第４章　弾性部材

4.1 はじめに

本章では、弾性梁材に関する応力ーひずみの関係及び変位ーひずみの関係から、増分釣合式並びに接線剛性行列を、有限要素法を適用して求める。大変形を考慮するためには、軸方向ひずみの非線形項が必要であり、この非線形ひずみから増分ひずみおよび非線形剛性を求める。また接線剛性行列は、線形剛性と幾何剛性及び大変位剛性行列とからなり、本章において具体的に求めることにする。

4.2 非線形ひずみ

大変形を考慮するためには、変位とひずみの関係は非線形として扱わなければならない。連続体の変形は、*Euler* 表示あるいは *Lagrange* 表示で表現することができ、前者の表示は変形後の点を、後者の表示は変形前の点を座標の基点に考えている。

ここでは、*Lagrange* 表示を用いることとし、まず物体中で隣接する 2 点 $P\left(x_1,x_2,x_3\right)$ と $Q\left(x_1+dx_1,x_2+dx_2,x_3+dx_3\right)$ がそれぞれ $P'\left(X_1,X_2,X_3\right)$ と $Q'\left(X_1+dX_1,X_2+dX_2,X_3+dX_3\right)$ に変位したとする。変位前の 2 点 P と Q の距離を $d\ell_0$ とすると次式が成立する。ただし、指標 i を 1～3 に変化させ、その和をとるものとする。

$$d\ell_0{}^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 = dx_i dx_i \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

同様に、変形後の 2 点 P' と Q' の距離を $d\ell$ とすると次式が成立する。

$$d\ell^2 = dX_i dX_i \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

変位後の点の成分 X_i を変位前の成分 x_i で表すと次式となる。

$$X_i = x_i + u_i \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

ここで、 u_i は変位を表す。上式の両辺を微分すると、

$$dX_i = dx_i + u_{i,j}dx_j = \left(\delta_{ij} + u_{i,j}\right)dx_j \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

となる。ここで

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

であり、また δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、$i=j$ の時 $\delta_{ij}=1$、$i \neq j$

のの時、$\delta_{ij}=0$ となることを意味する。線分が $d\ell = d\ell_0$ の場合、連続体は剛体変位となり、したがって、$d\ell^2 - d{\ell_0}^2$ がひずみの測度を表すことになる。この式に式(4.1)と(4.2)を代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} d\ell^2 - d{\ell_0}^2 &= \left(\delta_{ij}+u_{i,j}\right)dx_j\left(\delta_{ik}+u_{i,k}\right)dx_k - dx_i dx_i \\ &= \left(\delta_{jk}+u_{j,k}+u_{k,j}+u_{i,j}u_{i,k}\right)dx_j dx_k - \delta_{jk}dx_j dx_k \\ &= \left(u_{j,k}+u_{k,j}+u_{i,j}u_{i,k}\right)dx_j dx_k \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

ここで、

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(u_{j,k}+u_{k,j}+u_{i,j}u_{i,k}\right) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

とおけば、式(4.5)は次式のようになる。

$$d\ell^2 - d{\ell_0}^2 = 2\varepsilon_{jk}dx_j dx_k \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

式(4.6)の ε_{jk} を *Lagrange* 表示のひずみテンソルという。ここで、式(4.6)の中で軸方向の項を取り出すと次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}\left\{u_{1,1}+u_{1,1}+\left(u_{1,1}u_{1,1}+u_{2,1}u_{2,1}+u_{3,1}u_{3,1}\right)\right\} \\ &= \frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

　次に梁要素を考える。法線保持の仮定を適用し、曲げによるひずみを式(4.8)に加えると、断面内の任意位置の軸方向ひずみは次式で与えられる。ただし、曲げによるひずみは線形とし、大きな曲率の変化は考慮しない。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} - y\frac{d^2v}{dx^2} - z\frac{d^2w}{dx^2} \\ &= \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa \end{aligned} \qquad \cdots(4.9)$$

ここで、ε_L は線形ひずみ、ε_N は非線形ひずみ、κ は曲げによる線形ひずみであり、それぞれ次式で表される。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{du}{dx} \\ \varepsilon_N &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} \\ \kappa &= -y\frac{d^2v}{dx^2} - z\frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.10)$$

ただし、以後は、非線形ひずみの第１項は省略する。

4.3 増分ひずみ

次に増分ひずみを求めることにする。今、弾性梁に外力$\{\bar{\mathbf{P}}\}$が作用し、変位$\{\bar{\mathbf{u}}\}$が生じているとする。この状態からさらに増分荷重$\{\Delta\mathbf{P}\}$によって変位増分$\{\Delta\mathbf{u}\}$が生じたとする。ただし、$\{\bar{\mathbf{P}}\}$、$\{\bar{\mathbf{u}}\}$と$\{\Delta\mathbf{P}\}$、$\{\Delta\mathbf{u}\}$はベクトルを表す。変位$\{\bar{\mathbf{u}}\}$および増分変位$\{\Delta\mathbf{u}\}$は、

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \{\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}\} \qquad \{\Delta\mathbf{u}\} = \{\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

とする。また、軸方向ひずみε_xは、式(4.9)より次式で与えられる。ただし、曲げによるひずみは線形とし、大きな曲率の変化は考慮しない。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_L + \varepsilon_N + \kappa \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.12)$$

ここで、ε_Lは線形ひずみ、ε_Nは非線形ひずみ、κは曲げによる線形ひずみであり、式(4.10)で与えられているが、それらのひずみをここに再度示す。ただし、非線形ひずみの第１項は省略している。ひずみは、

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_L &= \frac{du}{dx} \\
\varepsilon_N &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} \\
\kappa &= -y\frac{d^2v}{dx^2} - z\frac{d^2w}{dx^2}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4.13)$$

である。

次に、増分ひずみ$\Delta\varepsilon_x$を求める。増分ひずみは、

$$\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x\left(\bar{u}+\Delta u\right) - \varepsilon_x\left(\bar{u}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.14)$$

で与えられ、式(4.12)を考慮すると、

$$\Delta\varepsilon_x = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N + \Delta\kappa \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.15)$$

となる。ここで、線形増分ひずみ$\Delta\varepsilon_L$は、

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_L &= \varepsilon_L\left(\bar{u}+\Delta u\right) - \varepsilon_L\left(\bar{u}\right) \\
&= \frac{d\left(\bar{u}+\Delta u\right)}{dx} - \frac{d\bar{u}}{dx} \\
&= \frac{d\Delta u}{dx}
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

であり、非線形増分ひずみ$\Delta\varepsilon_N$は、

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_N &= \varepsilon_N\left(\bar{v}+\Delta v \quad \bar{w}+\Delta w\right)-\varepsilon_N\left(\bar{v} \quad \bar{w}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\left(\bar{v}+\Delta v\right)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\left(\bar{w}+\Delta w\right)}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\}+\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx}+\frac{d\bar{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx}\right)\\ &=\Delta_1\varepsilon_N+\Delta_2\varepsilon_N\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.17)$$

となる。ここで、式(4.17)で 2 つに分けた増分ひずみは、

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1\varepsilon_N &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\}\\ \Delta_2\varepsilon_N &= \frac{d\bar{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx}+\frac{d\bar{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.18)$$

