は内力ベクトルであり、幾何学的及び材料非線形を含む非線形項である。また、 \mathbf{R}_{i+1} は外力項を示し、 $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}, \dot{\mathbf{y}}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}$ は各々加速度、速度、変位ベクトルを示す。初期値問題として上式を数値積分するわけであるが、逐次積分法では、増分時間 Δt 区切られた各時刻で式(2)を満足するように、変位 \mathbf{y} 、速度 $\dot{\mathbf{y}}$ 、加速度 $\ddot{\mathbf{y}}$ を求めることになる。そこで、ここでは増分時間の前後関係から各種の逐次積分手法を検証してみよう。

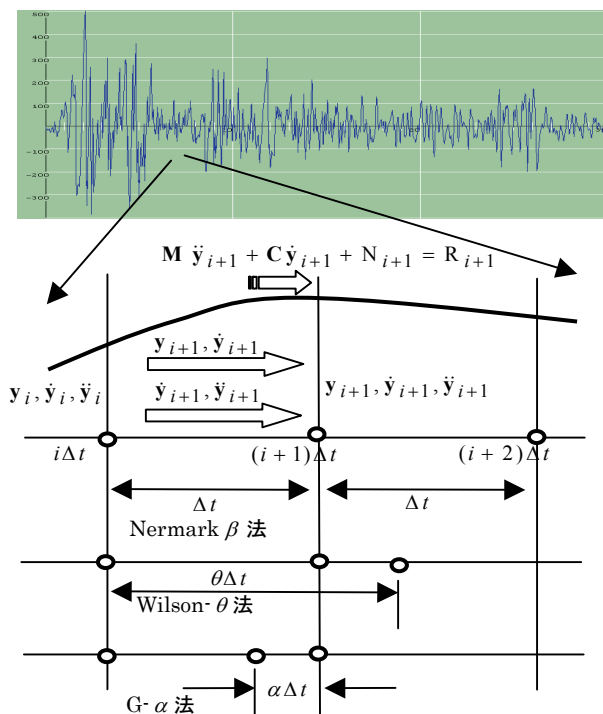


図1 数値積分法の増分間の関係

まず、ステップ i の変位、速度、加速度から、増分時間 Δt 経過後の $i+1$ ステップでの速度、変位、加速度を推定する方法で手法が分類される。増分前の情報を用いて変位、速度をテーラー展開し、増分後の変位と速度を次のように予測する。

$$\mathbf{y}(t + \Delta t) = \mathbf{y}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{y}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \dots \quad \dots\dots\dots(3a)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{y}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{y}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \dots \quad \dots\dots\dots(3b)$$

各種の数値積分法は、上の 2 つの予測値と 1 つの振動方程式で、増分後の 3 つのベクトルを決定することになる。

最初に、最も簡単に右辺の 2 項を用いて変位と速度を予測する。また、この予測値を増分後の振動方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{N}(\mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i) \} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(5)の右辺項は既知となり、 Δt 秒後の加速度が得られることになる。また、この値を式(4)に代入すると Δt 秒後の変位、速度が決定し、次のステップに移ることができる。この積分法はオイラー(Euler)法と呼ばれ、 Δt が十分小さければ良い結果が得られる。この手法は陽解法であり、非線形振動方程式であっても非反復型の積分手法となっている。さらに、精度の良い陽解法は陽的 Newmark 法と呼ばれており、増分後の変位と速度は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i + 0.5 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{y}}_i + 0.5 \Delta t (\ddot{\mathbf{y}}_i + \ddot{\mathbf{y}}_{i+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

上式を式(2)に代入し、加速度を求めると次式となる。

$$\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} = [\mathbf{M} + 0.5 \Delta t \mathbf{C}]^{-1} \{ \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}) - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{y}}_i + 0.5 \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i) \} \quad \dots\dots\dots(7)$$

陽解法では、式(7)より分かるように、時間増分後の増分変位は増分前の値より $\Delta \mathbf{y}_{i+1} = \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i + 0.5 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_i$ として求められる。その結果、増分間における幾何学的非線形性や材料非線形性は評価可能となり、内力項 $\mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1})$ は求められる。ただし、この手法による増分変位は当該増分間における非線形性が考慮されておらず、近似度の低い予測変位となっている。そのため、非反復型の積分手法である代わりに、増分時間を大きくすると誤差が集積することになる。一般に、材料非線形はひずみの履歴に依存するため、増分形式で評価する場合が多い。そのため、上記の非反復型の積分手法では、内力項の評価を行う際、時間増分前で求めた増分変位を用いて材料のひずみ-応力履歴を追跡し、更新すれば良いことになる。

次に、陰解法の代表である Newmark- β 法を考察しよう。この手法では、変位と速度は次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{y}}_i + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{y}}_i + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

増分後の変位を未知数にするため、上式を以下のように変更する。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{y}}_i - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{y}}_i - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

上式を振動方程式に代入すると次の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{y}_{i+1}) &= \mathbf{N}_{i+1} - \mathbf{R}_{i+1} \\ &+ \mathbf{M} \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{y}}_i - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_i \right\} \\ &+ \mathbf{C} \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{y}}_i - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i \right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

上式を変位 \mathbf{y}_{i+1}^k についてテーラー展開し、増分変位の二次以上を無視すると、反復解析する線形方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \Delta \mathbf{y}_k = -\mathbf{G}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \quad \dots\dots\dots(11)$$

