



第3章 動的解析

3.1 はじめに

構造物の動的解析では、数値解析手法として Newmark の法が多用され、SPACE でも用いられている。同法はパラメータを適切に設定すれば、安定した解が得られ、特に、 $\gamma = 1/4$ で無条件安定となることが知られている。一方、大規模行列による数値解析では多量の演算が必要となり、特に、膨大な解析ステップを実行する動的解析では、この部分の効率化が重要となる。そこで、非線形振動方程式を変更して、各増分ステップで反復解法となる手法を提案し、動的解析に対し効果的であることを示す。

一般に、構造物の非線形振動方程式は次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + \{K(y)\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

ここで、左辺第1項は慣性力、第2項は減衰項、第3項は幾何学的及び材料非線形性を有する構造物の内力ベクトルである。ベクトル $\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, \{y\}$ は、加速度、速度、変位を各々表す。また、右辺第1項は地震による外力、第2項は構造物に直接加わる荷重であり、時間に依存すれば風荷重に、依存しなければ擬似的な静的荷重に対応する。地震加速度ベクトル $\{\ddot{u}_g\}$ は各方向 x, y, z に関する加速度 $(\ddot{u}_g, \ddot{v}_g, \ddot{w}_g)$ である。行列 $[I]$ は、各方向の変位に対応する位置で1に、他は0となるベクトル $\{I_x\}, \{I_y\}, \{I_z\}$ から構成される。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{u}_g\} &= (\ddot{u}_g, \ddot{v}_g, \ddot{w}_g) \\ [I] &= [\{I_x\}, \{I_y\}, \{I_z\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

最初に、式(3.1)中の内力ベクトルの非線形部分を右辺に移項し、左辺には線形項のみ残して、振動方程式を以下のように変更する。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \\ -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{K(y)\} + [K]\{y\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

さらに、右辺の非線形内力項を増分変位が小さいとして、以下のように書き換える。

$$\{K(y)\} = \{K(\bar{y})\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} = \{Q(\bar{y})\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

3.2 非線形振動方程式と反復解法

ここで、 $\{\bar{y}\}$ は増分時間前の変位であり、 $\{\Delta y\}$ は増分変位である。また、 $\{Q(\bar{y})\}$ は部材応力から求めた節点力ベクトルを、 $[K_T(\bar{y})]$ は増分前の接線剛性を各々示す。右辺の非線形内力項を節点力ベクトルで表すことから、増分前までの不釣り合い力が増分後の右辺項で評価され、方程式を解いた後、増分前の誤差が打ち消され、誤差の増大を防いでいる。上式を式(3.3)に代入すると、振動方程式は下式のように変更され、反復解法の基礎式が得られる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} \quad \dots\dots(3.5)$$

上式に Newmark の 法を適用する。まず、増分時間 t 秒後の変位ベクトル $\{y_{n+1}\}$ と速度ベクトル $\{\dot{y}_{n+1}\}$ を、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{y}_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\} + \{(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} + \delta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t \\ \{\Delta y_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\}\Delta t + \{(0.5-\beta)\{\ddot{y}_n\} + \beta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t^2 \\ \{y_{n+1}\} &= \{y_n\} + \{\Delta y_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.6)$$

で仮定する。ここで、添え字の n は増分前の値、 $n+1$ は増分後の値、 δ, β は数値計算用パラメータを表す。次に、上式中の係数を

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= \{\dot{y}_n\} + \Delta t(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{b\} &= \Delta t\{\dot{y}_n\} + \Delta t^2(0.5-\beta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{\bar{b}\} &= \{y_n\} + \{b\} \\ \mu_1 &= \Delta t\delta \\ \mu_2 &= \Delta t^2\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.7)$$

としてまとめ、式(3.6)と(3.7)を反復解法の基礎式(3.5)に代入すると、増分後の加速度を未知ベクトルとする釣り合式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [C]\{\{a\} + \mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \\ = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ - [K_T(y_n)]\{\{b\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \quad \dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

さらに、上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
& [[M] + \mu_1[C] + \mu_2[K]]\{\ddot{y}_{n+1}\} \\
& = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \\
& \quad + \mu_2([K] - [K_T(y_n)])\{\ddot{y}_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots(3.9)
\end{aligned}$$

となる。ここで、係数を以下のように

$$\left. \begin{aligned}
[F] &= [[M] + \mu_1[C] + \mu_2[K]] \\
[G] &= \mu_2([K] - [K_T(y_n)]) \\
\{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\
&\quad - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

とすると、方程式は、

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = [G]\{\ddot{y}_{n+1}\} + \{g\} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

となる。上式から、ガウス・ザイデル法などと同様、下に示す分離型の反復式が得られる。

$$\{\ddot{y}_{n+1}\}^{i+1} = [F]^{-1}[G]\{\ddot{y}_{n+1}\}^i + [F]^{-1}\{g\} \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

ここで、上添え字 i は反復回数を表す。

SPACE では、上に示す反復式を効率良く、また記憶領域の少量化を考慮して計算する方法が用いられている。例えば、式(3.10)中の係数行列 $[F]$ は、行列3つの足し算になっているが、行列を作成した後に求めるのではなく、直接に係数行列 $[F]$ に組み込む方式がとられている。特に、減衰行列 $[C]$ は、レーリー減衰を使用する場合、各部材の剛性行列や節点質量から直接係数行列 $[F]$ に組み込まれる。また、右辺項の行列 $[G]$ とベクトル $\{g\}$ は、共に行列を用いて評価されているが、最終的にはベクトルとして得られれば良く、各行列は全体行列として計算する必要はない。ここでは、下式のように各部材ごとに部材行列を求め、対応する変位、あるいは速度と掛け算し、右辺項ベクトルに組み込むことになる。この方法を用いることによって、大きな記憶領域を必要としなくなる。ここでは、以下のように式(3.12)を変更して使用する。

^

$$\left. \begin{aligned}
\{\ddot{y}_{n+1}\}^{i+1} &= [F]^{-1}\{z\}^i \\
\{z\}^i &= \sum_{i=1}^m ([G_i]\{\ddot{y}_{n+1}\}^i + \{g_i\})
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.13)$$

ここで、ベクトル $\{z\}^i$ は、部材毎の $[G_i]$ と対応する加速度 $\{\ddot{y}_{n+1}\}^i$ を掛け算し、さらに部材の $\{g_i\}$ を加えて、変位の適合を用いて重ね合わせたものである。

提案した反復解法を用いると、係数行列 $[F]$ は、線形であるため、一度LDU分解すれば各増分ステップで用いることができ、解を求めるための計算時間はほとんど要しない。さらに、部材の塑性チェックや応力計算、接線剛性、あるいは反復解法の右辺項の計算等は部材相互に関連しないため、部材毎に独立して計算が可能であり、処理の効率化が図られる。

3.3 反復解法の初期値

反復式(3.12)における初期値は、 t 秒前の値を用い、Newmarkの法を利用して以下のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{n+1} &= \ddot{y}_n + \ddot{y}_n \Delta t \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \dot{y}_n \Delta t + \delta \ddot{y}_n \Delta t^2 \\ y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \Delta t + 0.5 \ddot{y}_n \Delta t^2 + \beta \ddot{y}_n \Delta t^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.14)$$