として表される。また、曲げによる線形増分ひずみ $\Delta\kappa$ は、

$$\begin{aligned}\Delta\kappa &= -y\frac{d^2\Delta v}{dx^2}-z\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\\ &=\Delta\kappa_z+\Delta\kappa_y\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.19)$$

で与えられる。以上で全ての増分ひずみが定義できたことになる。

4.4 非線形釣合式

本節では、増分理論の定式化を仮想仕事の原理より求める。静的な釣合式は、増分後の応力状態における仮想仕事の原理より

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon\right)\left(\sigma_x+\Delta\sigma_x\right)dV=\int_S \delta\left(\Delta u\right)^T\left(P+\Delta P\right)dS \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.20)$$

として与えられる。ここで、$\sigma_x,\Delta\sigma_x$ は軸方向応力と増分軸方向応力であり、また $\{P\},\{\Delta P\}$ は荷重ベクトルと増分荷重ベクトル

$$\left\{P\right\}^T=\left\{P_x \quad P_y \quad P_z\right\} \qquad \left\{\Delta P\right\}^T=\left\{\Delta P_x \quad \Delta P_y \quad \Delta P_z\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.21)$$

である。増分前の変位および増分変位を次式で表し、

$$\left\{\bar{\mathbf{u}}\right\}=\left\{\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}\right\} \qquad \left\{\Delta\mathbf{u}\right\}=\left\{\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

ひずみと増分ひずみを、式(4.15)を参考にして

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_L+\varepsilon_N+\kappa\\ \Delta\varepsilon &= \Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4.23)$$

で表す。ただし、計算の都合で増分ひずみは、式(4.15)の表現と異なっている。ここでは、$\Delta\varepsilon_L$ は、増分変位に対して 1 次でまとめ、$\Delta\varepsilon_N$ は 2 次の項とする。したがって、$\Delta\varepsilon_L$ と $\Delta\varepsilon_N$ は次式となる。

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_L &= \Delta\varepsilon_0 + \Delta\bar{\varepsilon}_L + \Delta\kappa_z + \Delta\kappa_y \\
\Delta\varepsilon_0 &= \frac{d\Delta u}{dx} \\
\Delta\kappa_z &= -y\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \\
\Delta\kappa_y &= -z\frac{d^2\Delta w}{dx^2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.24)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_L = \frac{d\bar{v}}{dx}\cdot\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\bar{w}}{dx}\cdot\frac{d\Delta w}{dx} = \Delta_2\varepsilon_N \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.25)$$

$$\Delta\varepsilon_N = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2\right\} = \Delta_1\varepsilon_N \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.26)$$

増分ひずみ(4.23)を式(4.20)に代入すると仮想仕事式は次式となる。

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_N\right)\left(\sigma_x + \Delta\sigma_x\right)dV = \int_S \delta\left\{\Delta u\right\}^T\left(P + \Delta P\right)dS \quad \cdots\cdots(4.27)$$

上式を少し整理すると、

$$\begin{aligned}
&\int_V \left\{\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\sigma_x + \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\Delta\sigma_x + \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T\cdot\sigma_x + \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T\cdot\Delta\sigma_x\right\}dV \\
&\quad = \int_S \delta\left(\Delta u\right)^T\left(P\right)dS + \int_S \delta\left(\Delta u\right)^T\left(\Delta P\right)dS \qquad \cdots\cdots(4.28)
\end{aligned}$$

となり、式(4.28)で増分量の 3 次以上の高次項を省略し、左辺を二次の項、右辺を一次の項に整理すると、静的釣合式は次式となる。

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int_V \left\{\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\Delta\sigma_x + \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T\cdot\sigma_x\right\}dV \\
&\quad = \int_S \delta\left(\Delta u\right)^T\left(\Delta P\right)dS + \int_S \delta\left(\Delta u\right)^T\left(P\right)dS - \int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\cdot\sigma_x dV \cdots(4.29)
\end{aligned}}$$

非線形の静的釣合式

上式の左辺は、応力増分と増分前の応力が、それぞれ、ひずみ増分の線形、非線形成分に対して成す仮想仕事であり、右辺の第 1 項は、外力増分が変位増分に対して成す仮想仕事を表している。また、右辺第 2、3 項は不釣合力を表す。以降は、式(4.29)の各項を、有限要素法を用いて評価することになる。

4.5 有限要素法による定式化

4.5.1 増分ひずみ

有限要素法を用いて、釣合式(4.29)の各項を評価する。まず、変位関数として次式のように軸方向は 1 次式で、また、法線方向は 3 次式を用いる。ここで、u は軸方向変位を、v、w は法線方向変位を表す。

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \\ w &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} x^3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.30)$$

ただし、未定定数α_1～α_{10}は、梁両端の適合条件より、梁の両端（１端と２端）の変位を用いて次式で表される。

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} &= A_u^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} &= A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \end{Bmatrix} &= A_w^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.31)$$

ここで、部材長さを l とし、座標系は、右手、右ねじの法則を用いると

$$A_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.32)$$

$$A_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.33)$$

$$A_w^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & -\dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.34)$$

として表される。ここで、u_1、u_2 などは各々１端と 2 端の変位を表す。

増分前の変位および増分変位は、式(4.30)、(4.31)より次式となる

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & & & & & & & & \\ & & 1 & x & x^2 & x^3 & & & & \\ & & & & & & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \bar{\mathbf{u}} \right\} \cdots\cdots\cdots (4.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & & & & & & & & \\ & & 1 & x & x^2 & x^3 & & & & \\ & & & & & & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \Delta\mathbf{u} \right\} \cdots\cdots (4.36)$$

ここで、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_u^{-1} & & \\ & A_v^{-1} & \\ & & A_w^{-1} \end{bmatrix} \cdots\cdots (4.37)$$

$$\left\{ \bar{\mathbf{u}} \right\}^T = \left\{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_{z1} \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_{z2} \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{y1} \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\theta}_{y2} \right\} \cdots\cdots (4.38)$$

$$\left\{ \Delta\mathbf{u} \right\}^T = \left\{ \Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta v_1 \quad \Delta\theta_{z1} \quad \Delta v_2 \quad \Delta\theta_{z2} \quad \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{y2} \right\} \cdots\cdots (4.39)$$

次に、増分ひずみ$\Delta\varepsilon$を求める。最初に、式(4.35)、(4.36)を用いて、各変位の一階微分、二階微分を求める。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\bar{u}}{dx} \\ \dfrac{d\bar{v}}{dx} \\ \dfrac{d\bar{w}}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \bar{\mathbf{u}} \right\}$$

$$= \left[B_a \right] \left[A^{-1} \right] \left\{ \bar{\mathbf{u}} \right\} \cdots\cdots (4.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\Delta u}{dx} \\ \dfrac{d\Delta v}{dx} \\ \dfrac{d\Delta w}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \Delta\mathbf{u} \right\}$$

$$= \left[B_a \right] \left[A^{-1} \right] \left\{ \Delta\mathbf{u} \right\} \cdots (4.41)$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\Delta u}{dx} \\ \dfrac{d^2\Delta v}{dx^2} \\ \dfrac{d^2\Delta w}{dx^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 2 & 6x & & & & \\ & & & & & & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \Delta\mathbf{u} \right\}$$

$$=\left[B_b\right]\left[A^{-1}\right]\{\Delta\mathbf{u}\} \qquad \cdots(4.42)$$

次に、式(4.23)と式(4.24)を用いて、増分ひずみを求める。式(4.24)の第１項は、式(4.42)を用いると

$$\Delta\varepsilon_L\left(\bar{u},\Delta u\right)=\{1,-y,-z\}\left[B_b\right]\left[A^{-1}\right]\{\Delta\mathbf{u}\}+\left\{\bar{\varepsilon}_v\left(\bar{v}\right)+\bar{\varepsilon}_w\left(\bar{w}\right)\right\} \quad \cdots(4.43)$$