上式で $\Delta \mathbf{y}_k$ は反復時の増分変位であり、未知変位ベクトルの上添え字は非線形方程式を解くための反復回数を表す。ここで、接線剛性と

右辺項、増分変位は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{y}_{i+1}^k) &= \frac{\partial \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k)}{\partial \mathbf{y}_{i+1}} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \\ -\mathbf{G}(\mathbf{y}_{i+1}^k) &= \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \\ \Delta \mathbf{y}_k &= \mathbf{y}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{y}_{i+1}^k; \quad \mathbf{y}_{i+1} \cong \mathbf{y}_i + \sum_{k=1} \Delta \mathbf{y}_k \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

反復式である式(11)の両辺が求まったわけで、後はこの方程式を解いて反復 k 次の増分変位を求め、この増分変位を足し込んで反復 $k+1$ 次の変位とする。反復終了後、収束判定を行い、 $|\Delta \mathbf{y}_k|$ の値が閾値以下になれば収束したとして次ステップに進むことになる。この非線形部分を解く方法は、ニュートン・ラフソン(Newton-Raphson)法と呼ばれており、反復式の係数行列は常に再計算を行って求め、各反復で連立方程式を解く必要が生じる。

式(12)の反復型の方程式では、左辺項の接線剛性と右辺の内力は、以下に示すように反復時 k の変位を用いて評価される。

$$\mathbf{K}_{i+1}^k = \frac{\partial \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k)}{\partial \mathbf{y}_{i+1}}; \quad \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \quad \dots\dots\dots(13)$$

反復 k 次の増分変位は既に式(11)より得られていることから、増分前からこの時点の変位までの幾何学的非線形性や材料非線形性は評価可能となり、非線形性を考慮した接線剛性と内力が求められる。ここで注意すべき点は、各反復時では材料のひずみ-応力履歴を更新しない、つまり書き換えを行わないことである。もし履歴の更新を行った場合、反復時における増分変位の調整で、塑性後の材料に除荷が生じると、実際とは異なったひずみ履歴を追跡することになる。従って、反復時では、常に増分前の変位から反復 k 次までの増分変位でひずみ-応力履歴を評価すべきである。そのため収束後再度、次ステップの前で収束した変位を用いてひずみ-応力履歴を更新する必要がある。

この手続きは全ての反復時で行われ、しかも、反復方程式の係数行列が更新されるため、常に連立方程式を解かなければならず、自由度が膨大となる大規模構造物では、計算コストの面で不利な手法となる。そこで、少し簡便な方法として、式(11)の接線剛性を増分前の変位で計算し、反復時には更新しない方法、つまり修正ニュートン・ラフソン法がある。反復時に接線剛性を作成する必要がなく、また、一度、LDU 分解を行えば、後は容易に方程式の解が求められる。さらに、反復時では、材料非線形性を考慮せず、収束後の変位を用いてひずみ-応力履歴を求め、更新する方法がある。この手法では、内力は材料履歴の評価・更新前後で異なるため、次ステップの釣合式には不釣り合い力が発生するが、次ステップでこの不釣り合い力を考慮することで誤差を吸収することになる。

次に、数値減衰が導入される。一般化 α 法について述べる。一般化 α 法の振動方程式は、式(2)より次式で表される。各係数は前節と同様である。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_m} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f} + \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f} = \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} \quad \dots\dots\dots(14)$$

時刻 $t + (1-\alpha)\Delta t$ の変位と速度、加速度、及び外力は、次のように線形補間によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_m} &= (1-\alpha_m) \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + \alpha_m \ddot{\mathbf{y}}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f) \dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \alpha_f \dot{\mathbf{y}}_i \\ \mathbf{y}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f) \mathbf{y}_{i+1} + \alpha_f \mathbf{y}_i \\ \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f) \mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f \mathbf{R}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

Newmark- β 法を適用するために、 $i+1$ ステップの変位と速度を

式(8)で仮定する。増分後の変位を未知数にするため式(9)と(15)より、以下のように変更し、中間点での速度と加速度を求める。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f} &= \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{(1-\alpha_f)\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{y}}_i \\ &\quad - \frac{(\gamma - 2\beta)(1-\alpha_f)}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i \\ \ddot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_m} &= \frac{(1-\alpha_m)}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{(1-\alpha_m)}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{y}}_i - \frac{1-\alpha_m-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

上式を振動方程式に代入すると、次の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{y}_{i+1}) &= \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f} - \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} \\ &\quad + \mathbf{M} \left\{ \frac{(1-\alpha_m)}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{(1-\alpha_m)}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{y}}_i - \frac{1-\alpha_m-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_i \right\} \\ &\quad + \mathbf{C} \left\{ \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{(1-\alpha_f)\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{y}}_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\gamma - 2\beta)(1-\alpha_f)}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i \right\} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

Newmark- β 法と同様の方法によって、反復解析する線形方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{y}_{i+1}^k) \Delta \mathbf{y}_k = -\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{y}_{i+1}^k) \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここで、反復方程式の係数行列は、

$$\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{y}_{i+1}^k) = \frac{\partial \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}(\mathbf{y}_{i+1}^k)}{\partial \mathbf{y}_{i+1}} + \frac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad \dots\dots\dots(22)$$

となり、また、右辺は、

$$\begin{aligned} -\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{y}_{i+1}^k) &= \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} - \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \\ &\quad - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_m}(\mathbf{y}_{i+1}^k) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f}(\mathbf{y}_{i+1}^k) \quad \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