上式を初期値として用いると、 t 秒前の変位の3回微分が必要となる。ここでは、 2 t 秒前の加速度 \ddot{y}_{n-1} を利用して下式で与える。

$$\ddot{y}_n = \frac{\ddot{y}_n - \ddot{y}_{n-1}}{\Delta t} \dots\dots (3.15)$$

上式を式(3.14)に代入すると、精度の良い反復式の初期値が次のように得られ、SPACEでは、この値を初期値として用いている。

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \{(1 + \delta) \ddot{y}_n - \delta \ddot{y}_{n-1}\} \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \Delta t + \{(0.5 + \beta) \ddot{y}_n - \beta \ddot{y}_{n-1}\} \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.16)$$

3.4 反復解法における発散

反復解法では、式(3.12)より、以下に示す反復行列 $[T]$ の特性によって、収束の速さや、また解が発散するか否かが決められる。

$$[T] = [F]^{-1} [G] \dots\dots (3.17)$$

反復行列 $[T]$ の変化は、式(3.10)を参考にすると、時間が進んでも行列 $[F]$ は一定であるため、行列 $[G]$ 内の $[K_T(y_n)]$ に依存する。例えば、変位が小さく、接線剛性行列 $[K_T(y_n)]$ が線形の剛性行列に等しいとき、行列 $[G]$ はゼロ行列となり、そのため、式(3.12)は反復式とならず、一回で解が求ま

ることになる。

反復解法の収束条件は、反復行列のスペクトル半径 $\rho(T)$ によって以下のように表される。

$$\rho(T) = \max |\lambda_i| < 1 \quad \dots\dots(3.18)$$

ここで、 λ_i は反復行列 $[T]$ の i 番目の固有値である。一般にスペクトル半径を直接求めるには時間がかかり、増分ステップ毎に求めることは当然できない。そこで、以下に示すスペクトル半径の上界を用いて、反復行列の特徴を分析する。反復行列の上界は以下のように表すことができる。

$$\rho(T) \leq \max \sum_{j=1}^n |T_{ij}| = \|T\| \quad \dots\dots(3.19)$$

ここで、 $\|T\|$ は行列 $[T]$ のノルムを示す。行列に関するノルムの性質と式(3.17)、(3.19)から、スペクトル半径の上限は、

$$\rho(T) \leq \left\| [F]^{-1} [G] \right\| \leq \frac{\|G\|}{\|F\|} = \frac{\|K - K_T\|}{\|F\|} \quad \dots\dots(3.20)$$

として得られる。

動的解析中における反復行列のノルムの変化は、行列 $[G]$ によって生じる。前述したように、応答が線形振動状態の場合は、行列 $[G]$ はゼロ行列となり、スペクトル半径はゼロで、式(3.12)は反復式でなくなる。一方、非線形性が強くなると接線剛性行列のノルム $\|K_T\|$ は一般的に小さくなり、その結果、式(3.20)の分子は大きくなる。さらに、構造物が座屈やメカニズムなど不安定な状態に至るとき、接線剛性行列の固有値のひとつがゼロや負となり、反復行列のスペクトル半径は1に近づいて収束が遅くなることや、場合によっては1を超えて解が発散することもある。

式(3.20)のノルム $\|F\|$ は、解析途中で増分時間 t を変化させなければ解析中変らない。初期設定で t をより小さくすると、 t の二乗に比例する剛性項に比較して、一乗に比例する減衰項や定数である質量項が行列 $[F]$ で優位となる。また、行列 $[G]$ も t の二乗に比例するため、 t を小さくすることが、ノルム $\|F\|$ を相対的にノルム $\|G\|$ より大きくさせ、スペクトル半径を小さくさせることになる。その結果、解の発散を防ぎ、収束範囲を拡大させる。

ここで示した反復解法は、系の非線形性が弱い場合は、収束も早く、陰解法に比較すると有利な点が多い。しかし、系の非線形性が強い場合、特

に動座屈や塑性によるメカニズムを扱う場合は、解が発散する可能性があることを考慮して、次善の策を用意しておく必要がある。例えば、次節で説明する陰解法に切り替える方法、あるいは、解析途中で増分時間を小さくする方法などがある。無論、次善の方法で、発散する部分を通りすぎると元の反復解法に戻ることになる。前者は、単一のコンピュータでは、システムの構成上組み込み易くしかも効果的である。一方、後者は、解析途中で増分時間を変化させることによって達成され、増分時間の変化による各種の影響を合理的に処理することが可能であるならば、計算方法が変化するわけではない。ただし、どの程度 t を小さくすべきか、また、変更後発散するか否かが計算前に明らかではない。SPACE では、前者を用いて解析を進めることとしており、それでも、良い結果が得られない場合は、 t を小さくして再計算することになる。

3.5 陰解法との併用

反復解法が発散する場合は、陰解法を併用して用いることも可能である。SPACE では本手法も用いているため、本節で計算方法の概略を以下に示す。陰解法で用いる基本的な振動方程式は、式(3.1)と(3.4)を用いると

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} = \\ -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(\bar{y})\} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.21)$$

であり、式(3.6)、(3.7)を用いて、上に Newmark の 法を適用すると、

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [C]\{\{a\} + \mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K_T(y_n)]\{\{b\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \\ = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.22)$$

となる。整理すると陰解法の基本式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \left[[M] + \mu_1[C] + \mu_2[K_T(\bar{y})] \right] \{\ddot{y}_{n+1}\} \\ = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ -[C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.23)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [\bar{F}] &= [M] + \mu_1[C] + \mu_2[K_T(y_n)] \\ \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ &\quad -[C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.24)$$

とすると、線形の方程式が次式のように得られる。下式の右辺項ベクトル $\{g\}$ は、反復解法で計算した式(3.10)中のベクトル $\{g\}$ と同一である。

$$[\bar{F}]\{\ddot{y}_{n+1}\} = \{g\} \quad \dots\dots(3.25)$$

無論、係数行列は常に変更されることになるが、上式を解くことによって t 秒後の加速度が得られる。ただし、反復解法から陰解法に切り替わるとき、行列 $[K_T]$ が特異に近いことから、係数行列 $[\bar{F}]$ は、擬特異となる場合が多く、そのため高精度で解を求める必要がある。

本節では、提案した反復解法の処理能力を陰解法と比較することによって示す。単一のコンピュータを用いて、自由度 500、1000、2000、4000、6000、8000 を各々有する屋根型円筒ラチスシェル構造物の動的解析を行い、1 ステップに要する時間の平均値を求める。解析は、入力加速度が小さいため非線形性が弱く、収束はほとんど 1 回で終わっている。

反復解法と陰解法に関する分析結果を図 3.1 に示す。反復解法では、自由度の数（実際は、部材数）にほぼ比例する形で 1 サイクルの時間が増加している。一方、陰解法では、LDU 分解を毎ステップ行うため、解析時に要する時間が自由度の 2 乗から 3 乗の間で増加している。自由度が増加するに従って、明らかに反復解法が優位となっていくことが分かる。

3.6 反復解法の処理能力

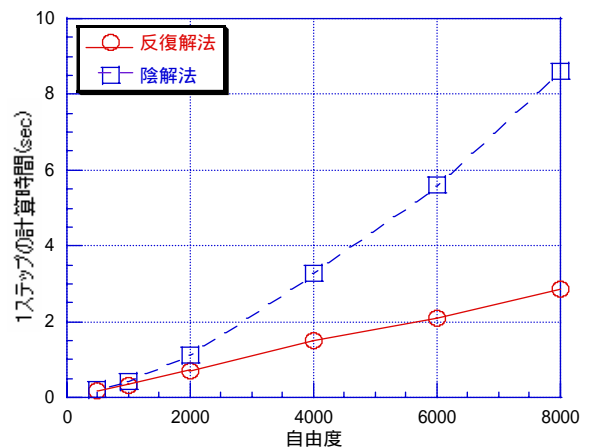


図 3.1 反復解法と陰解法の処理能力の比較

Maxwell モデルを含む振動方程式は、以下の方程式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} + \{P_s\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} - \{f_d\} \quad \dots\dots(3.26)$$