となる。ここで、$\Delta\varepsilon$ の項は、式(4.33)、(4.34)、及び(4.41)より

$$\bar{\varepsilon}_v\left(\bar{v}\right)=\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right)^T\cdot\frac{d\Delta v}{dx}=\{\bar{u}_v\}^T\left[A_v^{-1}\right]^T\{B_v\}^T\{B_v\}\left[A_v^{-1}\right]\{\Delta u_v\} \quad \cdots(4.44)$$

$$\bar{\varepsilon}_w\left(\bar{w}\right)=\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^T\cdot\frac{d\Delta w}{dx}=\{\bar{u}_w\}^T\left[A_w^{-1}\right]^T\{B_w\}^T\{B_w\}\left[A_w^{-1}\right]\{\Delta u_w\}\cdots(4.45)$$

となる。ここで、

$$\left.\begin{aligned}
&\{\Delta\mathbf{u}_v\}^T=\{\Delta v_1 \quad \Delta\theta_{z1} \quad \Delta v_2 \quad \Delta\theta_{z2}\}\\
&\{\Delta\mathbf{u}_w\}^T=\{\Delta w_1 \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{y2}\}\\
&\{\bar{\mathbf{u}}_v\}^T=\{\bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_{z1} \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_{z2}\}\\
&\{\bar{\mathbf{u}}_w\}^T=\{\bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{y1} \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\theta}_{y2}\}\\
&\{\mathrm{B}_v\}=\{\mathrm{B}_w\}=\{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4.46)$$

式(4.44)と(4.45)は、変形場として式(4.30)を用いると、x に関して４次式となり、しかも、ひずみエネルギーを計算する際、積分しなければならず、非常に複雑となる。そこで、ここでは、軸方向ひずみは、軸方向に関してほとんど変化しないとして、v , w の変位場を以下のように１次式で仮定し直す。

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{v}=\{1 \quad x\}A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{Bmatrix}\\
&\bar{w}=\{1 \quad x\}A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\bar{w}_1\\ \bar{w}_2\end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4.47)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta v=\{1 \quad x\}A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\end{Bmatrix}\\
&\Delta w=\{1 \quad x\}A_u^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta w_2\end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4.48)$$

したがって、式(4.44)の $\{B_v\},\{B_w\}$ 、及び $\bar{\varepsilon}_v\left(\bar{v}\right)$ は、

$$\{B_v\} = \{B_w\} = \{0 \quad 1\}$$

$$\overline{\varepsilon}_v(\overline{v}) = \{\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2\}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\ell} \\ 0 & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\{0 \quad 1\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \{\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2\}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell^2} \\ -\dfrac{1}{\ell^2} & \dfrac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\ell} \cdot \frac{\Delta v_1 - \Delta v_2}{\ell} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\ell^2} & -\dfrac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\ell^2} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.49)$$

同様に、式(4.45)の $\overline{\varepsilon}_w(\overline{w})$ は、

$$\overline{\varepsilon}_w(\overline{w}) = \frac{\overline{w}_1 - \overline{w}_2}{\ell} \cdot \frac{\Delta w_1 - \Delta w_2}{\ell} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\overline{w}_1 - \overline{w}_2}{\ell^2} & -\dfrac{\overline{w}_1 - \overline{w}_2}{\ell^2} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdot(4.50)$$

となる。

以上をまとめると、増分変位の一次項である増分ひずみ $\Delta\varepsilon_L(\overline{u}, \Delta u)$ は、

$$\Delta\varepsilon_L(\overline{u}, \Delta u) = [B_0]\{\Delta u\} + [B_L]\{\Delta u\} \quad \cdots\cdots(4.51)$$

と表され、各項は、式(4.43)、(4.49)、及び(4.50)より

$$[B_0]\{\Delta u\} = \{1, -y, -z\}[B_b]\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\} = \left\{\overline{B}_b\right\}^T\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\}$$

$$= \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2y \quad -6xy \quad 0 \quad 0 \quad -2z \quad -6xz\}\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\} \quad \cdot\cdot(4.52)$$

$$[B_L]\{\Delta u\} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\ell^2} & 0 & -\dfrac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\ell^2} & 0 & \dfrac{\overline{w}_1 - \overline{w}_2}{\ell^2} & 0 & -\dfrac{\overline{w}_1 - \overline{w}_2}{\ell^2} & 0 \end{Bmatrix}\{\Delta u\} \quad \cdots\cdots(4.53)$$

として表される。

次に、増分変位に関する 2 次項の増分ひずみを求める。増分ひずみ $\Delta\varepsilon_N(\Delta u^2)$ は式(4.26)より

$$\Delta\varepsilon_N(\Delta u^2) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta v}{dx} + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta w}{dx}\right\}$$

$$= \{\varepsilon_{Nv} + \varepsilon_{Nw}\} \quad \cdots\cdots(4.54)$$

で与えられており、変位場を用いると次式となる。

$$\varepsilon_{Nv}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T\cdot\frac{d\Delta v}{dx}$$
$$=\frac{1}{2}\{\Delta u_v\}^T\left[A_v^{-1}\right]^T\{B_v\}^T\{B_v\}\left[A_v^{-1}\right]\{\Delta u_v\} \qquad \cdots\cdots(4.55)$$

$$\varepsilon_{Nw}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^T\cdot\frac{d\Delta w}{dx}$$
$$=\frac{1}{2}\{\Delta u_w\}^T\left[A_w^{-1}\right]^T\{B_w\}^T\{B_w\}\left[A_w^{-1}\right]\{\Delta u_w\} \qquad \cdots\cdots(4.56)$$

4.5.2 増分応力

次に、増分応力を求めることにする。増分応力は、次式で与えられる。ただし、増分変位に関する２次の項は省略する。

$$\{\Delta\sigma\}=\int_A\begin{Bmatrix}\Delta\sigma_x\\-y\Delta\sigma_x\\-z\Delta\sigma_x\end{Bmatrix}dA=\int_A E\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}\Delta\varepsilon dA$$
$$=\int_A E\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}[B_0]dA+\int_A E\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}[B_L]dA$$
$$=\int_A E\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}\{1\quad -y\quad -z\}dA[B_b]\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\}$$
$$+\int_A E\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}dA\{B_L\}^T\{\Delta u\}$$
$$=[D][B_b]\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\}+\begin{Bmatrix}EA\\0\\0\end{Bmatrix}\{B_L\}^T\{\Delta u\}$$
$$=\{\Delta\sigma_L\}+\{\Delta\sigma_N\} \qquad \cdots\cdots(4.57)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}&\{\Delta\sigma\}=\begin{Bmatrix}\Delta N\\\Delta M_z\\\Delta M_y\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\Delta N_n\\\Delta M_{nz}\\\Delta M_{ny}\end{Bmatrix}\quad,\quad [D]=\begin{bmatrix}EA&&\\&EI_z&\\&&EI_y\end{bmatrix}\\&A=\int dA,\quad I_z=\int y^2dA,\quad I_y=\int z^2dA\end{aligned}\right\}\cdots(4.58)$$