となる。これで反復式である式(21)の両辺が求まったわけで、後はこの方程式を解いて、反復 k 次の増分変位を求める。非線形方程式の解法は前節で示した Newmark- β 法と同一で、ニュートン・ラフソン(Newton-Raphson)法か、修正ニュートン・ラフソン(Modified Newton-Raphson)法を用いることになる。

反復式(21)を解くために、増分時間の中間点である $(i+1-\alpha)\Delta t$ における接線剛性と内力項の評価が必要となる。反復式で使用する内力項の評価法を示す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}^{TR-k} &= (1-\alpha_f) \mathbf{N}_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k) + \alpha_f \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}^{MR-k} &= \mathbf{N}_{i+1}((1-\alpha_f) \mathbf{y}_{i+1}^k + \alpha_f \mathbf{y}_i) \\ \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}^{GEMR-k} &= \mathbf{N}_{i+1}(\alpha_f \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}^k) \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

上式の第1式は、Newmark- β 法の式(119)と同様の方法で求め、線形補間によって、中間点の内力を計算する。また、第2式は、先に中間点の変位あるいは増分変位を求め、その増分変位までの非線形性を考慮して内力を計算する。材料非線形に関する注意は Newmark- β 法と同じであるが、収束前後では非線形性を評価する増分変位が異なる。

第3式は、Generalized Energy Momentum Rule と呼ばれ、エネルギー保存則が成立するように、中間点の内力がひずみレベルに戻って評価されることになる。さらに幾何学的非線形性が強く、しかも剛体変位の大きい運動の場合、運動方程式は非常に堅くなり、安定性の問題はさらに重要となる。そこで、時間積分の安定性の指標としてエネルギー原理・運動量原理を考え、両原理を満たすように運動方程式を修正して時間積分する。この方法によって数値積分の安定性を保証

するのが Energy-Momentum Conservation Algorithm である。この積分手法についての詳細は、文献を参照されたい^{14), 18)}。

2.4 混合法(OS法)による数値計算法

最初に、陽的解法の利点と陰解法の安定性と精度を活かした混合法(semi-implicit method)の一つである OS+ Newmark- β 法について述べる。構造物の非線形振動方程式は式(30)で表され、記号は全て第 3.1 節と同じとする。OS 法を適用するために、式(30)中の内力ベクトルの非線形部分を右辺に移項し、左辺には線形項 $\mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1}$ のみ残して、振動方程式を以下のように変更する。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{N}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1} \quad \dots\dots\dots(25)$$

これに Newmark- β 法を適用して解くことになるが、非線形方程式であるため、精度良く解を求めるためには反復計算が必要となる⁸⁾。

右辺の非線形内力項を増分前の変位からテーラー展開する。ここで、増分前の内力は部材応力から求めた節点力ベクトル $\mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k)$ とする。

$$\mathbf{N}_{i+1} = \mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k) + \mathbf{K}^t(\mathbf{y}_{i+1}^k)\Delta\mathbf{y}_k + O(\Delta\mathbf{y}_k) \quad \dots\dots\dots(58)$$

反復計算を行うため、反復時における内力を増分変位の二次以上を無視することで、

$$\mathbf{N}_{i+1} \cong \mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k) + \mathbf{K}^t_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k)\Delta\mathbf{y}_k \quad \dots\dots\dots(59)$$

とする。ここで、節点力ベクトル $\mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k)$ と係数行列 $\mathbf{K}^t_{i+1}(\mathbf{y}_{i+1}^k)$ は反復時に書き換えられることになる。また、変位の上添え字は、増分時間内の反復回数を表し、収束時には、 $\Delta\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{0}$ で $\mathbf{y}_{i+1}^{k+1} \rightarrow \mathbf{y}_{i+1}$ となる。

さらに、計算効率を考えて増分前の係数行列を用いて反復時には変更しない方法とする。従って、上式は以下のように変更され、反復時、 \mathbf{K}_i^t は一定となる。

$$\mathbf{N}_{i+1} \cong \mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k) + \mathbf{K}_i^t(\mathbf{y}_i)\Delta\mathbf{y}_k \quad \dots\dots\dots(60)$$

上式を式(57)に代入し、反復用の振動方程式を得る。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}^k) - \mathbf{K}_i^t\Delta\mathbf{y}_k + \mathbf{K}(\mathbf{y}_{i+1}^k + \Delta\mathbf{y}_k) \quad \dots\dots\dots(61)$$

上式を解くために、反復初期値として増分変位 $\Delta\mathbf{y}_1$ と変位 \mathbf{y}_{i+1}^1 を次式で予測し、その値を代入する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\mathbf{y}_1 &= \Delta\dot{\mathbf{r}}_i + 0.5\Delta t^2\ddot{\mathbf{y}}_i + \beta\Delta t^2(\ddot{\mathbf{y}}_i - \ddot{\mathbf{y}}_{i-1}) \\ \mathbf{y}_{i+1}^1 &= \mathbf{y}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

ここでは、予測値の精度を向上させるため、3 次微分項を増分前の値を用いて求めている。次に、上式を式(61)に代入し、線形方程式を解く。反復後の変位 \mathbf{y}_{i+1}^{k+1} から、次ステップの右辺項を計算するために増分変位と反復変位を次式より求め、次の反復に移ることになる。その際、計算された増分変位がある閾値より小さくなると、収束したとして次のステップに進むことになる。

$$\Delta\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{y}_{i+1}^k; \quad \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \sum_{k=1} \Delta\mathbf{y}_k \quad \dots\dots\dots(63)$$