ここで、Maxwell モデルより得られる力 $\{f_d\}$ は、以下の式で示す一個の Maxwell モデルより得られる力を重ね合わせたベクトルである。 $\{f_d\}$ については、後節の Maxwell モデルの項を参照されたい。なお、 $\{f_d\}$ は増分後の速度ベクトルを含む。

3.7 Maxwell モデルを含む数値解法

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \left((\alpha_1 - \alpha_0) \dot{u}_{n+1} + \gamma_1 f_n + \alpha_1 u_n + 2\alpha' f_0 \right) \quad \cdots \cdots (3.27)$$

また、行列 $[\bar{C}]$ は、

$$[\bar{C}] = [C] + [C_1] \quad \cdots \cdots (3.28)$$

であり、行列 $[C_1]$ は、以下に示す Maxwell モデルの線形減衰を重ね合わせたものである。また、 $[C]$ はレーリー減衰とする。

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (3.29)$$

反復解法は、式(3.26)に対して、Newmark の 法を適用すると、

$$\begin{aligned} & [[M] + \mu_1 [\bar{C}] + \mu_2 [K]] \{\ddot{y}_{n+1}\} \\ & = -[M] \{I\} \ddot{u}_g + \{P_s\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}] \{a\} - [K_T(y_n)] \{b\} \\ & + \mu_2 ([K] - [K_T(y_n)]) \{\ddot{y}_{n+1}\} - \{f_d(\ddot{y}_{n+1})\} \quad \cdots \cdots (3.30) \end{aligned}$$

となり、ベクトル $\{f_d\}$ は、未知加速度を含むことになる。

次に、Maxwell モデルを含む陰解法について考える。陰解法の基本式は次式で与えられ、

$$\begin{aligned} & [[M] + \mu_1 [\bar{C}] + \mu_2 [K(y_n)]] \{\ddot{y}_{n+1}\} \\ & = -[M] \{I\} \ddot{u}_g + \{P_s\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}] \{a\} - [K_T(y_n)] \{b\} - \{\bar{f}_d\} \quad \cdots \cdots (3.31) \end{aligned}$$

ここで、ベクトル $\{\bar{f}_d\}$ は、以下に示すベクトルとなり、増分後の速度ベクトルを含まない。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (\gamma_1 f_n + \alpha_1 u_n + 2\alpha' f_0) \quad \cdots \cdots (3.32)$$

また、減衰行列 $[\bar{C}]$ は、

$$[\bar{C}] = [C] + [C_2] \quad \cdots \cdots (3.33)$$

で表され、行列 $[C_2]$ は、以下に示す Maxwell モデルの非線形減衰を重ね

ね合わせたものである。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3.34)$$

上式は、非線形係数を含むため、変化する場合がある。

3.8 減衰

3.8.1 レーリー減衰

SPACE で用いている減衰は、レーリー減衰、部材型減衰、Maxwell 型の減衰であり、システムでは、各々別個に取り扱っている。

レーリー減衰は、一般に以下のように表される。

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad \dots\dots(3.35)$$

振動モードで展開すると、第 i 次のモード減衰は、

$$h_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i \right) \quad \dots\dots(3.36)$$

となり、右辺第 1 項が振動数逆比例型、第 2 項が振動数比例型となる。モード減衰として、第 i 次と第 j 次のモードに対して各々減衰定数を h_i と h_j に設定すれば、係数 a_0 と a_1 は次式となる。

$$a_0 = \frac{2\omega_i\omega_j(h_j\omega_i - h_i\omega_j)}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad a_1 = \frac{2(h_i\omega_i - h_j\omega_j)}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad \dots\dots(3.37)$$

本システムでは、レーリー減衰を用いているが、式(3.35)のように直接減衰行列を作成することはない。先に述べたように、各部材ごとに部材質量行列と部材剛性行列に係数を掛け、係数行列に直接組み込まれる。このようにシステムでは、大きな係数行列を用いることなく数値計算を実行するように設計されている。

3.8.2 部材型減衰 Maxwell 型

部材型の減衰は、部材ごとに評価されるため、レーリー減衰行列を計算した後、全体係数行列の中に組み込まれることになる。また、Maxwell 型の減衰行列は、節点荷重ベクトルと部材減衰行列として評価されるため、部材減衰行列は全体行列の中に直接組み込まれ、また、節点荷重ベクトルは、定数ベクトルに直接組み込まれる。詳細については、Maxwell モデルの解析を参照されたい。

3.9 制振ダンパー の振動解析

3.9.1 Voigt モデル

本節では、制振ダンパーに用いられている Voigt モデルと Maxwell モデルの基本式について解説する。

まず、Voigt モデルについて説明する。まず、部材内の変位と応力は次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ f &= P_j - P_i \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.38)$$

Voigt モデルは、要素が並列結合しているため、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \\ f_1 &= c\dot{u} \quad ; \quad f_2 = ku \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.39)$$

従って、式(3.39)を用いると、応力 f は

$$f = c\dot{u} + ku \cdots \cdots (3.40)$$

として表される。ただし、 f_1 及び f_2 は各々ダッシュポットとバネ要素の応力を表す。

式(3.40)と(3.38)を参考に、節点の変位と節点力を用いて、Voigt モデルの釣合式が以下のように示される。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \cdots \cdots (3.41)$$

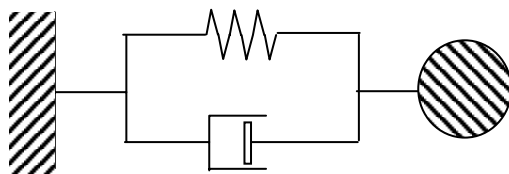


図2 Voigt モデル

次に、Maxwell モデルについて述べる。部材内の変位と応力を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ f &= -P_i \quad ; \quad f = P_j \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.42)$$

Maxwell モデルは、要素が直列結合しているため、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + c\dot{u}_1 && (\text{ダッシュポット}) \\ f &= ku_2 && (\text{バネ要素}) \\ u &= u_1 + u_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.43)$$

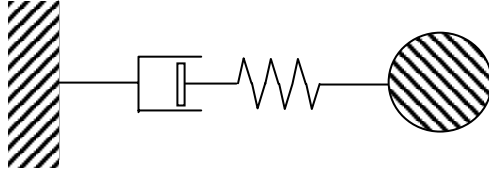


図3 Maxwell モデル

ここで、 u_1 は、ダッシュポットの変位を、 u_2 は、ばね要素の変位を表す。ただし、ダッシュポットの減衰定数は式(3.43)に示すようにバイリニア型の非線形とする。

Maxwell モデルの基本式を少し変形して、節点力を求めることにする。最初に、式(3.43)の下式の両辺を時間微分する。

$$\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \quad \dots\dots(3.44)$$

次に、式(3.43)を次のように変更する。ただし、剛性 k は線形とする。

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{c}(f - f_0) \quad \dots\dots(3.45)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\dot{f}}{k} \quad \dots\dots(3.46)$$