となる。ただし、図芯位置での断面一次モーメントはゼロとしており、式(4.58)の行列$[D]$の非対角項はゼロとなる。式(4.57)の第１項である線

形の増分応力は、

$$\{\Delta\sigma_L\} = [D][B_b]\left[A^{-1}\right]\{\Delta u\} \qquad \cdots\cdots(4.59)$$

であり、各成分は、変位場の二次の微分式(4.42)を用いて求めることになる。最初に、増分軸力は、

$$\begin{aligned}\Delta N(x) &= EA\{0 \quad 1\}\left[A_u^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\end{Bmatrix}\\ &= \frac{EA}{\ell}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\end{Bmatrix} = -\frac{EA}{\ell}\left(\Delta u_1 - \Delta u_2\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.60)$$

となり、また、増分曲げモーメントは、

$$\begin{aligned}\Delta M_z(x) &= EI_z\{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\}\left[A_v^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta\theta_{z1}\\ \Delta v_2\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}\\ &= EI_z\left\{\left[-\frac{6}{\ell^2} \quad -\frac{4}{\ell} \quad \frac{6}{\ell^2} \quad -\frac{2}{\ell}\right] + x\left[\frac{12}{\ell^3} \quad \frac{6}{\ell^2} \quad -\frac{12}{\ell^3} \quad \frac{6}{\ell^2}\right]\right\}\begin{Bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta\theta_{z1}\\ \Delta v_2\\ \Delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(4.61)$$

$$\Delta M_y(x) = EI_y\left\{\left[-\frac{6}{\ell^2} \quad \frac{4}{\ell} \quad \frac{6}{\ell^2} \quad \frac{2}{\ell}\right] + x\left[\frac{12}{\ell^3} \quad -\frac{6}{\ell^2} \quad -\frac{12}{\ell^3} \quad -\frac{6}{\ell^2}\right]\right\}\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta\theta_{y1}\\ \Delta w_2\\ \Delta\theta_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$\cdots\cdots(4.62)$$

で与えられる。

次に、式(4.57)の第 2 項の非線形応力は、

$$\{\Delta\sigma_N\} = \begin{Bmatrix}\Delta N_n\\ \Delta M_{nz}\\ \Delta M_{ny}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}EA\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\{B_L(\bar{u})\}^T\{\Delta u\} \qquad \cdots\cdots(4.63)$$

で与えられ、その各成分は、次式となる。

$$\Delta N_n(x) = EA\left(\frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\Delta v_1 - \Delta v_2}{\ell} + \frac{\bar{w}_1 - \bar{w}_2}{\ell}\cdot\frac{\Delta w_1 - \Delta w_2}{\ell}\right) \qquad \cdots\cdots(4.64)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta M_{nz}(x) &= 0\\ \Delta M_{ny}(x) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(4.65)$$

4.5.3 不釣合力の評価

次に、式(4.29)の中の不釣合力を求める。不釣合力ϕは次式で表される。

$$\phi = \int_S \delta\{\Delta u\}^T (P) dS - \int_V \delta(\Delta\varepsilon_L)^T \sigma_x dV \qquad \cdots\cdots\cdot(4.66)$$

式(5.66)の第 2 項は、式(4.51)より

$$\begin{aligned}\int_V \delta(\Delta\varepsilon_L)^T \cdot \sigma_x dV &= \int_V \delta\left((B_0 + B_L)\{\Delta u\}\right)^T \cdot \sigma_x dV \\ &= \int_V (B_0)\cdot\sigma_x dV + \int_V (B_L)\cdot\sigma_x dV \qquad \cdots\cdots\cdot(4.67)\end{aligned}$$

となる。さらに、式(4.67)の第 1 項は、

$$\begin{aligned}\int_V (B_0)^T \sigma_x dV &= \int_V \left[A^{-1}\right]^T \{\bar{B}_b\} \sigma_x dV \\ &= \begin{bmatrix} A_u^{-1} & & \\ & A_v^{-1} & \\ & & A_w^{-1}\end{bmatrix}^T \int_V \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2y \quad -6xy \quad 0 \quad 0 \quad -2z \quad -6xz\}^T \sigma_x dV \\ &= \int_0^l (\left[A_u^{-1}\right]^T \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} N + \left[A_v^{-1}\right]^T \begin{Bmatrix}0\\0\\2\\6x\end{Bmatrix} M_z + \left[A_w^{-1}\right]^T \begin{Bmatrix}0\\0\\2\\6x\end{Bmatrix} M_y) dx \qquad \cdots\cdots\cdot(4.68)\end{aligned}$$

となる。ここで、式(4.68)で示されるベクトルの第 1 項は、

$$\int_0^\ell \left[A_u^{-1}\right] \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} N\,dx = \int_0^\ell \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & \frac{1}{\ell}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} N\,dx$$

となり、軸力が一定であることから、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{Bmatrix} \ell N = \begin{Bmatrix} -N \\ N \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.69)$$

次に、式(4.68)のベクトルの第 2 項は、

$$\int_0^\ell \left[A_v^{-1}\right]^T \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\}^T M_z(x) dx \qquad \cdots\cdot(4.70)$$

であり、$M_z(x)$は、1 次式で仮定されているため、両端の部材端力との釣合より、次式で表される。

$$M_z(x)=\{1 \quad x\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.71)$$

したがって、上式を式(4.70)に代入すると

$$\int_0^{\ell}\left[A_v^{-1}\right]^T\{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\}^T\{1 \quad x\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix}dx$$

$$=\left[A_v^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\ell & 3\ell^2\\ 0 & 0 & \ell^2 & 2\ell^3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix}$$

となり、整理すると

$$=\left[A_v^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \ell & \ell\\ \ell^2 & 2\ell^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell^3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{\ell} & \frac{1}{\ell^2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \ell & \ell\\ \ell^2 & 2\ell^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\\ -1 & 0\\ \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-M_{z1}\\ M_{z2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{M_{z1}+M_{z2}}{\ell}\\ M_{z1}\\ -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{\ell}\\ M_{z2}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.72)$$

次に、式(4.68)の第 3 項は、

$$\int_0^{\ell}\left[A_w^{-1}\right]^T\{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\}^T M_y(x)dx \qquad \cdots\cdot(4.73)$$

であり、$M_y(x)$は、1 次式で仮定されており、両端の材端力との釣合より、次式で表される。

$$M_y(x)=\{1 \quad x\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdot(4.74)$$