後は、振動方程式を非線形方程式に変換するために、この方程式に Newmark- β 法を適用すればよい。

精度良く解を求めるには数回の反復を行う必要がある。一方、精度の良い非反復型手法が酒井によって開発¹⁰⁾されており、ここではその手法を紹介する。まず、Newmark- β 法より、増分後の変位ベクトルを未

知ベクトルとすると、速度と加速度ベクトルは式(32)として与えられる。同式を非線形の振動方程式(57)に代入し、として \mathbf{y}_{i+1} に関する非線形方程式が得られる。最初に、非線形部分の内力を増分前の値で近似すると次式で与えられる。

$$\mathbf{N}(\mathbf{y}_{i+1}) - \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{y}_i) - \mathbf{K}\mathbf{y}_i \quad \dots\dots\dots(72)$$

上式を式(71)に代入すると右辺項は全て増分前の値となり、次式のように増分後の変位が求められる。上で求めた変位ベクトルより、次式の誤差ベクトル $\Delta\mathbf{q}$ を求める。

$$\Delta\mathbf{q} = \{\mathbf{Q}(\mathbf{y}_{i+1}) - \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1}\} - \{\mathbf{Q}(\mathbf{y}_i) - \mathbf{K}\mathbf{y}_i\} \quad \dots\dots\dots(74)$$

本来、この誤差内力ベクトルは反復によってゼロベクトルに収束すべきであるが、ここでは次のような方法を用いて解を修正する。

この誤差内力ベクトルだけが外力として作用する線形の振動系を、以下のように想定し、その応答を求める。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{y}_1 = \Delta\mathbf{q} \quad \dots\dots\dots(75)$$

上記の振動方程式を中央差分法で解く。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \{ \mathbf{R}_{i+1} - \{ \mathbf{Q}(\mathbf{y}_i) - \mathbf{K}\mathbf{y}_i \} \\ &\quad + \mathbf{M} \{ \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{y}_i + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{y}}_i + \frac{1-2\beta}{2\beta}\ddot{\mathbf{y}}_i \} \\ &\quad + \mathbf{C} \{ \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{y}_i + \frac{\gamma-\beta}{\beta}\dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\gamma-2\beta}{2\beta}\Delta t\ddot{\mathbf{y}}_i \} \} \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{\gamma-\beta}{\beta}\dot{\mathbf{y}}_i - \frac{\gamma-2\beta}{2\beta}\Delta t\ddot{\mathbf{y}}_i \\ &\quad + [\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}]^{-1} \frac{\Delta t}{2}\Delta\mathbf{q} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{y}}_i - \frac{1-2\beta}{2\beta}\ddot{\mathbf{y}}_i + [\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}]^{-1}\Delta\mathbf{q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(80)$$

これまでに処理速度の向上を目指して、OS 法による解析手法を示した。しかしながら、先に述べた高次モードの不安定性に対する対処は何も為されていない。粘性減衰を有する構造物で、剛性比例型の減衰を使用する場合、高次モードには自動的にかなりの減衰が挿入されるため、高次モードによる不安定性についてはあまり考慮する必要がない。一方、減衰の小さい構造や、特殊な構造では、高次モードの安定性には特に注意を要する。

高次モードの不安定性に対する対処法として、2つの方法を紹介する。いずれも、数値計算と準静的加力による実験を組み合わせたハイブリッド実験の研究で開発された手法^{1), 2)}である。ハイブリッド実験とは、サブストラクチャ法によって構造物を分割し、その一部を数値計算によって補う実験方法^{3), 4), 5), 11), 12)}であり、実在の構造物に近い動的実験を実現するものである。

ハイブリッド実験の数値計算に必要な性能は文献³⁾に因ると、①実験との関連で増分時間を極端に小さくできない、②計算時間が掛かり過ぎるため収束計算を含まない、③塑性化、除荷、再載荷などの急激な応力変化に対して、精度良く追跡できなければならない、④次のステップの応答値が陽的に求められること、⑤数値積分法は安定で精度の良い解が求められること、などが挙げられる。その中で、特に数値計算に関連した性能として、実験する上で復元力を思考錯誤なし、つまり反復計算なしで求められることが要求される。そこで、復元力を線形部分と非線形部分に分け、異なった積分方法を用いることでその要求に答える。つまり線形部分には無条件安定の Newmark- β 法

を、また、非線形部分には条件付安定な予測子—修正子法を用いて積分する。さらに α 法を導入して数値減衰を生じさせ、高次モードの安定を図っている。

本節では、中島らによって提案された α -OS 法^{1),2)}について説明する。 α -OS 法による振動方程式は、既に式(49)に示されており、ここでは次式のように多自由度に対する HHT - α 法を用いる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f} + \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f} = \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} \quad \dots\dots\dots(81)$$

時刻 $t + (1-\alpha)\Delta t$ の変位と速度及び外力は次のように線形補間によって求める。ただし、文献とパラメータの符号が逆になっていることに注意されたい。ここでは、全体を通して同じパラメータを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{y}}_i \\ \mathbf{y}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{y}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{y}_i \\ \mathbf{R}_{i+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{R}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(82)$$

振動方程式は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + (1-\alpha_f)\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f} \\ = (1-\alpha_f)\mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{R}_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(83)$$

また、内力項も最も単純な線形補間による方法を用いているが、ここでは OS 法により、線形剛性 \mathbf{K}^I による項と非線形項 $\mathbf{K}^N(\mathbf{y})$ による項に分割する。