式(3.45)と(3.46)を式(3.44)に代入すると、Maxwell モデルの基本式が得られる。

$$\dot{u} = \frac{1}{c}(f - f_0) + \frac{\dot{f}}{k} \quad \dots\dots(3.47)$$

さらに、上式を変更すると、部材内部の応力 f は、

$$f = c\dot{u} - \frac{c}{k}\dot{f} + f_0 \quad \dots\dots(3.48)$$

として得られる。

Maxwell モデルは上記のように、応力の微分を含むため、このまま振動方程式の中に組み込むことはできない。そこで、スペースフレームの

非線形振動方程式の解析にニューマーク法を用いることから、このモデルに対しても同様な手法で近似的に解くことにする。

今、 n ステップの応力状態 f_n が求まっているとし、 t 秒後の応力 f_{n+1} を次式で仮定する。

$$f_{n+1} = f_n + \dot{f}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{f}_n \Delta t^2 \quad \dots\dots(3.49)$$

ここで、 f_n の2回微分を次式で仮定する。

$$\ddot{f}_n = \frac{1}{\Delta t} (\dot{f}_{n+1} - \dot{f}_n) \quad \dots\dots(3.50)$$

上式を式(3.49)に代入し、整理すると、

$$f_{n+1} = f_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{f}_{n+1} + \dot{f}_n) \quad \dots\dots(3.51)$$

となる。

n ステップ、あるいは、 $n + 1$ ステップで Maxwell モデルの基本式は成立していなければならず、基礎式(3.47)を少し変更すると

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}_n &= k\dot{u}_n - \frac{k}{c'}(f_n - f'_0) \\ \dot{f}_{n+1} &= k\dot{u}_{n+1} - \frac{k}{c}(f_{n+1} - f_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.52)$$

が成立する。ただし、 c', f' と c, f が異なる場合は、 n と $n + 1$ ステップの間で、ダッシュポットの減衰定数 c が変化するときである。式(3.52)の \dot{f}_n と \dot{f}_{n+1} を式(3.49)に代入し、整理すると次式が得られる。

$$f_{n+1} = f_n + \frac{\Delta t}{2} (k\dot{u}_{n+1} + k\dot{u}_n - \frac{k}{c} f_{n+1} - \frac{k}{c'} f_n + \frac{k}{c} f_0 + \frac{k}{c'} f'_0) \quad \dots(3.53)$$

上式を f_{n+1} について解くと、

$$(1 + \frac{k\Delta t}{2c}) f_{n+1} = (1 - \frac{k\Delta t}{2c'}) f_n + \frac{k\Delta t}{2} \dot{u}_{n+1} + \frac{k\Delta t}{2} \dot{u}_n + \frac{k\Delta t}{2c} f_0 + \frac{k\Delta t}{2c'} f'_0 \quad \dots(3.54)$$

となり、従って、 f_{n+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{c}{c'} \frac{2c' - k\Delta t}{2c + k\Delta t} f_n + \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t} \dot{u}_{n+1} + \\ &\quad \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t} \dot{u}_n + \frac{k\Delta t}{2c + k\Delta t} f_0 + \frac{c}{c'} \frac{k\Delta t}{2c + k\Delta t} f'_0 \quad \dots\dots(3.55) \end{aligned}$$

ここで、

$$\alpha = \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t}; \alpha' = \frac{k\Delta t}{2c + k\Delta t}; \gamma = \frac{2c' - k\Delta t}{2c + k\Delta t}; b = \frac{c}{c'} \quad \dots\dots(3.56)$$

とすると、 f_{n+1} は、

$$f_{n+1} = b\gamma f_n + \alpha\dot{u}_{n+1} + \alpha\dot{u}_n + (\alpha'f_0 + b\alpha'f'_0) \quad \dots\dots(3.57)$$

となり、数値計算で用いる Maxwell モデルの基本式が得られる。

非線形振動方程式を数値解析するために増分式を求めておく。増分応力 Δf は、式(3.43)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta f &= c\Delta\dot{u}_1 \\ \Delta f &= k\Delta u_2 \\ \Delta u &= \Delta u_1 + \Delta u_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.58)$$

上式の最下式の両辺を微分すると、

$$\Delta\dot{u} = \Delta\dot{u}_1 + \Delta\dot{u}_2 \quad \dots\dots(3.59)$$

となる。式(3.58)の上二式を少し変更すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{u}_1 &= \frac{\Delta f}{c} \\ \Delta\dot{u}_2 &= \frac{\Delta\dot{f}}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.60)$$

となり、上式を式(3.59)に代入すると、

$$\Delta\dot{u} = \frac{\Delta f}{c} + \frac{\Delta\dot{f}}{k} \quad \dots\dots(3.61)$$

となる。上式を変更すると、増分形式の増分応力 Δf は、次式で与えられる。

$$\Delta f = c\Delta\dot{u} - \frac{c}{k}\Delta\dot{f} \quad \dots\dots(3.62)$$

また、上式を $\Delta\dot{f}$ について、整理すると、

$$\Delta\dot{f} = k\Delta\dot{u} - \frac{k}{c}\Delta f \quad \dots\dots(3.63)$$

が得られる。

上式を n ステップ、 $n + 1$ ステップについて記述すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{f}_n &= k \Delta \dot{u}_n - \frac{k}{c'} \Delta f_n \\ \Delta \dot{f}_{n+1} &= k \Delta \dot{u}_{n+1} - \frac{k}{c} \Delta f_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.64)$$

となる。

Δt 秒後の増分応力は、式(3.51)を参考にすると以下となる。

$$\begin{aligned} \Delta f_{n+1} &= f_{n+1} - f_n = \frac{\Delta t}{2} (\dot{f}_{n+1} + \dot{f}_n) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (\dot{f}_{n+1} - \dot{f}_n + 2\dot{f}_n) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (\Delta \dot{f}_{n+1} + 2\dot{f}_n) \end{aligned} \dots\dots (3.65)$$

式(3.64)を上式に代入すると、

$$\Delta f_{n+1} = \frac{\Delta t}{2} \left(k \Delta \dot{u}_{n+1} - \frac{k}{c} \Delta f_{n+1} + 2 \left(k \dot{u}_n - \frac{k}{c'} (f_n - f_0') \right) \right) \dots\dots (3.66)$$

上式を Δf_{n+1} で整理すると、以下の式が得られる。

$$\left(1 + \frac{k \Delta t}{2c} \right) \Delta f_{n+1} = -\frac{k \Delta t}{c'} f_n + \frac{k \Delta t}{2} \Delta \dot{u}_{n+1} + k \Delta t \dot{u}_n + \frac{k \Delta t}{c'} f_0' \quad \dots (3.67)$$

従って、 Δf_{n+1} は次式で与えられる。

$$\Delta f_{n+1} = -\frac{c}{c'} \frac{2k \Delta t}{2c + k \Delta t} f_n + \frac{ck \Delta t}{2c + k \Delta t} \Delta \dot{u}_{n+1} + \frac{2ck \Delta t}{2c + k \Delta t} \dot{u}_n + \frac{c}{c'} \frac{2k \Delta t}{2c + k \Delta t} f_0' \dots\dots (3.68)$$

ここで、式(3.56)を用いると、増分形式の方程式が次のように

$$\Delta f_{n+1} = -2b\alpha' f_n + \alpha \Delta \dot{u}_{n+1} + 2\alpha \dot{u}_n + 2b\alpha' f_0 \quad \dots\dots (3.69)$$

