



第3章 SPACEにおける動的解析手法

本章では、SPACE に組み込まれている動的解析手法について解説し、最終的に得られた非線形方程式をどのように数値計算していくかについて学ぶ。

近年、構造設計における性能規定の導入によって、構造物の崩壊挙動や地震時の弾塑性応答に基づいた設計評価が、より重要となっている。これに伴い、数値解析の需要はますます増加し、構造設計分野の数値解析でも、

- 1) 構造物の大規模化に伴う自由度の増大
- 2) 弾塑性解析や座屈解析などを考慮し得る複雑なモデル化
- 3) 応力とひずみの関係など構成則の高精度化
- 4) 動的応答解析での微小時間刻みによる繰返し回数の増加

等の理由で、大規模化していくものと考えられる。例えば、動的解析では数千自由度規模の解析モデルに対して、数千回の繰返し計算が必要となる。このような数値解析は、合理的な構造設計を実現するために必要不可欠である。ここでは、大規模数値解析を効率的に処理する方法のひとつである反復解法について解説し、この手法を用いた数値計算システムについて説明する。具体的な数値計算に関する解析コードについては後章で詳細に述べる。

3.1 はじめに

3.2 反復解法

構造物の動的解析では、数値解析手法として *Newmark* 法が多用されている。同法はパラメータを適切に設定すれば安定した解が得られ、特に $\gamma=0.5$ 、 $\beta=1/4$ で無条件安定で高精度となることが知られている³⁾。一方、大規模行列による数値解析では多量の演算が必要となり、特に、膨大な解析ステップを実行する動的解析では、この部分の効率化が重要となる。そこで、SPACE では、非線形振動方程式を変更し、*Newmark* 法を利用して各増分ステップで反復解法となる手法を用いる。本節では、非線形振動方程式から反復解法の基礎式を導き、*Newmark* 法を適用する。

一般に、スペースフレームに関する非線型振動方程式は次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + \{K(y)\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_s\} \quad \cdots\cdots\cdots(3.1)$$

ここで、左辺第1項は慣性力、第2項は減衰項、第3項は幾何学的及び材料非線形性を有する構造物の内力ベクトルである。ベクトル $\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, \{y\}$ は、加速度、速度、変位を各々表す。また、右辺第1項は地震による外力、第2項は構造物に直接加わる荷重であり、時間に依存すれば風荷重に、依存しなければ擬似的な静的荷重に対応する。地震加速度ベクトル $\{\ddot{u}_g\}$ は各方向 x, y, z に関する加速度 $(\ddot{u}_g, \ddot{v}_g, \ddot{w}_g)$ である。行列 $[I]$ は、各方向の変位に対応する位置で1に、他は0となるベクトル $\{I_x\}, \{I_y\}, \{I_z\}$ から構成される。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{u}_g\} &= (\ddot{u}_g, \ddot{v}_g, \ddot{w}_g) \\ [I] &= [\{I_x\}, \{I_y\}, \{I_z\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

最初に、式(3.1)中の内力ベクトルの非線形部分を右辺に移項し、左辺には線形項のみ残して、振動方程式を以下のように変更する。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \\ -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{K(y)\} + [K]\{y\} \end{aligned} \dots\dots\dots (3.3)$$

さらに、右辺の非線形内力項を増分変位が小さいとして、以下のように書き換える。

$$\{K(y)\} = \{Q(\bar{y})\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} \dots\dots\dots (3.4)$$

ここで、 \bar{y} は増分時間前の変位であり、 Δy は増分変位である。また、 $\{Q(\bar{y})\}$ は部材応力から求めた節点力ベクトルを、 $[K_T(\bar{y})]$ は増分前の接線剛性を各々示す。上式を式(3.3)に代入すると、振動方程式は下式のように変更され、反復解法の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} \\ + \{P_S\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} \end{aligned} \dots\dots\dots (3.5)$$

上式に Newmark 法を適用する。まず、増分時間 t 秒後の変位ベクトル $\{y_{n+1}\}$ と速度ベクトル $\{\dot{y}_{n+1}\}$ を、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{y}_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\} + \{(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} + \delta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t \\ \{\Delta y_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\}\Delta t + \{(0.5-\beta)\{\ddot{y}_n\} + \beta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t^2 \\ \{y_{n+1}\} &= \{y_n\} + \{\Delta y_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