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{i+1-\alpha_f}^{TR} &= (1-\alpha_f)\mathbf{N}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{N}_i \\ &= (1-\alpha_f)(\mathbf{K}^I\mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{K}_{i+1}^N(\mathbf{y}_{i+1})) + \alpha_f(\mathbf{K}^I\mathbf{y}_i + \mathbf{K}_i^N(\mathbf{y}_i)) \quad \dots\dots\dots(84) \end{aligned}$$

さらに、非線形項を予測子変位 ($\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1}$) 用いて次式で近似する。

$$\mathbf{K}_i^N(\mathbf{y}_i) \cong \mathbf{K}_i^E\mathbf{d}_i; \quad \mathbf{K}_{i+1}^N(\mathbf{y}_{i+1}) \cong \mathbf{K}_{i+1}^E\mathbf{d}_{i+1} \quad \dots\dots\dots(85)$$

ここで、 \mathbf{K}_{i+1}^E は接線剛性から線形剛性を取り除いた非線形部分の剛性である。上式を式(83)に代入すると、 α -OS 法の基礎振動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + (1-\alpha_f)\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_i + \\ (1-\alpha_f)\{\mathbf{K}^I\mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{K}_{i+1}^E\mathbf{d}_{i+1}\} + \alpha_f\{\mathbf{K}^I\mathbf{y}_i + \mathbf{K}_i^E\mathbf{d}_i\} \\ = (1-\alpha_f)\mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{R}_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(86)$$

上式に Newmark- β 法を適用するため、次式のように予測子変位 \mathbf{d}_{i+1} 及び変位と速度を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \Delta t\dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t^2(0.5-\beta)\ddot{\mathbf{y}}_i \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{d}_{i+1} + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{y}}_i + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(87)$$

上の変位と速度を式(86)に代入し、未知加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$ について方程式を求めると

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + (1-\alpha_f)\mathbf{C}\{\dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{y}}_i + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}\} + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_i \\ + (1-\alpha_f)(\mathbf{K}^I\{\mathbf{d}_{i+1} + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}\} + \mathbf{K}_{i+1}^E\mathbf{d}_{i+1}) + \alpha_f(\mathbf{K}^I\mathbf{y}_i + \mathbf{K}_i^E\mathbf{d}_i) \\ = (1-\alpha_f)\mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{R}_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(88)$$

となり、整理すると、 $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$ に関する方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + (1-\alpha_f)\Delta t\gamma\mathbf{C} + (1-\alpha_f)\Delta t^2\beta\mathbf{K}^I]\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} &= (1-\alpha_f)\mathbf{R}_{i+1} + \alpha_f\mathbf{R}_i \\ &\quad - \mathbf{C}\{(1-\alpha_f)(\dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{y}}_i) + \alpha_f\dot{\mathbf{y}}_i\} \\ &\quad - (1-\alpha_f)\{\mathbf{K}^I\mathbf{d}_{i+1} + \mathbf{K}_{i+1}^E\mathbf{d}_{i+1}\} - \alpha_f\{\mathbf{K}^I\mathbf{y}_i + \mathbf{K}_i^E\mathbf{d}_i\} \quad \dots\dots\dots(89) \end{aligned}$$

右辺は予測子変位 \mathbf{d}_{i+1} を代入することで全て決定し、上式は線形方程式となる。また、未知加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$ の係数行列は、常に変化することが無く、一度 LDU 分解すれば、後は効率良く数値積分を実行できる。上記のように、この手法は非反復型の積分手法となっている。

前節では、 α -OS 法について述べた。この手法は数値減衰を導入することで高次モードの不安定性に対処している。本節では、神田らによって提案されたモーダル法を利用した MET 法 (Modal-explicit integration technique)^{6),7)}を紹介する。この MET 法も α -OS 法と同様に、ハイブリッド実験用に開発された手法である。

一般的に地震力や風荷重の周波数特性を考慮すると、構造物の応答は低次の周波数成分が卓越し、高次の成分はほとんど発生しない。そこで非線形問題に対し、モーダル法を利用して高次モードを省略する方法が考えられる。まず、OS 法を適用した振動方程式を以下に示す。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{N}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1} \quad \dots\dots\dots(90)$$

文献では、線形部分の仮想剛性として任意剛性でも良いとしているが、減衰項も分解可能とするためには、レーリー減衰のように、質量行列と剛性行列による Caughey 級数¹⁾である必要がある。そこで、ここでは仮想剛性を線形剛性として記述する。

左辺は線形剛性を使用しているため、次式のように固有問題を設定し、固有値 λ と固有ベクトル ϕ (振動モード) を求める。ここでは、固有ベクトルは、 \mathbf{M} を介した正規直交ベクトルとする。

$$(-\lambda\mathbf{M} + \mathbf{K})\phi = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots(91)$$

一般化座標における変位を \mathbf{X} とすると、実座標の変位 \mathbf{y} との関係は、

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m \phi_j X_j \quad \dots\dots\dots(92)$$

ここで、 ϕ_j は j 次の固有ベクトルであり、 X_j は j 次の一般化変位である。また、 m は最高次のモード次数を示す。逆変換は、固有ベクトルが正規であることを考慮すると次式で与えられる。

$$\mathbf{X}_k = \phi_k^T \mathbf{M} \mathbf{y} \quad \dots\dots\dots(93)$$

ここで、上添え字 T は転置を意味する。上式を式(90)に代入し、左より ϕ_j^T を掛けると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \phi_k^T \mathbf{M} \phi_j \ddot{X}_j + \phi_k^T \mathbf{C} \phi_j \dot{X}_j + \phi_k^T \mathbf{K} \phi_j X_j \\ = \phi_k^T \mathbf{R} - \phi_k^T \mathbf{N} + \sum_{j=1}^m \phi_k^T \mathbf{K} \phi_j X_j \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(94)$$