得られる。

Maxwell モデルを、反復法を用いた振動方程式の中に組み込むための操作を以下にまとめる。

1) 節点力と節点変位の関係は式(3.42)、(3.44) と(3.57)より次のように得られ、この関係式を釣合式に組み込む。

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\alpha \dot{u}_n + b\gamma f_n + \alpha' f_0 + b\alpha' f_0') \quad \dots\dots (3.70)$$

3.9.3 反復法に対する Maxwell モデルの適用

2) $n+1$ ステップの節点変位 u_i, u_j と速度 \dot{u}_i, \dot{u}_j が求まった後、次式を用いて要素応力 f_{n+1} 、要素変位と速度 u_1, u_2, \dot{u}_1 を求める。

$$\left. \begin{aligned} f_{n+1} &= b\gamma f_n + \alpha(\dot{u}_j - \dot{u}_i) + \alpha\dot{u}_n + \alpha'f_0 + b\alpha'f_0' \\ u_2 &= \frac{f_{n+1}}{k} \\ \dot{u}_1 &= \frac{(f_{n+1} - f_0)}{c} \\ u_1 &= (u_j - u_i) - u_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.71)$$

3) また、線形の節点力と変位の関係は、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\alpha_0 \dot{u}_n + \gamma_0 f_n) \quad \dots\dots(3.72)$$

4) 非線形応力 f_{n+1} と線形応力 f_{n+1} の状態における各係数の設定は以下の場合に分類して行う。

4)-1 $\text{istat}=0$ の状態 (線形)

ここでは、前述の線形の節点力と変位の関係を用いて、フレームの振動方程式に取り込むことになる。

4)-2 $\text{istat}=1$ の状態 (非線形)

内部応力を次式のように変形する。

$$\begin{aligned} {}_n f_{n+1} &= \gamma_1 f_n + \alpha_1 \dot{u}_{n+1} + \alpha_1 \dot{u}_n + \alpha_1' f_0 \\ &= \alpha_0 \dot{u}_{n+1} + (\alpha_1 - \alpha_0) \dot{u}_{n+1} + \alpha_1 \dot{u}_n + 2\alpha_1' f_0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3.73)$$

上式を用いて、節点変位と節点力の関係を求める。

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} ((\alpha_1 - \alpha_0) \dot{u}_{n+1} + \gamma_1 f_n + \alpha_1 \dot{u}_n + 2\alpha_1' f_0) \quad \dots\dots(3.74)$$

ここで、 \dot{u}_{n+1} は予測節点速度を用いて計算する。各係数は、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{c_0 k \Delta t}{2c_0 + k \Delta t} & \gamma_0 &= \frac{2c_0 - k \Delta t}{2c_0 + k \Delta t} \\ \alpha_1 &= \frac{c_1 k \Delta t}{2c_1 + k \Delta t} & \gamma_1 &= \frac{2c_1 - k \Delta t}{2c_1 + k \Delta t} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.75a)$$

$$\alpha'_1 = \frac{k\Delta t}{2c_1 + k\Delta t} \quad f_0 = f_1(1 - c_1/c_0) \quad \dots\dots(3.75b)$$

で与えられる。

4)-3 istat=0 の状態（線形）から istat=1 の状態（非線形）へ移るとき

内部応力は、(3.73)式を少し変形して、

$$f_{n+1} = b\gamma_0 f_n + (\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + \alpha_0\dot{u}_{n+1} + \alpha_0\dot{u}_n + b\alpha'_1 f_0 \quad \dots\dots(3.76)$$

上式より、節点変位と節点力の関係は、

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ (\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + b\gamma_0 f_n + \alpha_0\dot{u}_n + b\alpha'_1 f_0 \right\} \quad \dots\dots(3.77)$$

ここで、bは

$$b = \frac{c_1}{c_0}$$

4)-4 istat=1 の状態（非線形）から istat=0 の状態（線形）へ移るとき

内部応力は、式(3.71)を少し変形して、

$$f_{n+1} = b'\gamma_1 f_n + \alpha_0\dot{u}_{n+1} + \alpha_1\dot{u}_n + b'\alpha'_1 f_0 \quad \dots\dots(3.78)$$

上式より、節点変位と節点力の関係は、

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ b'\gamma_1 f_n + \alpha_1\dot{u}_n + b'\alpha'_1 f_0 \right\} \quad \dots\dots(3.79)$$

ここで、bは

$$b' = \frac{c_0}{c_1} \quad \dots\dots\dots(3.80)$$

である。

陰解法を用いた振動方程式の中に、Maxwell モデルを組み込むための操作を以下にまとめる。

1) 節点力と節点変位の関係、この関係式を釣合式に組み込む。

3.9.4 陰解法に対する Maxwell モデルの適用

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_i \\ \Delta p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ -\bar{\alpha} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_i \\ \Delta \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (2\bar{\alpha}\dot{u}_n + 2b\alpha'(-f_n + f_0)) \quad \cdots(3.81)$$

ここで、 $\bar{\alpha}$ は状態によって変化し、istat=0 の状態では、 α_0 を用い、
また、istat=1 の場合は、 α_1 を用いることになる。

2) $n+1$ ステップの節点変位 u_i, u_j と速度 \dot{u}_i, \dot{u}_j が求まった後、次式を用いて要素応力 f_{n+1} 、要素変位と速度 u_1, u_2, \dot{u}_1 を求める。

$$f_{n+1} = \gamma f_n + \bar{\alpha}(\dot{u}_j - \dot{u}_i) + \bar{\alpha}\dot{u}_n + \alpha' f_0 \quad \cdots(3.82)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + \Delta f_{n+1} \\ f_{n+1} &= (1 + 2b\alpha')f_n + \bar{\alpha}(\Delta \dot{u}_j - \Delta \dot{u}_i) + 2\bar{\alpha}\dot{u}_n + 2b\alpha' f_0 \end{aligned} \quad \cdots(3.83)$$

ダッシュポットとばねの変位は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{f_{n+1}}{k} \\ u_1 &= (u_j - u_i) - u_2 \\ \dot{u}_1 &= \frac{(f_{n+1} - f_0)}{\bar{c}} \end{aligned} \quad \cdots(3.84)$$

ここで、 \bar{c} は状態によって変化する。

前節で得た Maxwell モデルの理論式を全体の釣合式に組み込む手法について述べる。

最初に、反復法についてであるが、反復法に関する非線形振動方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} + \{f_d\} &= -[M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} \\ &+ \{P_s\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta \bar{y}\} + [K]\{\bar{y}\} \quad \cdots(3.85) \end{aligned}$$

上式で、 $\{f_d\}$ は制振ダンパーの節点力を節点での力の釣合より重ね合わせたベクトルであり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \{f_d\} &= \sum (\alpha_0 \dot{u}_{n+1} + \{(\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + b\bar{\gamma} f_n + \bar{\alpha}\dot{u}_n + \bar{\alpha}' f_0 + b\bar{\alpha}'' f_0'\}) \\ &= [C_0]\{\dot{y}\} + \{\bar{f}_d\} \quad \cdots(3.86) \end{aligned}$$

3.9.5 非線形振動方程式への組込法

3.9.5.1 反復法

ここで、減衰項の状態によって、上式が以下のように異なる。

Istat=0 : 線形

$$\left. \begin{array}{lll} \alpha_1 - \alpha_0 = 0 & \bar{\alpha} = \alpha_0 & b = 1 \\ \bar{\gamma} = \gamma_0 & \bar{\alpha}' = 0 & \bar{\alpha}'' = 0 \end{array} \right\} \cdots (3.87)$$