したがって、

$$\int_0^{\ell}\left[A_w^{-1}\right]^T\{0\quad 0\quad 2\quad 6x\}^T\{1\quad x\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix}dx$$

$$=\left[A_w^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\ell & 3\ell^2\\ 0 & 0 & \ell^2 & 2\ell^3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\left[A_w^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \ell & \ell\\ \ell^2 & 2\ell^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & -1 & \dfrac{2}{\ell} & -\dfrac{1}{\ell^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\ell} & -\dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \ell & \ell\\ \ell^2 & 2\ell^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\\ 1 & 0\\ \dfrac{1}{\ell} & -\dfrac{1}{\ell}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_{y1}\\ -M_{y2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{M_{y1}+M_{y2}}{\ell}\\ M_{y1}\\ \dfrac{M_{y1}+M_{y2}}{\ell}\\ M_{y2}\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(4.75)$$

不釣合力の非線形項は、

$$\int_V\delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)^T\sigma_x dV=\int_V\left[B_L\right]^T\sigma_x dV$$

$$=\int_V\left\{0\quad 0\quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2}\quad 0\quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2}\quad 0\quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2}\quad 0\quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2}\quad 0\right\}\sigma_x dV$$

$$=\ell N\left\{0\quad 0\quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2}\quad 0\quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2}\quad 0\quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2}\quad 0\quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2}\quad 0\right\}^T$$

$$=N\left\{0\quad 0\quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\quad 0\quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\quad 0\quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\quad 0\quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\quad 0\right\}^T\qquad\cdots\cdots(4.76)$$

となる。

4.6 線形剛性

本節では部材の接線剛性を求める。増分型の接線剛性は式(4.29)より

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot\Delta\sigma_x dV+\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)\cdot\sigma_x dV \qquad \cdots\cdots(4.77)$$

で与えられており、上式を有限要素法により評価する。

式(4.77)の第１項において、増分応力をヤング係数と増分ひずみで表し、定義し直す。

$$\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot\Delta\sigma_x dV=\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot(\Delta\varepsilon_L+\Delta\varepsilon_N)dV$$

ただし、ここでは増分ひずみの２次の項 $\Delta\varepsilon_N$ は無視すると、上式は式(4.51)より、

$$\begin{aligned}
&\int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_L\right)\cdot E\cdot\Delta\varepsilon_L dV\\
&=\int_V\left[B_0+B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_0+B_L\left(\bar{u}\right)\right]\left\{\Delta u\right\}dV\\
&=\left\{\int_V\left[B_0\right]E\left[B_0\right]dV+\int_V\left[B_0\right]E\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]dV\right.\\
&\left.+\int_V\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_0\right]dV+\int_V\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]E\left[B_L\left(\bar{u}\right)\right]dV\right\}\left\{\Delta u\right\} \qquad \cdots(4.78)
\end{aligned}$$

最初に、式(4.78)の接線剛性行列のうち線形剛性を評価する。式(4.78)の第２、３、４項は、後節で説明する大変位を表す剛性行列である。接線剛性を表す式(4.78)の第１項の剛性行列は、式(4.57)を考慮すると

$$\begin{aligned}
&\int_V\left[B_0\right]^T E\left[B_0\right]dV\\
&=\int_V\left[A^{-1}\right]^T\left[B_b\right]^T\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}E\left\{1\quad -y\quad -z\right\}\left[B_b\right]\left[A^{-1}\right]dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]&&\\&\left[A_v^{-1}\right]&\\&&\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\quad 1&&\\&0\quad 0\quad 2\quad 6x&\\&&0\quad 0\quad 2\quad 6x\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}EA&&\\&EI_z&\\&&EI_y\end{bmatrix}\\
&\quad\begin{bmatrix}0\quad 1&&\\&0\quad 0\quad 2\quad 6x&\\&&0\quad 0\quad 2\quad 6x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]&&\\&\left[A_v^{-1}\right]&\\&&\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}dx
\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}\left[K_u\right]&&\\&\left[K_v\right]&\\&&\left[K_w\right]\end{bmatrix} \qquad \cdots(4.79)$$

となり、次に、式(4.79)中の線形剛性行列の第 1 項$\left[K_u\right]$から順次求めることにする。まず、第 1 項$\left[K_u\right]$は

$$\left[A_u^{-1}\right]^T\int_0^\ell\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\{0\quad 1\}EAdx\left[A_u^{-1}\right]=EA\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{\ell}\\ 0 & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\int_0^\ell\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}dx\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}$$

$$=EA\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{\ell}\\ 0 & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \ell\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\qquad\cdots(4.80)$$

次に、式(4.79)の第 2 項$\left[K_v\right]$は、

$$\left[A_v^{-1}\right]^T\int_0^\ell\begin{Bmatrix}0\\0\\2\\6x\end{Bmatrix}\{0\quad 0\quad 2\quad 6x\}EI_z dx\left[A_v^{-1}\right]$$

となり、さらに、計算を進めると、

$$=EI_z\begin{bmatrix}1 & 0 & -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{1}{\ell^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\int_0^\ell\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 12x\\0 & 0 & 12x & 36x^2\end{bmatrix}dx\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell}\\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}$$

$$=EI_z\begin{bmatrix}1 & 0 & -\dfrac{3}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{1}{\ell^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\ell & 6\ell^2\\0 & 0 & 6\ell^2 & 12\ell^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell} & \dfrac{3}{\ell^2} & -\dfrac{1}{\ell}\\ \dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2} & -\dfrac{2}{\ell^3} & \dfrac{1}{\ell^2}\end{bmatrix}$$

$$=EI_z\begin{bmatrix}\dfrac{12}{\ell^3} & \dfrac{6}{\ell^2} & -\dfrac{12}{\ell^3} & \dfrac{6}{\ell^2}\\ & \dfrac{4}{\ell} & -\dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell}\\ & & \dfrac{12}{\ell^3} & -\dfrac{6}{\ell^2}\\ sym & & & \dfrac{4}{\ell}\end{bmatrix}\qquad\cdots(4.81)$$

となる。最後に、式(4.79)の第 3 項$\left[K_w\right]$は、

$$\left[A_w^{-1}\right]^T \int_0^\ell \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \end{Bmatrix} \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} EI_y dx \left[A_w^{-1}\right]$$

$$= EI_y \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell^3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{\ell} & -\frac{1}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \int_0^\ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$= EI_y \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell^3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{\ell} & -\frac{1}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell & 6\ell^2 \\ 0 & 0 & 6\ell^2 & 12\ell^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & -\frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$= EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ & & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ sym & & & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.82)$$

となる。これら 3 項を重ね合わせることによって、線形の剛性行列が得られる。ただし、重ね合わせるとき、増分変位と変分した釣合式の順番を以下のように変更する。式(4.39)を参考に増分変位を示す。

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{u}\}^T = \{ & \Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{x1} \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta\theta_{z1} \\ & \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{x2} \quad \Delta\theta_{y2} \quad \Delta\theta_{z2} \ \} \end{aligned} \qquad \cdots(4.83)$$