また、固有ベクトルは \mathbf{M} を介して正規直交であることから、

$$\phi_k^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{kj}; \quad \phi_k^T \mathbf{C} \phi_j = \delta_{kj} c_j; \quad \phi_k^T \mathbf{K} \phi_j = \delta_{kj} k_j \quad \dots\dots\dots(95)$$

が成立する。ここで、 δ_{kj} はクロネッカーの δ であり、 j と k が等しいとき 1、異なるときは 0 をとる。上式を考慮すると、式(94)は次式のように m 個の独立した振動方程式となる。 k 次モードの方程式は、

$$\begin{aligned} \ddot{X}_k + c_k \dot{X}_k + k_k X_k &= \phi_k^T \mathbf{R} - \phi_k^T \mathbf{N} + k_k X_k \rightarrow \\ \ddot{X}_k + c_k \dot{X}_k + \phi_k^T \mathbf{N} &= \phi_k^T \mathbf{R} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(96)$$

となる。上式では内力項は非線形となるが、条件付安定である陽的 Newmark- β 法 ($\beta=0$) を使用することで非反復型の積分手法が得られる。一般化変位に対する変位と速度を以下のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} &= \mathbf{X}_i + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}}_i \\ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{X}}_i + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\mathbf{X}}_i + \ddot{\mathbf{X}}_{i+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (97)$$

一般化変位の中で k 次モードの変位を式(96)に代入すると、

$$\ddot{X}_{k,i+1} + c_k \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{X}_{k,i} + \ddot{X}_{k,i+1}) + \phi_k^T \mathbf{N}(\mathbf{y}_{i+1}) = \phi_k^T \mathbf{R}_{i+1} \dots\dots\dots (98)$$

となり、ここでは非線形の内力も増分後の加速度を含まないため、 k 次モードの増分後の加速度 $\ddot{X}_{k,i+1}$ が容易に求められる。ただし、内力項は増分後における実座標の変位 \mathbf{y}_{i+1} を用いて計算される。

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{k,i+1} &= (1 + \frac{1}{2} \Delta t c_k)^{-1} \{ -c_k (\dot{X}_{k,i} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{X}_{k,i}) \\ &\quad - \phi_k^T \mathbf{N}(\mathbf{y}_{i+1}) + \phi_k^T \mathbf{R}_{i+1} \} \dots\dots\dots (99) \end{aligned}$$

一方、実座標の変位ベクトル \mathbf{y}_{i+1} は、式(97)と次式から求められる。

$$\mathbf{y}_{i+1} \cong \sum_{k=1}^{m'} \phi_k X_{k,i+1} \dots\dots\dots (100)$$

ここで重要なのは、手法の条件付安定条件と構造物の振動状態を考慮して m' が決められることで、結果、大幅な自由度数の軽減が見込まれる。さらに、この処理は不安定となる高次の振動挙動が抑えられることにもなる。数値計算手続きの理解は容易であり、積分処理は全て一般化座標系で行い、非線形内力と外力の計算は、実座標系で行う。従って、式(100)と式(93)を用いて、互いの座標系に変換することになる。後は、陽的 Newmark 法と全く同一である。

3. 動的解析における留意点

3.1 数値計算手法の選択とパラメータの設定

本節では、大規模な構造物の動的な非線形解析を行う上で留意すべき点について述べる。特に、非線形性の強い挙動は解析する上で困難な場合が多い。解析すべき問題を特定し、どの程度非線形性が強いのかについて知っておくことが重要である。次に、動的解析を行う積分手法がどのような方法なのか調査する。選択可能な積分手法が陰解法か陽解法か、または混合法かを調べると共に、増分間の非線形性をどのように処理しているのか、反復型か非反復型か、材料非線形の履歴更新はどの時点で行われているのか、などをマニュアルより確認する。この調査を行うことで、解くべき問題に関連して適切な積分法を選択することができる。

最初に、線形問題及び非線形性が小さい問題で、中規模な構造物では、陰解法である Newmark- β 法の平均加速度法が適当である。同法は数値減衰を生じないが、無条件安定あるいは剛性比例型の粘性減衰を有するため高次モードによる不安定性は考える必要はなく、増分時間の設定は、解析で必要とする周期の $1/10$ から $1/30$ で良いことになる。

表 1 Newmark- β 法のパラメータ関係

Method	γ	β	Δ/T_{\min}	精度
中央差分	1/2	0	0.3183	Excellent for small Δt Unstable for large Δt
線形加速度法	1/2	1/6	0.5513	Very good for small Δt Unstable for large Δt
平均加速度法	1/2	1/4	∞	Good for small Δt No energy dissipation

大規模な非線形解析では、解くべき問題に合わせて積分手法を選択することになる。一般的には中規模以下の構造物と同様に陰解法である Newmark- β 法で、平均加速度法 ($\gamma=1/2, \beta=1/4$) が用いられるが、陰解法であることから、自由度が膨大となると相当の計算時間を覚悟することになる。増分時間は材料非線形性を考慮する場合は、履歴の追跡法によってはさらに小さな増分時間が必要となる。