Istat=1 : 非線形

$$\left. \begin{array}{lll} \alpha_1 - \alpha_0 \neq 0 & \bar{\alpha} = \alpha_1 & b = 1 \\ \bar{\gamma} = \gamma_1 & \bar{\alpha}' = \alpha' & \bar{\alpha}'' = \alpha' \end{array} \right\} \cdots (3.88)$$

Istat=0 から Istat=1 の状態に変るとき

$$\left. \begin{array}{lll} \alpha_1 - \alpha_0 \neq 0 & \bar{\alpha} = \alpha_1 & b = c_1 / c_0 \\ \bar{\gamma} = \gamma_1 & \bar{\alpha}' = \alpha' & \bar{\alpha}'' = 0 \end{array} \right\} \cdots (3.89)$$

Istat=1 から Istat=0 の状態に変るとき

$$\left. \begin{array}{lll} \alpha_1 - \alpha_0 = 0 & \bar{\alpha} = \alpha_0 & b = c_0 / c_1 \\ \bar{\gamma} = \gamma_0 & \bar{\alpha}' = 0 & \bar{\alpha}'' = \alpha' \end{array} \right\} \cdots (3.90)$$

ダンパー力を表す式(3.86)の右辺1項を除いて第2項以降を、釣合式(3.85)の右辺に移項し、定数項とする。振動方程式は、

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = & -[M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} \\ & + \{P_s\} - \{\bar{f}_d\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_r(\bar{y})]\{\Delta\bar{y}\} + [K]\{\bar{y}\} \cdots \cdots (3.91) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{array}{l} [\bar{C}] = [C] + [C_0] \\ \{\bar{f}_d\} = \sum \{(\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + b\bar{\gamma}f_n + \bar{\alpha}\dot{u}_n + \bar{\alpha}'f_0 + b\bar{\alpha}''f_0'\} \end{array} \right\} \cdots (3.92)$$

である。

非線形振動方程式(3.91)にニューマークの法を適用する。変位ベクトル $\{y_{n+1}\}$ と速度ベクトル $\{\dot{y}_{n+1}\}$ を次式で仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n \Delta t + \{(0.5 - \beta)\ddot{y}_n + \beta\ddot{y}_{n+1}\} \Delta t^2 \\ \dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + \{(1 - \delta)\ddot{y}_n + \delta\ddot{y}_{n+1}\} \Delta t \end{array} \right\} \cdots (3.93)$$

仮定した変位ベクトルと速度ベクトルを振動方程式(3.91)に代入し、 $n + 1$ ステップの加速度ベクトル $\{\ddot{y}_{n+1}\}$ を未知変数ベクトルとして、方程式を次式のように整理する。

$$\begin{aligned} \{[M] + \delta \Delta t [\bar{C}] + \beta \Delta t^2 [K]\}\{\ddot{y}_{n+1}\} = & -[M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} + \{P_s\} \\ & - [\bar{C}]\{\dot{y}_n + (1 - \delta)\Delta t \ddot{y}_n\} - [K]\{y_n + \Delta t \dot{y}_n + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{y}_n\} \end{aligned}$$

$$-\{\bar{f}_d\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta\tilde{y}\} + [K]\{\tilde{y}\} \quad \dots\dots(3.94)$$

上式は、加速度ベクトル $\{\ddot{y}_{n+1}\}$ に関する線形方程式となっている。ただし、右辺には $n + 1$ ステップの変位 \tilde{y} や増分変位 $\{\Delta\tilde{y}\}$ 、あるいは、 $\{\bar{f}_d\}$ の中に速度 $\{\dot{\tilde{y}}\}$ が存在する。そこで、これらは次式を用いて仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{y}\} &= \{y_n\} + \{\dot{y}_n\}\Delta t + 0.5\{\ddot{y}_n\}\Delta t^2 \\ \{\dot{\tilde{y}}\} &= \{\dot{y}_n\} + \{\ddot{y}_n\}\Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.95)$$

最初、式(3.95)を用いて、式(3.94)の右辺を計算し、その後、線形方程式を解いて未知加速度を求める。式(3.93)を用いて、変位と速度ベクトルを得て、最初に仮定した変位と方程式を解いて得た変位が同一となれば、この非線形方程式が解けたことになる。同一とならない場合は、再度、変位と速度を仮定し、同じ過程を繰り返すことになる。

3.9.5.2 陰解法

次に、陰解法への組み込み法に付いて述べる。陰解法に関する振動方程式は次に示す増分形式で表される。

$$\begin{aligned} [M]\{\Delta\ddot{y}\} + [C]\{\Delta\dot{y}\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + \{\Delta f_d\} \\ = \{R\} - [M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} + \{\Delta P_s\} \quad \dots\dots(3.96) \end{aligned}$$

ここで、 $[K_T(\bar{y})]$ は接線剛性行列、 $\{\Delta f_d\}$ はMaxwellモデル制振ダンパーの増分節点力、 $\{R\}$ は、以下に示す不釣合力であり、増分時間前の変位等を用いて計算した値である。

$$\{R\} = \{f_{ex}\} - [M]\{\ddot{\bar{y}}\} - [C]\{\dot{\bar{y}}\} - \{Q(\bar{y})\} - \{f_d\} \quad \dots\dots(3.97)$$

ここで、

$$\{f_{ex}\} = -[M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} + \{P_s\} \quad \dots\dots(3.98)$$

上式で、 $\{Q(\bar{y})\}$ は、部材応力から求めた節点力ベクトルである。制振ダンパーの増分節点力は、式(3.71)より以下のように示される。

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_i \\ \Delta p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ -\bar{\alpha} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_i \\ \Delta \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (2\bar{\alpha}\dot{u}_n + 2b\alpha'(f_n + f_0)) \quad \dots\dots(3.99)$$

各節点での力の釣合より、増分ダンパー節点ベクトルは次のように得ら

れる。

$$\begin{aligned}\{\Delta f_d\} &= [C_0]\{\Delta \dot{y}\} + \{2\bar{\alpha}\dot{u}_n + 2b\alpha'(f_n + f_0)\} \\ &= [C_0]\{\Delta \dot{y}\} + \{\Delta \bar{f}_d\} \dots\dots\dots (3.100)\end{aligned}$$

式(3.100)を式(3.96)に代入すると、増分形式の振動方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}[M]\{\Delta \ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\Delta \dot{y}\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} \\ = \{R\} - [M]\left\{\{I_x\}\ddot{u}_g + \{I_y\}\ddot{v}_g + \{I_z\}\ddot{w}_g\right\} + \{\Delta P_s\} - \{\Delta \bar{f}_d\} \quad \dots (3.101)\end{aligned}$$

非線形振動方程式(3.101)にニューマークの法を適用する。変位ベクトル $\{y_{n+1}\}$ と速度ベクトル $\{\dot{y}_{n+1}\}$ を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned}\{y_{n+1}\} &= \{y_n\} + \{\dot{y}_n\}\Delta t + \{(0.5 - \beta)\{\ddot{y}_n\} + \beta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t^2 \\ \{\dot{y}_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\} + \{(1 - \delta)\{\ddot{y}_n\} + \delta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t\end{aligned} \right\} \dots (3.102)$$