この増分変位にしたがって並べ直した線形剛性行列は、この章の最後の第 4.10 節で示す。

次に幾何剛性と呼ばれる非線形剛性を求める。増分形式の静的釣合式である式(4.29)の左辺第 2 項より、幾何剛性は、式(4.26)より

$$
\begin{aligned}
\left[K_G\right]\{\Delta u\} &= \int_V \delta\left(\Delta\varepsilon_N\right)^T \cdot \sigma_x dV \\
&= \int_V \delta \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta v}{dx} + \left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta w}{dx}\right\}^T \cdot \sigma_x dV \\
&= \int_V \delta \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta v}{dx}\right\} \cdot \sigma_x dV + \int_V \delta \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^T \cdot \frac{d\Delta w}{dx}\right\} \cdot \sigma_x dV \\
&= \begin{bmatrix} [0] & & \\ & \left[K_{G1}\right] & \\ & & \left[K_{G2}\right] \end{bmatrix} \{\Delta u\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.84)
\end{aligned}
$$

と表され、その中の第 1 項と 2 項は、式(4.41)を参考にして

$$
\left.
\begin{aligned}
\left[K_{G1}\right] &= \int_0^\ell \int_A \sigma \left[A_v^{-1}\right]^T \{b_v\}^T \{b_v\} \left[A_v^{-1}\right] dA dx \\
\left[K_{G2}\right] &= \int_0^\ell \int_A \sigma \left[A_w^{-1}\right]^T \{b_w\}^T \{b_w\} \left[A_w^{-1}\right] dA dx
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots(4.85)
$$

ここで、断面に関する積分は、断面軸力を定数と仮定したことから、軸方向応力が

$$
\bar{N} = \int_A \sigma_x dA \qquad \cdots\cdots\cdots(4.86)
$$

となり、ｘ方向の積分の外に置くことができる。また、

$$
\{b_v\} = \{b_w\} = \left\{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\right\}
$$

であり、変位場の式(4.30)を式(4.84)に代入して、具体的に幾何剛性行列の値を求めることにする。まず、第 1 項は、

$$
\begin{aligned}
\left[K_{G1}\right] &= \bar{N}\int_0^\ell \left[A_v^{-1}\right]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \left\{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\right\} \left[A_v^{-1}\right] dx \\
&= \bar{N}\int_0^\ell \left[A_v^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3 \\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix} \left[A_v^{-1}\right] dx
\end{aligned}
$$

$$
= \bar{N}\left[A_v^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & \ell^2 & \dfrac{4}{3}\ell^3 & \dfrac{3}{2}\ell^4 \\ 0 & \ell^3 & \dfrac{3}{2}\ell^4 & \dfrac{9}{5}\ell^5 \end{bmatrix} \left[A_v^{-1}\right]
$$

$$
= \bar{N} \begin{bmatrix} \dfrac{6}{5\ell} & \dfrac{1}{10} & -\dfrac{6}{5\ell} & \dfrac{1}{10} \\ & \dfrac{2\ell}{15} & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{\ell}{30} \\ & & \dfrac{6}{5\ell} & -\dfrac{1}{10} \\ sym & & & \dfrac{2\ell}{15} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(4.87)
$$

として得られる。次に、第 2 項は、

$$
\left[K_{G2}\right] = \bar{N}\left[A_w^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & \ell^2 & \dfrac{4}{3}\ell^3 & \dfrac{3}{2}\ell^4 \\ 0 & \ell^3 & \dfrac{3}{2}\ell^4 & \dfrac{9}{5}\ell^5 \end{bmatrix} \left[A_w^{-1}\right]
$$

$$
= \bar{N} \begin{bmatrix} \dfrac{6}{5\ell} & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{6}{5\ell} & -\dfrac{1}{10} \\ & \dfrac{2\ell}{15} & \dfrac{1}{10} & -\dfrac{\ell}{30} \\ & & \dfrac{6}{5\ell} & \dfrac{1}{10} \\ sym & & & \dfrac{2\ell}{15} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.88)
$$

となる。これら 2 項を重ね合わせることによって、幾何剛性行列が得られる。ただし、重ね合わせのとき、増分変位と変分した釣合式の順番を式(4.83)にしたがって変更する。並べ直した幾何剛性行列は、この章の最後の第 4.10 節で示す。

4.8 大変位剛性

次に、大変位を表す大変位剛性行列を求めることにする。式(4.78)の第２，３，４項より、大変位を表す剛性行列は次式で与えられる。

$$\left[K_N\right]=\int_V\left[B_0\right]^T E\left[B_L\right]dV+\int_V\left[B_L\right]^T E\left[B_0\right]dV+\int_V\left[B_L\right]^T E\left[B_L\right]dV$$
$$=\left[K_{N1}\right]+\left[K_{N2}\right]+\left[K_{N3}\right] \qquad \cdots\cdots(4.89)$$

上式を有限要素法で評価する。まず、式(4.89)の第 1 項は

$$\left[K_{N1}\right]=\int_V\left[B_0\right]^T E\left[B_L\right]dV$$
$$=\int_V\left[A_v^{-1}\right]^T\left[B_b\right]^T\begin{Bmatrix}1\\-y\\-z\end{Bmatrix}E\left[B_L\right]dV$$
$$=\int_0^\ell\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]&&\\&\left[A_v^{-1}\right]&\\&&\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0&1&&&&&&&&\\&&0&0&2&6x&&&&\\&&&&&&0&0&2&6x\end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix}EA\\0\\0\end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix}0&0&\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0\end{Bmatrix}dx$$
$$=\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]&&\\&\left[A_v^{-1}\right]&\\&&\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix}0&EAl&0&0&0&0&0&0&0&0\end{Bmatrix}^T$$
$$\begin{Bmatrix}0&0&\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0\end{Bmatrix}$$
$$=EAl\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]&&\\&\left[A_v^{-1}\right]&\\&&\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0&0&\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0\end{Bmatrix}$$
$$=EA\begin{Bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0&0&\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{v}_1-\overline{v}_2}{\ell^2}&0&\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0&-\dfrac{\overline{w}_1-\overline{w}_2}{\ell^2}&0\end{Bmatrix}$$

$$
=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\quad\cdots\cdots(4.90)
$$

となる。ただし、断面一次モーメントはゼロである。

同様に、式(4.89)の第２項は

$$
\begin{aligned}
\left[K_{N2}\right] &= \int_V \left[B_L\right]^T E\left[B_0\right] dV \\
&= \int_V \left[B_L\right]^T E\{1 \quad -y \quad -z\}\left[B_b\right]\left[A_v^{-1}\right] dV \\
&= \left\{0 \quad 0 \quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0\right\}^T \\
&\qquad \{0 \quad EAl \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}\begin{bmatrix} \left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right] \end{bmatrix} \\
&= EA\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \\ 0 \\ -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \\ 0 \\ \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \\ 0 \\ -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \\ 0 \end{Bmatrix}\{-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\cdots\cdots(4.91)$$

となる。

さらに、式(4.89)の第 3 項は、

$$
\left[K_{N3}\right]=\int_V\left[B_L\right]^T\left[D\right]\left[B_L\right]dV
$$

$$
=\left\{0 \quad 0 \quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0\right\}^T EAl
$$

$$
\left\{0 \quad 0 \quad \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell^2} \quad 0\right\}
$$

$$\cdots\cdots(4.92)$$

となる。さらに、式(4.92)を計算すると、

$$
\left[K_{N3}\right]=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & -\left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & -\left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 \\
 & & sym & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\cdots\cdots(4.93)$$