で仮定する。ここで、添え字の n は増分前の値、 $n+1$ は増分後の値、 δ, β は数値計算用パラメータを表す。次に、上式中の係数を

$$\left. \begin{aligned}
 \{a\} &= \{\dot{y}_n\} + \Delta t(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} \\
 \{b\} &= \Delta t\{\dot{y}_n\} + \Delta t^2(0.5-\beta)\{\ddot{y}_n\} \\
 \{\bar{b}\} &= \{y_n\} + \{b\} \\
 \mu_1 &= \Delta t\delta \\
 \mu_2 &= \Delta t^2\beta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

としてまとめ、式(3.6)と(3.7)を反復解法の基礎式(3.5)に代入すると、増分後の加速度を未知ベクトルとする釣合式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
 &[M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [C]\{\{a\} + \mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \\
 &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\
 &\quad - [K_T(y_n)]\{\{b\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \quad \dots\dots(3.8)
 \end{aligned}$$

さらに、上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 &([M] + \mu_1[C] + \mu_2[K])\{\ddot{y}_{n+1}\} \\
 &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \\
 &\quad + \mu_2([K] - [K_T(y_n)])\{\ddot{y}_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots(3.9)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、係数を以下のように

$$\left. \begin{aligned}
 [F] &= [M] + \mu_1[C] + \mu_2[K] \\
 [G] &= \mu_2([K] - [K_T(y_n)]) \\
 \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\
 &\quad - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

整理すると、方程式(3.9)は次のようになる。式(3.11)で分かるように両辺に未知ベクトルである増分後の加速度ベクトル $\{\ddot{y}_{n+1}\}$ を含んでおり、そのため、この方程式は反復法を用いて解かれることとなる。

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = [G]\{\ddot{y}_{n+1}\} + \{g\} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

上式から、ガウス・ザイデル法などと同様、下に示す分離型の反復式が得られる。

$$\{\ddot{y}_{n+1}\}^{i+1} = [F]^{-1}[G]\{\ddot{y}_{n+1}\}^i + [F]^{-1}\{g\} \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

ここで、上添え字 i は、反復回数を表し、同じく上添え字-1 は逆行列を表す。

SPACE で用いている動的解析システムは、上に示す反復式を効率良く、また記憶領域の少量化を考慮して計算する方法を用いている。例えば、式(3.10)中の係数行列 $[F]$ は、行列3つの足し算になっているが、行列を作

成した後に求めるのではなく、直接に係数行列 $[F]$ に組み込む方式がとられている。特に、減衰行列 $[C]$ は、レーリー減衰を使用する場合、各部材の剛性行列や節点質量から直接係数行列 $[F]$ に組み込まれる。また、右辺項の行列 $[G]$ とベクトル $\{g\}$ は、共に行列を用いて評価されているが、最終的には定数ベクトルとして得られれば良く、各行列は全体行列として計算する必要はない。ここでは、下式のように各部材ごとに部材行列を求め、対応する変位、あるいは速度と掛け算し、定数ベクトルに組み込むことになる。この方法を用いることによって、大きな記憶領域を必要としなくなる。ここでは、以下のように式(3.12)を変更して使用する。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{y}_{n+1}\}^{i+1} &= [F]^{-1} \{z\}^i \\ \{z\}^i &= \sum_{i=1}^m \left([G_i] \{\ddot{y}_{n+1}\}^i + \{g_i\} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

ここで、ベクトル $\{z\}^i$ は、部材毎の $[G_i]$ と対応する加速度 $\{\ddot{y}_{n+1}\}^i$ を掛け算し、また部材の $\{g_i\}$ を加えて、変形の適合を用いて重ね合わせたものである。

提案した反復解法を用いると、係数行列 $[F]$ は、線形であるため、一度LDU分解すれば各ステップで用いることができ、解を求めるための計算時間はほとんど必要としないことになる。

反復式(3.12)における初期値は、 t 秒前の値を用い、*Newmark*の法を利用して以下のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{n+1} &= \ddot{y}_n + \ddot{\ddot{y}}_n \Delta t \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \dot{\ddot{y}}_n \Delta t + \delta \ddot{\ddot{y}}_n \Delta t^2 \\ y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \Delta t + 0.5 \ddot{\ddot{y}}_n \Delta t^2 + \beta \ddot{\ddot{y}}_n \Delta t^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.14)$$