上式を用いて、増分変位と増分速度を求めると、以下のようである。

$$\left. \begin{aligned}\Delta\{\ddot{y}_{n+1}\} &= \{\ddot{y}_{n+1}\} - \{\ddot{y}_n\} \\ \Delta\{\dot{y}_{n+1}\} &= \{\dot{y}_{n+1}\} - \{\dot{y}_n\} = \{(1 - \delta)\{\ddot{y}_n\} + \delta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t \\ &= (\{\ddot{y}_n\} + \delta\Delta\{\ddot{y}_{n+1}\})\Delta t \\ \{\Delta y_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\}\Delta t + (0.5\{\ddot{y}_n\} + \beta\Delta\{\ddot{y}_{n+1}\})\Delta t^2\end{aligned} \right\} \dots (3.103)$$

仮定した増分変位ベクトルと増分速度ベクトルを振動方程式(3.101)に代入し、 $n + 1$ ステップの増分加速度ベクトル $\{\Delta \ddot{y}_{n+1}\}$ を未知変数ベクトルとして、方程式を次式のように整理する。

$$\begin{aligned}\{[M] + \delta\Delta t[\bar{C}] + \beta\Delta t^2[K]\}\{\Delta \ddot{y}_{n+1}\} \\ = -[M]\left\{\{I_x\}\Delta \ddot{u}_g + \{I_y\}\Delta \ddot{v}_g + \{I_z\}\Delta \ddot{w}_g\right\} + \{\Delta P_s\} \\ + \{R\} - \{\Delta \bar{f}_d\} - [\bar{C}]\{\Delta t\{\ddot{y}_n\}\} - [K]\{\Delta t\{\dot{y}_n\} + 0.5\Delta t^2\{\ddot{y}_n\}\} \\ \dots\dots\dots (3.104)\end{aligned}$$

ここで、

$$\{R\} = \{f_{ex}\} - [M]\{\ddot{\bar{y}}\} - [C]\{\dot{\bar{y}}\} - \{Q(\bar{y})\} + \{f_d\} \quad \dots\dots (3.105)$$

となり、増分系の振動方程式が得られる。

3.10 振動方程式 の固有値解析

減衰項を考慮した線形振動方程式に対する固有値問題は次のように定義される。ただし、 $\{\phi\}$ は振動モード、 $\{X\}$ は各モードに対応した一般化変位ベクトル、 ω は円振動数、 i は虚数を各々表す。

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} + i\omega [C] \{\phi\} + [K] \{\phi\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.106)$$

上式は固有振動数 ω に関して一次の項を含んでいるため、複素固有値問題として解 ω を求めなければならない。しかし、前述したモード減衰を使用するとき、 ω の一次項を無視して下式のような一般固有値問題として解を求めても良い。

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\} \quad \dots\dots\dots (3.107)$$

ここで、 $[M]$ と $[K]$ が共に対称マトリクスであることから、固有値 ω は実数であることが保証され、しかも、 $[K]$ が正定値であれば固有値は全て正の値を持つことになる。この条件によって構造物は固有の振動数を持ち、逆に正定値でなければ、ゼロもしくは負の固有値をひとつ以上持つことになる。そのとき、構造物の変位が急激に大きくなる状態、いわゆる動的に不安定な状態を示すことになる。

空間構造物の振動に関する固有値問題では、以下のようにせん断型モデルと異なる特徴が存在する。この相違を良く認識し、計算手法を選択すべきである。

- 1．質量マトリクス $[M]$ にゼロ対角項が存在する場合がある。
- 2．複素固有値を持つ場合が多い。
- 3．多数の近接固有値が存在する。
- 4．高次モードも比較的固有周期が長い。

本システムで用いられている固有値問題を数値計算する手法は、せん断系モデルには、相似変換法的一种であるヤコビ法であり、スペースフレームでは、サブスペース法である。以下にその手法と特徴が概説する。

ヤコビ法 相似変換法は以下の固有ベクトルに関する基本的な性質を利用した解析手法である。

$$[\psi]^T [K] [\psi] = [\omega^2] \quad ; \quad [\psi]^T [M] [\psi] = [I] \quad \dots\dots\dots (3.108)$$

マトリクス $[\psi]$ はマトリクス $[M]$ と $[K]$ を同時に対角化する一意の行列

3.11 固有値問題 の解析手法

であり、変換法は反復によってこのマトリクスを作成する手法である。この手法の一つにヤコビ(Jacobi)法がある。同法は、マトリクス $[M]$ が単位行列である標準固有値問題に適用されており、単位行列でない一般固有値問題では、拡張された一般化ヤコビ法が用いられる。

ヤコビ法の利点は、理論の単純さと安定性の良さにある。全ての対称マトリクスに対して適用でき、負の固有値やゼロの固有値を含んでいても計算が可能である。また、固有値が全て求まることも特徴のひとつである。ヤコビ法の基本的な考え方は、マトリクスの非対角成分がゼロに変るような回転行列 P_i を作成し、3重行列積を行って非対角成分をゼロとすることである。次に、順次その位置をずらし、同じ計算を実行する。無論、一度ゼロにした非対角項も、他の位置に関する再度の計算で値が入るが、その値は小さく、全体として非対角項がゼロに接近していくことになる。ゼロにする非対角項の選択法として、行か列を一度に実行する周期的ヤコビ法や閾値を使って効率的にゼロ化していく閾値ヤコビ法などが開発されている。しかしながら、同方法はマトリクス乗算が多く含まれ、しかも固有値全体を一度に求めるため、かなり時間がかかり、大次元行列の固有値問題には不向きと言える。ただし、他の手法と組み合わせると効率良く解く手法が開発され、大次元行列の固有値問題に広く使われている。

SPACE では、このヤコビ法がせん断型のモデルに適用され、全ての振動数及び振動モードを求める手法として用いられる。

サブスペース法 解析が大規模であると、マトリクス $[M]$ と $[K]$ は大次元となり、固有値問題の解法も効率のよい手法が求められる。サブスペース(Subspace iteration)法が、この種の問題に最も効果的であり、SPACE では、この大規模なスペースフレームの固有値問題を解く手法として用いられる。サブスペース法は大規模なバンド状の系の解析に適しており、逆反復法、サブスペースでの一般化ヤコビ法、また、スツルム列による固有値の検定などを併用する。同法は低次 P 個の固有値と対応する固有ベクトルを求めることになり、計算可能な固有値の数は、サブスペースの大きさに関連するため注意が必要で、例えば、サブスペースの自由度は、計算固有値に5程度足した数あるいは計算固有値の2倍程度が必要とされる。さらにサブスペースの自由度は質量行列におけるゼロ以外の自由度の数を越えてはならないとされていることから、系全体の自由度と求める固有値の数が近いときは注意が必要である。詳しくは、リファレンスマニュアルを参照されたい。

3.12 モーダルアナ
リシス

線形の振動方程式は、固有値問題で得た振動モードを用いて分解すると大次元の振動方程式を直接数値計算する必要がなくなる。ここでは、モーダルアナリシスの簡単な説明と空間構造物に適用するにあたっての注意点を述べる。

固有値問題を解くことによって、固有値と固有ベクトルが得られる。この二対の値を用いて以下の振動方程式を展開する。ここで扱う振動方程式は線形で、地震荷重のみ扱う。

$$\begin{aligned} & [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} \\ & = -[M]\{I_X\}\ddot{u}_g - [M]\{I_Y\}\ddot{v}_g - [M]\{I_Z\}\ddot{w}_g \end{aligned} \quad \cdots(3.109)$$