となる。

　これら３項を重ね合わせることによって、大変位剛性行列が得られる。ただし、重ね合わせとき、増分変位と変分した釣合式の順番を式(4.83)にしたがって変更する。並べ直した大変位剛性行列は、この章の最後の第 4.10 節で示す。

4.9 接線剛性行列

　以上のように、接線剛性行列は、線形剛性、幾何剛性行列、大変位剛性行列の 3 つによって構成されている。この３つの剛性行列を以下にまとめて示すことにする。

　部材両端の増分変位ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\{\Delta \mathbf{u}\}^T = \{ & \Delta u_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{x1} \quad \Delta\theta_{y1} \quad \Delta\theta_{z1} \\
& \Delta u_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{x2} \quad \Delta\theta_{y2} \quad \Delta\theta_{z2} \ \}
\end{aligned}
$$

であり、接線剛性行列$[K_T]$は、

$$
[K_T] = [K_L] + [K_G] + [K_N] \qquad \cdots\cdots(4.94)
$$

となる。線形剛性行列$[K_L]$は、

$$
[K_L] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\
 & & & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} \\
 & & & & & & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\
 & & & sym & & & & & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{\ell}
\end{bmatrix}
$$

$$\cdots\cdots(4.95)$$

次に、幾何剛性行列$\left[K_G\right]$は、

$$
\left[K_G\right]=\bar{N}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\
 & & \frac{6}{5\ell} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5\ell} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{2\ell}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{\ell}{30} & 0 \\
 & & & & & \frac{2\ell}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{30} \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\
 & & & sym & & & & & \frac{6}{5\ell} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{2\ell}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2\ell}{15}
\end{bmatrix}
$$

$\cdots\cdots(4.96)$

最後に、大変位剛性行列$\left[K_N\right]$は、

$$
\left[K_N\right]=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}
0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
 & \left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & -\left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & -\left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & -\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell} & -\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \left(\frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\right)^2 & \frac{\bar{v}_1-\bar{v}_2}{\ell}\cdot\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
 & & sym & & & & & & \left(\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_2}{\ell}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

$\cdots\cdots(4.97)$

となる。

4.10 集中質量と分布質量

質量行列は、剛性行列と同様バンド性を有する行列と、対角項のみ値を持つ対角行列との２種類がある。整合質量行列と呼ばれるバンド行列は、分布する質量に対し、有限要素の概念を利用して、節点自由度に対応する質量係数から得られる。その特徴は、多数の非対角項を持ち、そのため質量連成を生じさせることである。また、集中質量系が静的縮約法により回転自由度を消去できるのに反し、分布質量系では回転を含めた全自由度について解析を行わなければならない。

集中質量系での質量行列は対角行列となり、その中で動的な回転自由度を無視することがよく行われる。この回転慣性の無視は、回転自由度が構造物の運動エネルギーの極めて小さい部分に関係するのみで、全体の挙動に影響を及ぼさないことから行われる。無視した回転自由度の扱いとして、静的縮約を行い自由度を減少させる方法がある。線形解析では、これを一度行えば良く、縮小率が大きいと、より効果的となる。ただし非線形系では、剛性行列などを作り直す関係で、毎ステップ静的縮約計算を行わなければならず、しかも得られる剛性はバンド性を保持できないため、逆に計算コストが上昇する。一方、回転慣性を無視したままの状態で、固有値問題や時刻歴応答計算を行う手法もある。ゼロ対角項を含んだまま計算する場合は、大規模な数値計算と、ゼロ対角項を含んでも不利益を被らない計算法とが必要となる。

ある種の集中質量系の構造物において、他と比較して質量が極端に小さいとき、その節点質量を無視することがある。この種の処置を行うと、回転自由度を無視した場合に比較して単に解の精度を下げるだけでなく、はるかに悪い結果をもたらす場合がある。特に、非線形挙動にその影響が大きく、その位置で生じる誤差によって解が発散するとか、あるいは大きな加速度が発生するとか異常な現象が現れる。このことからも動的自由度を持つ節点には質量を設定したほうが無難であると思われる。

質量の大小は、構造物の固有周期に影響を及ぼす。また、その分布は振動モードに影響を与える。固有周期は減衰と共に、外乱の応答スペクトル特性と関連して、応答値に直接影響する。そのため、質量項を計算するためのデータは、慎重に選択、設定すべきである。

4.10.1 集中質量

集中質量系では、はりの質量行列は、はり全体の質量を両端の節点に集中させ、次式で与えられる。ただし、一般的には、両端の回転角に関する慣性項は、無視する場合が多く、SPACE でもこれにしたがっている。

$$
[m]=\bar{m}l\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & sym & & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix} \cdots\cdots(4.98)
$$

ここで、$[m]$は部材の質量行列であり、は$\bar{m}$単位長さあたりの質量を表す。

4.10.2 分布質量

本節では、はりに一様に分布する質量による慣性力を精度良く評価する。まず、変位関数として次式のように軸方向は 1 次式で、また、法線方向は 3 次式を用いる。ここで、u は軸方向変位を、v、w は法線方向変位を表す。

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \alpha_1+\alpha_2 x \\
v &= \alpha_3+\alpha_4 x+\alpha_5 x^2+\alpha_6 x^3 \\
w &= \alpha_7+\alpha_8 x+\alpha_9 x^2+\alpha_{10} x^3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.99)
$$

ただし、未定定数α_1～α_{10}は、梁両端の適合条件より、梁の両端（１端と２端）の変位を用いて次式で表される。

$$
\left.\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} &= A_u^{-1}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix}\alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{Bmatrix} &= A_v^{-1}\begin{Bmatrix}v_1\\ \theta_{z1}\\ v_2\\ \theta_{z2}\end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.100)
$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \end{Bmatrix} = A_w^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.100)$$

したがって、はりの変位は、式(4.99)、(4.100)より次式となる

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & & & & & & & & \\ & & 1 & x & x^2 & x^3 & & & & \\ & & & & & & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \{ \mathbf{u} \} \qquad \cdots(4.101)$$

$$= [N] \left[A^{-1} \right] \{ \mathbf{u} \}$$

ここで、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_u^{-1} & & \\ & A_v^{-1} & \\ & & A_w^{-1} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.102)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & x & & & & & & & & \\ & & 1 & x & x^2 & x^3 & & & & \\ & & & & & & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.103)$$

はりの回転慣性項を計算するために、変位の一回微分が必要となるため、ここで、計算しておく。はりの回転角による図芯から離れた点の軸方向変位は、

$$u = -y \frac{dv}{dx} - z \frac{dw}{dx} \qquad \cdots\cdots(4.104)$$

であり、上式の変位の一回微分は、

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{dv}{dx} \\ \dfrac{dw}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \left[A^{-1} \right] \left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right\}$$

$$= [B] \left[A^{-1} \right] \left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right\} \qquad \cdots\cdots(4.105)$$