構造物の粘性減衰が小さい場合でしかも幾何学的非線形性が強い問題では、HHT- α 法などの α 法グループの積分手法を用いるのが良い。この手法も陰解法であることから、多数の自由度を有する構造物の解析では、かなりの計算時間を必要とする。 α 法グループが無条件安定となるためのパラメータ関係は以下の表に示される。ここで、N- β は、Newmark- β 法を意味する。

表 2 α 法グループの精度と無条件安定のためのパラメータ関係¹⁹⁾

Method	α_m	α_f	β	γ
N- β	0	0	$(\gamma + 0.5)^2 / 4$	$\geq 1/2$
HHT- α	0	$0 \leq \alpha_{HHT} \leq 0.5$	$(1 - \alpha_{HHT})^2 / 4$	$0.5 - \alpha_{HHT}$
WBZ- α	$\alpha_{WBZ} \leq 0$	0	$(1 - \alpha_{WBZ})^2 / 4$	$0.5 - \alpha_{WBZ}$

特に、大規模な自由度を有する構造物の非線形振動解析では、計算コストが重要となる。選択が可能であれば混合法である OS 法グループを使用する。この積分手法は計算効率が優れており、特に非反復型の積分手法が効果的である。積分手法が決定すると、増分時間と積分手法に必要なパラメータを決める。ここでは、一般的に無条件安定となるように設定するのが良い。

3.2 動的解析の手順

大規模構造物の非線形解析では、構造用データを設定したのみでは必ずしも正確な解が常に得られるとは限らない。次のような手順を踏んだ解析を行い、その過程で各種の調整を行い、構造特性・振動特性を理解しつつ解析を進めることが重要である。最終的に非線形性の強い、つまり構造物が崩壊あるいは構造不安的に近い挙動を示す解析を実施する。このような崩壊に近い動的挙動が得られた場合、適切な結果なのか、あるいは数値積分による不安定性によるものかを判別することが大切である。そのためには、選択した積分手法に関する情報を十分に理解すると共に、次に示すような基礎的な手順を踏んで構造物の動的特性を理解することが大切となる。

- 動的解析を実施する前に静的解析を行い、骨組の塑性耐力や変形状態を確認しておく。
- 動的解析用パラメータを設定する。数値積分の手法を選択し、積分用パラメータを設定する。
解析モデルと解析目的に合わせて、積分手法とパラメータを選択する。特に、大規模で非線形性の強い解析モデルでは、計算コストに注意して積分法を選択する。
- 固有値問題により、固有周期と固有振動モードを求める。
得られた低次の固有周期が妥当であるか検証し、固有振動モードをチェックする。異常な振動モードや考えていなかった変形状態が存在する場合は、解析モデルの変更を考慮する。特に全体剛性に比較して極端に柔らかい部材に質量が付いていると、その部分のみ振動するモードが現れる。また、立体骨組では梁の弱軸方向の振動や床部分のせん断変形や捩じれ振動などに注意して、振動モードを確認

する。

3. 自由振動解析を行い、振動状態を確認する。

衝撃荷重や強制変位後の自由振動解析を行い、その挙動を分析する。特に粘性減衰の効果を確認する。また、数値減衰が入る積分法ではその効果も確かめる。

4. 線形の振動解析を行う。

動的解析で用いる外力、例えば地震波形を用いて線形の振動解析を行い、振動状態を確認する。振動モードで確認できなかった異常な振動状態や、考慮していなかった変形状態が得られた場合、構造モデルを調節する。外力の応答スペクトルと解析モデルの固有周期などから、励起される振動モードを確認する。線形の振動状態を分析した後、非線形振動解析の解析目標を設定し、解析計画を立てる。

5. 徐々に外力を上昇させ、非線形振動解析を行う。

解析計画に従って外力を徐々に増大させ、どの程度の大きさで非線形性が生じるかを確認する。材料非線形性では、個材レベル、あるいは要素レベルで応力-ひずみ履歴を適切に追跡できているか、確認する。追跡できていない場合は、解析用パラメータを調節する。特に増分時間を短くする。幾何学的非線形性についても適切に挙動しているかどうか、例えばブレースの座屈後挙動が正確に追えているか具体的に検証する。また、構造物が崩壊・不安定挙動を示すようになると、接線剛性が偽特異となり構造不安定となる。このような時、正確に振動方程式が積分できているかを得られた動的挙動によって確認する。以上の非線形性特性を十分に追跡できていることを検証した後、解析計画に従って動的解析を実施する。

3.3 強い非線形性の解析と技術的問題点

非線形性が強いと各種の異常挙動が発生する。基本的には、静的解析でも解析困難な問題は動的解析でも難しい。ここでは、これらの技術的問題点を示すことにする。

材料非線形性によって特異な現象が現れることがあり、それらの挙動をまず理解する必要がある。例えば、材料の履歴をパイリニアやトリリニアで表すことが多いが、その乗り移り点、つまり剛性が大きく変化する時点で、その部材の近傍に全体の挙動よりはるかに短い周期の加速度が発生することが知られている。その加速度が大きいと変位や全体挙動までも影響が及ぶ場合がある。特に、硬いものとの衝突解析では、極端に高い周波数の振動が発生し、その波形が増分時間より短いと得られた解が不安定となり、発散する場合もある。このような動的解析では増分時間を極端に短くする必要があり、計算コストを増大させるため、増分時間を自動的に変動可能な積分法が要求される。