固有ベクトルを用いて、座標変換 $\{y\} = [\psi]\{X\}$ を行う。ここで、 $\{X\}$ は各固有ベクトルに対する一般化変位であり、また、 $[\psi]$ は固有ベクトル $\{\phi_i\}$ を以下のように並べた行列である。

$$\{X\}^T = (X_1 \ X_2 \ \cdots) ; [\psi] = [\{\phi_1\} \ \{\phi_2\} \ \cdots] \cdots \cdots (3.110)$$

振動方程式に座標変換を行い、また、左から行列 $[\psi]^T$ を乗ずると以下のように方程式が分離される。ただし、減衰はモード減衰を用いており、固有ベクトルによって対角化されるものとする。

$$\ddot{X}_i + 2h_i\omega_i\dot{X}_i + \omega_i^2 X_i = -\beta_{xi}\ddot{u}_g - \beta_{yi}\ddot{v}_g - \beta_{zi}\ddot{w}_g \quad \cdots \cdots \cdots (3.111)$$

上式は、第 i 次モードに対する振動方程式を表す。ここで X_i は第 i 次モードに対する一般化変位、 ω_i は同じく固有振動数、 h_i は減衰定数、 β_{xi} 、 β_{yi} 、 β_{zi} は各方向の刺激係数である。ここで、各係数は、

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}} ; c_i = \{\phi_i\}^T [C] \{\phi_i\} \\ m_i &= \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} ; k_i = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.112)$$

で与えられる。無論、 $[M]$ 正規化された振動モードを用いれば、 m_i は 1 となり、 k_i は ω_i^2 となる。第 i 次モードに対する 3 方向の刺激係数は以下のように表される。

$$\beta_{xi} = \frac{\{\phi_i\}^T [M] \{I_x\}}{m_i} ; \beta_{yi} = \frac{\{\phi_i\}^T [M] \{I_y\}}{m_i} ; \beta_{zi} = \frac{\{\phi_i\}^T [M] \{I_z\}}{m_i} \quad \cdots (3.113)$$

空間構造物では、3方向の入力地震波に対し各々の刺激係数を有している。その特徴は、例えば、上下方向の刺激係数が大きい場合、他の2つ、つまり、水平方向の刺激係数はほとんどゼロとなっている。このことから各モードに対する刺激係数の分布状態を知ることによって、任意のモードがどの方向の入力地震波に応答するかが分かることになる。例えば、単層ラチスドームのような空間構造物では、3方向共に低次モードの刺激係数が必ずしも大きな値となっておらず、むしろ高次モードの刺激係数に大きな値が見られる。これは、せん断型モデルのように低次の数モードのみで振動する場合と異なり、高次のモードも励起することが予想される。

モーダルアナリシスを用いた構造物全体の時刻歴応答は、式(3.111)の方程式を数値計算し、全モードの解を次式のように重ね合わせることによって得られる。ただし、重ね合わせの原理を用いているため、原則として線形範囲の応答しか扱えない。これがモーダルアナリシスの基本原理である。

$$\{y(t)\} = [\psi] \{X(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} X_i(t) \quad \dots\dots\dots(3.114)$$

ここで、 n は自由度の数である。一般にせん断型モデルのモーダルアナリシスでは低次の数モードを用いて応答を計算する。一方、空間構造物では大きな刺激係数が高次モードに出現するため、この高次モードが励起される可能性が高い。また、多くの固有周期は低次モードに近接して存在するため、レーリー減衰を使用すれば高次モードであっても減衰定数はあまり大きくならない。このことから、空間構造物をモーダルアナリシスで解析しようとする場合、モード数を多く取ることと、選択するモードに注意することが必要となる。

応答スペクトルを用いることで、応答の最大値を近似的に予測することができる。各モードの応答最大値は、刺激係数 β_i 、モード $\{\phi_i\}$ 、応答スペクトル値 $S_d(h_i, \omega_i)$ を乗じることによって得られる。ただし、各モードの最大値は同時に生じることはないので、近似的に応答の変位最大値が、

$$\{y_{\max}\} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\{\phi_i\} \beta_i S_d(h_i, \omega_i))^2} \quad \dots\dots\dots(3.115)$$

として求められる。この計算法は **2乗和平方根(SRSS)法**と呼ばれている。変位応答スペクトル値 $S_d(h_i, \omega_i)$ は第 i 次モードの固有振動数と減衰定

数を用いて求められる。変位応答スペクトルを速度応答スペクトル、加速度応答スペクトルに代えることで、各々の最大値が得られる。同法は、固有振動数が近接する場合など、ときによって応答値を過大に評価する場合がある。

せん断型モデルでは、実際の計算において低次のモードを用い、ある次数以上の高次モードを無視する場合が多い。しかし、前述したように空間構造物では高次モードでも刺激係数は大きくなり、また振動モードも複雑であるためモードの選択には特段の注意が必要となる。

SPACE では、前述の応答スペクトルと2乗和平方根法を利用して、簡易に最大変位を求めるオプションが用意されている。詳しくは、リファレンスマニュアルを参照されたい。

3.13 モード変形の 抜き取り操作

SPACE では、振動解析を行った結果から、指定した振動モードを抜き出し、構造物の振動状態を表示することができる。本節では、そこで用いられているモードの抜き出し手法の説明を行う。

節点の変位ベクトル $\{y(t)\}$ をとし、その変位ベクトルを振動モード $\{\phi_i\}$ で次のように展開できるとする。

$$\{y(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} X_i(t) \quad \dots\dots\dots (3.116)$$

ここで、 $X_i(t)$ は i 次モードの一般化変位を表し、 n は自由度を表す。次に、上式に $\{\phi_j\}$ を掛け、振動モードの直交性質を利用すると、 $X_i(t)$ は次式のように得られる。

$$X_i(t) = \{\phi_i\}^T \{y(t)\} \quad \dots\dots\dots (3.117)$$

抜き取られたモードの一般化変位と振動モードを用いて、次式で示すように、必要とするモード変形を重ね合わせて作り出すことができる。

$$\{\bar{y}(t)\} = \sum_{i=1}^k \{\phi_i\} X_i(t) \quad \dots\dots\dots (3.118)$$

ここで、 k は抜き取りたいモードの数であり、 $X_i(t)$ は、同じく抜き出すモードの一般化変位である。上式の $\{\bar{y}(t)\}$ を用いて、振動解の中から、必要なモード変形を抜き出すことになる。

3.14 振動モードを用いた静的荷重の作成

ここでは、加速度応答スペクトルと振動モードを用いて、静的荷重を作り出す方法について説明する。加速度応答スペクトルを用いると、近似的に加速度の最大値が以下のように得られる。

$$\{\ddot{y}_{\max}\} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\{\phi_i\} \beta_i S_a(h_i, \omega_i))^2} \quad \dots\dots\dots (3.119)$$

ここで、 $S_a(h_i, \omega_i)$ は加速度応答スペクトルである。次に、式(3.119)に質量行列を掛けることによって、以下のように慣性力が得られる。

$$\{f_S\} = [M] \{\ddot{y}_{\max}\} \quad \dots\dots\dots (3.120)$$

SPACE では、ユーザーが少し手を加えられるように式(3.120)を次のように変形する。ただし、質量行列は集中質量系のみ扱う。

$$\{F_S\} = f_c [M] \sum_{i=1}^n \pm (\{\phi_i\} \beta_i S_a(h_i, \omega_i)) \quad \dots\dots\dots (3.121)$$

ここで、 \pm はユーザーが任意に正負を選択できること意味し、また、 f_c は荷重係数である。また、 $[M]$ は集中質量系のみ扱うため対角行列である。