上式を初期値とすると、 t 秒前の3回微分が必要となる。ここでは、この3回微分を、 $2t$ 秒前の加速度 \ddot{y}_{n-1} を利用して下式で与える。

$$\ddot{\ddot{y}}_n = \frac{\ddot{y}_n - \ddot{y}_{n-1}}{\Delta t} \dots\dots\dots (3.15)$$

式(3.15)を式(3.14)に代入すると、精度の良い反復式の初期値が次のように得られる。SPACEでは、下式を初期値として用いることになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \left\{ (1 + \delta) \ddot{\ddot{y}}_n - \delta \ddot{\ddot{y}}_{n-1} \right\} \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \Delta t + \left\{ (0.5 + \beta) \ddot{\ddot{y}}_n - \beta \ddot{\ddot{y}}_{n-1} \right\} \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

3.3 反復解法の 初期値

3.4 反復解法に
おける発散

反復解法では、式(3.12)より、以下に示す反復行列 $[T]$ の特性によって、収束の速さや、また解が発散するか否かが決められる。

$$[T] = [F]^{-1}[G] \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

反復行列 $[T]$ の変化は、式(3.10)を参考にすると、時間が進んでも行列 $[F]$ は一定であるため、行列 $[G]$ 内の $[K_T(y_n)]$ に依存する。例えば、変位が小さく、接線剛性行列 $[K_T(y_n)]$ が線形の剛性行列に等しいとき、行列 $[G]$ はゼロ行列となり、そのため、式(3.12)は反復式とならず、一回で解が求まることになる。

反復解法の収束条件は、反復行列のスペクトル半径 $\rho(T)$ によって、次式のように表される。

$$\rho(T) = \max |\lambda_i| < 1 \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

ここで、 λ_i は反復行列 $[T]$ の i 番目の固有値である。一般にスペクトル半径を直接求めるには時間がかかり、増分ステップ毎に求めることは当然できない。そこで、以下に示すスペクトル半径の上界を用いて、反復行列の特徴を分析する。反復行列の上界は以下のように表すことができる。

$$\rho(T) \leq \max \sum_{j=1}^n |T_{ij}| = \|T\| \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

ここで、 $\|T\|$ は行列 $[T]$ のノルムを示す。行列に関するノルムの性質と式(3.17)、(3.19)から、スペクトル半径の上限は、

$$\rho(T) \leq \|[F]^{-1}[G]\| \leq \frac{\|G\|}{\|F\|} = \frac{\|K - K_T\|}{\|F\|} \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

で得られる。

動的解析中における反復行列のノルムの変化は、行列 $[G]$ によって生じる。前述したように、応答が線形振動状態の場合は、行列 $[G]$ はゼロ行列となり、スペクトル半径はゼロで、式(3.12)は反復式でなくなる。一方、非線形性が強くなると接線剛性行列のノルム $\|K_T\|$ は一般的に小さくなり、その結果、式(3.20)の分子は大きくなる。さらに、構造物が座屈やメカニズムなど不安定な状態に至るとき、接線剛性行列の固有値のひとつがゼロや負となり、反復行列のスペクトル半径は1に近づいて収束が遅くなることや、場合によっては1を超えて解が発散することもある。

式(3.20)のノルム $\|F\|$ は、解析途中で増分時間 t を変化させなければ解

析中変わらない。初期設定で t をより小さくすると、 t の二乗に比例する剛性項に比較して、一乗に比例する減衰項や定数である質量項が行列 $[F]$ で優位となる。また、行列 $[G]$ も t の二乗に比例するため、 t を小さくすることが、ノルム $\|F\|$ を相対的にノルム $\|G\|$ より大きくさせ、スペクトル半径を小さくさせることになる。その結果、解の発散を防ぎ、収束範囲を拡大させる。

ここで示した反復解法は、系の非線形性が弱い場合は、収束も早く、陰解法に比較すると有利な点が多い。しかし、系の非線形性が強い場合、特に動座屈や塑性によるメカニズム等を扱う場合は、解が発散する可能性があることを考慮して、次善の策を用意しておく必要がある。例えば、次節で説明する陰解法に切り替える方法、あるいは、解析途中で増分時間を小さくする方法などがある。無論、次善の方法で、発散する部分を通りすぎると元の反復解法に戻ることになる。