静的解析においても、コンクリートの材料履歴あるいはブレースの座屈後のなどにおける軟化部分の解析は、解析結果が不安定となる場合があり、適切に解析することはかなり難しい。

このような非線形性が強い動的解析に関する成果がそれほど多く公開されていないこともあり、解析成功事例を蓄積し、そこから新たな手法を見つけていくことが今後の課題となっている。特に、非線形内力項の評価方法、解析モデルの設定法、材料やバネモデルの履歴特性及びその追跡方法など、解析モデルに関連して未解決の問題が数多く残されている。これらは今後の研究成果によるところが大きく、積分手法の進化と共に更なる発展が期待される。

4. まとめ

現在、膨大な自由度を有する構造物の動的非線形解析は未だ多くの問題を抱えており、解析モデルを作成すれば常に正確な解が得られるという状況にはない。そこで、積分手法に要求される性能を述べ、構造物の非線形動的解析で使用されている積分手法を分類し、数値計算法を紹介した。特に、逐次積分法では増分時間より短い周期によって不安定挙動を示す場合があり、解が発生することもある。対処法として、数値減衰あるいはモーダル法を用いる非反復型の手法を紹介した。最後に、非線形動的解析における留意点を述べた。

参考文献

1. K.J. Bate, E.L. Wilson, 菊池文雄訳「有限要素法の数値計算」、科学技術出版社、構造工学シリーズ⑥、昭和 54 年
2. 中島正愛、石田雅利、安藤和弘、「サブストラクチャ仮動的実験のための数値積分法」、日本建築学会構造系論文報告集、第 417 号、1990 年 11 月
3. 中島正愛、赤澤隆士、坂口理、「実験誤差制御機能を有したサブストラクチャ仮動的実験のための数値積分法」、日本建築学会構造系論文報告集、第 454 号、1993 年 12 月
4. 康大彦、田中康介、「サブストラクチャ擬似動的実験による震災 RC 造建築物の残存耐震性能の評価」、コンクリート工学年次論文集、Vol.24, No.2, 2002
5. 友藤洋、藩鵬、中島正愛、劉大偉、「混合・変換制御を用いたサブストラクチャ応答実験」、日本建築学会構造系論文報告集、第 585 号、2004 年 11 月
6. 山田宰、都築渾、神酒敏廣、「 α -OS 法による鋼製門形ラーメンの弾塑性地震応答解析」、大同工業大学紀要、第 44 巻、2008 年
7. 神田亮、足達洋、白井信明、中西三和、「サブストラクチャ・オンライン応答実験法に適用する初期応力法に基づく陰な積分法」日本建築学会構造系論文報告集、第 473 号、1995 年 7 月
8. 神田亮、扇谷匠己、矢作貴、丸太栄蔵、「ハイブリッド振動法の制御アルゴリズムに関する研究—無条件安定と等価な陽的積分法—」、日本大学星団工学部研究報告 A、2005 年 6 月 第 38 巻 第 1 号
9. 村田賢、柴田良一、他、「大規模スペースフレームの動的解析に対する PC クラスタによる並列システムの開発（その 1）」日本建築学会構造系論文報告集、第 542 号、2001 年 4 月
10. 酒井久和、「構造物の動的非弾性応答解析における非反復時間積分法と地震工学への応用に関する研究」、京都大学学位論文、1998 年 1 月
11. 酒井久和、吉田望、澤田純男、「時刻暦応答解析における地震動の区間線形化の影響」、Proc.28th JSCE Earthquake Engineering Symposium, 2005
12. 井上幸一、森下邦宏、他「長大橋の効率的非線形地震応答解析法の開発」、三菱重工技報、Vol.36, No.5, 1999-9
13. 五十嵐晃、家村浩和、鶴田大輝、「免震液体貯蔵タンクを対象としたサブストラクチャハイブリッド振動台実験」、土木学会地震工学論文集、No.27, 2003
14. 児玉剛、宮崎康行、「エネルギー・モーメント法における運動方程式の導出手順と解釈について」、日本機械学会論文集(C 編) 69 巻 684 号、2004-8
15. D.KUHL and CRISFIELD, "ENERGY-CONSERVING AND DECAYING ALGORITHMS IN NON-LINEAR STRUCTURAL DYNAMICS", Int. J. Numer. Meth. Engin. 45, 1999
16. Micael A. Crisfield and Gordan Jelenic, "AN INVARIANT ENERGY-MOMENTUM CONSERVING PROCEDURE FOR DYNAMICS OF 3D BEAMS" COMPUTATIONAL MECHANICS, New Trends and

Applications, c. CIMNE, Barcelona, Spain 1998

17. S.Y. Chang, "Accurate Integration of Nonlinear Systems using Newmark explicit method", Journal of Mechanics, Vol.25, No.3, September 2009
18. JC Simo, N Tarnow, "The Discrete Energy-Momentum Method. Conserving Algorithms for Nonlinear Elastodynamics". Math. Phys 43: 1992
19. Silvano Erlichier, Luca Bonaventura Oreste S. Bursi," The analysis of Generalized α methods for non-linear dynamic problems", Computational Mechanics 28(2002)
20. Martin S. Williams, "Real-time hybrid testing in structural dynamics", 5th Australasian Congress on Applied Mechanics, ACAM 2007, 10-12 December 2007, Brisbane, Australia
21. ARAMA MOHAN RAO, TVSRAPPA RAO and B DATTAGURU, Comparative efficiencies of three parallel algorithms for nonlinear implicit transient dynamic analysis", Sadhana Vol.29, Part 1, February 2004