となる。

はりに一様に質量が分布しているとすると、分布質量系の質量行列は、たわみによる慣性項と回転慣性モーメント項の和として次式のように表される。

$$
\left[m_e\right]=\int_0^l\int_A\left[A^{-1}\right]^T\left[N\right]^T\rho\left[N\right]\left[A^{-1}\right]dAdx+
$$
$$
\int_0^l\int_A\left[A^{-1}\right]^T\left[B\right]^T\left[\bar{\rho}\right]\left[B\right]\left[A^{-1}\right]dAdx \qquad \cdots\cdots(4.106)
$$

ここで、は、l 部材長さであり、ρ は体積長さあたりの質量、A は断面積である。また、$[\bar{\rho}]$ は

$$
\left[\bar{\rho}\right]=\rho\begin{bmatrix}0 & & \\ & y^2 & \\ & & z^2\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.107)
$$

となる。

まず、質量行列を表す右辺第一項を求める。これは、併進運動による慣性項を表す。併進慣性項による質量行列 $[m_{e1}]$ は、質量が一様に分布していると仮定していることから、

$$
\begin{aligned}
\left[m_{e1}\right]&=\int_0^l\int_A\left[A^{-1}\right]^T\left[N\right]^T\rho\left[N\right]\left[A^{-1}\right]dAdx\\
&=\rho A\left[A^{-1}\right]^T\int_0^l\left[N\right]^T\left[N\right]dx\left[A^{-1}\right]\\
&=\rho A\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\left[M_u\right] & & \\ & \left[M_v\right] & \\ & & \left[M_w\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}\\
&=\rho A\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]^T\left[M_u\right]\left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right]^T\left[M_v\right]\left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right]^T\left[M_w\right]\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$
$$
\cdots\cdots(4.108)
$$

となり、また、

$$
\left[M_u\right]=\begin{bmatrix}l & \frac{l^2}{2}\\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3}\end{bmatrix};\quad \left[M_v\right]=\left[M_w\right]=\begin{bmatrix}l & \frac{l^2}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^2}{4}\\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5}\\ \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6}\\ \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6} & \frac{l^7}{7}\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.109)
$$

となる。

式(4.109)を考慮して､式(4.108)内部にある行列 3 重積を実行すると、各項は、以下のようになる。

$$\left[m_{e1}\right]=\begin{bmatrix}\left[m_{e1u}\right] & & \\ & \left[m_{e1v}\right] & \\ & & \left[m_{e1w}\right]\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.110)$$

$$\left.\begin{aligned}\left[m_{e1u}\right]&=\rho A\begin{bmatrix}\frac{l}{3} & \frac{l}{6}\\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3}\end{bmatrix}\\ \left[m_{e1v}\right]&=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ & & 156 & -22l\\ & & & 4l^2\end{bmatrix}\\ \left[m_{e1w}\right]&=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}156 & -22l & 54 & 13l\\ & 4l^2 & -13l & -3l^2\\ & & 156 & 22l\\ & & & 4l^2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4.111)$$

次に、式(4.106)の第 2 項、回転慣性項を求める。この回転慣性項は、

$$\begin{aligned}\left[m_{e1}\right]&=\int_0^l\int_A\left[A^{-1}\right]^T\left[B\right]^T\left[\bar{\rho}\right]\left[B\right]\left[A^{-1}\right]dAdx\\ &=\rho\left[A^{-1}\right]^T\int_0^l\left[B\right]^T\begin{bmatrix}0 & & \\ & I_Z & \\ & & I_Y\end{bmatrix}\left[B\right]dx\left[A^{-1}\right]\\ &=\rho\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & & \\ & I_Z\left[\bar{M}_v\right] & \\ & & I_Y\left[\bar{M}_w\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right] & & \\ & \left[A_v^{-1}\right] & \\ & & \left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}\\ &=\rho A\begin{bmatrix}0 & & \\ & I_Z\left[A_v^{-1}\right]^T\left[\bar{M}_v\right]\left[A_v^{-1}\right] & \\ & & I_Y\left[A_w^{-1}\right]^T\left[\bar{M}_w\right]\left[A_w^{-1}\right]\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.112)$$

ここで、$\left[\bar{M}_v\right]$と$\left[\bar{M}_z\right]$は、

$$\left[\bar{M}_v\right]=\int_0^\ell\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3\\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4\end{bmatrix}dx$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & \ell^2 & \frac{4}{3}\ell^3 & \frac{3}{2}\ell^4 \\ 0 & \ell^3 & \frac{3}{2}\ell^4 & \frac{9}{5}\ell^5 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.113)
$$

$$
\left[\bar{M}_w\right] = \left[\bar{M}_v\right] \quad \cdots\cdots(4.114)
$$

であり、したがって、

$$
\left[m_{e2}\right] = \rho \begin{bmatrix} 0 & & \\ & I_Z\left[m_{e2v}\right] & \\ & & I_Y\left[m_{e2w}\right] \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.115)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\left[m_{e1}\right] &= \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2\ell}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{\ell}{30} \\ & & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ sym & & & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix} \\
\left[m_{e2}\right] &= \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ & \frac{2\ell}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{\ell}{30} \\ & & \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ sym & & & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4.116)
$$

変位と釣合式の順番を以下のように変更する。式(4.39)を参考に変位を示す。

$$
\begin{aligned}
\{\mathbf{u}\}^T = \{ & u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \\
& u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \ \}
\end{aligned} \quad \cdots(4.117)
$$

この変位にしたがって併進慣性項による質量行列$\left[m_{e1}\right]$と、回転慣性項に関する質量行列$\left[m_{e2}\right]$は、以下のようである。なお、部材のねじれに関する慣性項は、回転慣性項のみ考慮している。回転方向の変形場は、1 次式で仮定している。

$$
\left[m_{e1}\right]=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}
\frac{420}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{420}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22l & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13l \\
 & & 156 & 0 & -22l & 0 & 0 & 0 & -54 & 0 & -13l & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & -13l & 0 & -3l^2 & 0 \\
 & & & & & 4l^2 & 0 & 13l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 \\
 & & & & & & \frac{420}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 156 & 0 & 0 & 0 & -22l \\
 & & & \mathit{sym} & & & & & 156 & 0 & 22l & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 4l^2 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 4l^2
\end{bmatrix} \cdots(4.118)
$$

$$
\left[m_{e2}\right]=\rho\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{I_Z 6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_Z}{10} & 0 & -\frac{I_Z 6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_Z}{10} \\
 & & \frac{I_Y 6}{5\ell} & 0 & -\frac{I_Y}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_Y 6}{5\ell} & 0 & -\frac{I_Y}{10} & 0 \\
 & & & \frac{I_X l}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_X l}{6} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{I_Y 2\ell}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_Y}{10} & 0 & -\frac{I_Y \ell}{30} & 0 \\
 & & & & & \frac{I_Z 2\ell}{15} & 0 & -\frac{I_Z}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_Z \ell}{30} \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{I_Z 6}{5\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_Z}{10} \\
 & & & \mathit{sym} & & & & & \frac{I_Y 6}{5\ell} & 0 & \frac{I_Y}{10} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{I_X l}{3} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{I_Y 2\ell}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{I_Z 2\ell}{15}
\end{bmatrix} \cdots(4.119)
$$