3.5 陰解法との併用

上述の反復手法において解が発散する場合、陰解法に切り替え、処理を先に進めることも有効である。反復解法が発散する条件は前節で述べたが、主に変位が大きくなり、塑性が進んで接線剛性がほとんどゼロになるようなときである。そのため、解析が進んで変位が小さくなると再度反復解法で解けるようになる。したがって、数回陰解法で計算し、反復解法が発散域を抜けることができることが可能であれば、計算効率から言っても非常に有効である。

ここでは、陰解法による計算方法の概略を以下に示すことにする。基本的な振動方程式は、式(3.1)と(3.4)を用いると

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(\bar{y})\} \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

で与えられる。式(3.6)、(3.7)を用いて、上式に *Newmark* 法を適用すると、

$$[M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [C]\{\mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\} + \mu_2\{\ddot{y}_n\}\} + [K_T(y_n)]\{\mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\} + \mu_2\{\ddot{y}_n\}\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \quad \dots\dots\dots(3.22)$$

となる。整理すると陰解法の基本式が次のように得られる。

$$[M] + \mu_1[C] + \mu_2[K_T(\bar{y})]\{\ddot{y}_{n+1}\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - [C]\{\mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\} + \mu_2\{\ddot{y}_n\}\} - [K_T(y_n)]\{\mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\} + \mu_2\{\ddot{y}_n\}\} \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [\bar{F}] &= [M] + \mu_1 [C] + \mu_2 [K_T(y_n)] \\ \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ &\quad - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.24)$$

とすると、線形の方程式が次式のように得られる。下式の右辺定数ベクトル $\{g\}$ は、反復解法で計算した式(3.10)中の定数ベクトル $\{g\}$ と同一である。

$$[\bar{F}]\{\ddot{y}_{n+1}\} = \{g\} \dots\dots\dots (3.25)$$

無論、係数行列は常に変更されることになるが、上式を解くことによって t 秒後の加速度が得られる。ただし、ここでは行列 $[K_T]$ が特異に近いことから、係数行列 $[\bar{F}]$ は、擬特異となる場合が多く、そのため高精度で解を求める必要がある。

3.6 数値解析の流れ

前節までに得られた反復解法の理論式を元に、本節では、非線形振動方程式をどのように数値解析するかについて述べる。図 3-1 には、数値計算方法の概略がフローチャートで示されている。このフローチャートに従って、動的解析方法を説明しよう。

最初の項(1)は係数計算であるが、これは振動方程式を解くに当たって、終始変化しない以下の定数項を最初に計算しておくものである。ただし、ここで計算する係数項は、ベクトル $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 中の $\{\dot{y}_n\}$ と $\{\ddot{y}_n\}$ を除いた係数項を指す。

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= \{\dot{y}_n\} + \Delta t(1 - \delta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{b\} &= \Delta t\{\dot{y}_n\} + \Delta t^2(0.5 - \beta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{\bar{b}\} &= \{y_n\} + \{b\} \\ \mu_1 &= \Delta t\delta \\ \mu_2 &= \Delta t^2\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

SPACE では、これらの係数を構造体 newmark_s にセットしており、計算途中で変更されることはない。

項(2)では、次の反復計算式

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = [G]\{\ddot{y}_{n+1}\} + \{g\} \dots\dots\dots (3.11)$$

の左辺項の係数行列を力の釣合と変形の適合より求める。

$$[F] = [[M] + \mu_1[C] + \mu_2[K]] \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

係数行列 $[F]$ は、上式のように質量行列、減衰行列、線形の剛性行列から求められる。SPACEでは、質量行列、減衰行列、線形の剛性行列を求めた後、係数行列 $[F]$ に足しこむのではなく、直接係数行列を作成し、内部メモリの消費を抑制している。この係数行列は、下式で示す反復計算においては、終始変化しないので最初に一度LDU分解(3)を行えばよい。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{y}_{n+1}\}^{i+1} &= [F]^{-1} \{z\}^i \\ \{z\}^i &= \sum_{i=1}^m \left([G_i] \{\ddot{y}_{n+1}\}^i + \{g_i\} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.13)$$

振動解析に入る前に、初期設定、例えば加速度などのゼロクリアを行う(4)。ステップ(5)から、実際の振動解析に入る。以後、時間増分 t ごとに釣合式を数値積分し、計算時間 T になるまで、ステップ(5)から(16)までの処理を繰り返す。以降は、この反復処理の内容を示す。

ステップ(6)では、次ステップの加速度ベクトルを、以下の式を用いて予測する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \{(1 + \delta)\ddot{y}_n - \delta\ddot{y}_{n-1}\}\Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n\Delta t + \{(0.5 + \beta)\ddot{y}_n - \beta\ddot{y}_{n-1}\}\Delta t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.16)$$

ここでは、1ステップ及び2ステップ前の値を用いている。

次に、釣合式の右辺項を計算するわけであるが、この右辺項は次の2つに分けて計算する。

$$\left. \begin{aligned} [G]\{\ddot{y}_{n+1}\} &= \mu_2([K] - [K_T(y_n)])\{\ddot{y}_{n+1}\} \\ \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ &\quad - [C]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

右辺項の計算その1(7)では、上式の $\{g\}$ を計算する。この項は、次ステップの加速度に関連しない項であり、反復計算の中では、一度求めておけば良い。

ステップ(8)からステップ(12)までが、反復ループを表す。ここでは、予測した加速度を用いて、式(3.10)の上式である右辺項を計算し(9)、右辺項の和をとる。

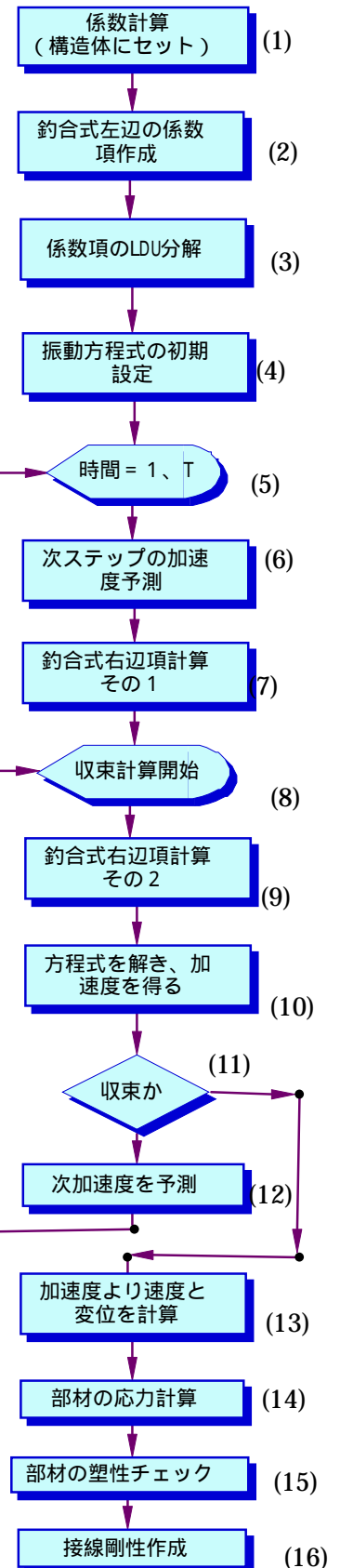


図 3-1 動的解析のフロー

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = [G]\{\ddot{y}_{n+1}\} + \{g\} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

その後、方程式を解いて加速度を求め(10)、その加速度と予測加速度を比較する。誤差チェックを行い、誤差が指定した閾値より小さくなれば、収束したとして次のステップに移る(11)。収束しない場合は、ステップ(12)で次ステップのための加速度を予測し直すことになる。SPACE では、式(3.11)を解いた加速度を用いる通常の反復法を用いている。しかし、ここでは、緩和法を用いて収束を早くする方法も考えられる。

反復ループで解が収束すると、ステップ(13)に移り、Newmark 法の基本式を用いて、変位と速度を計算する。得られた変位を用いて、各部材の材端応力を計算する(14)。続いて、部材の応力から部材の弾塑性チェック(15)を行い、最後に、各部材の増分剛性行列を求めることになる(16)。

以上が SPACE で用いている反復計算手法であり、ここではフローチャートを用いてその流れ説明した。実際に各項の計算手法は、第4章以降に詳細に解説する。

特殊な部材を動的解析システムに組み込む場合、振動方程式そのものを変更する必要がある。無論、解析手法も多少変更しなければならない。その特殊な部材のひとつにMaxwell要素を含むモデルがある。ここでは、Maxwellモデルについて考えることにする。

3.7 Maxwell モデルを考慮した反復解法

3.7.1 Maxwell モデルの基礎式

Maxwellモデルは、図3-2に見られるように、ダッシュポットとばねが直列に連結しているモデルである。部材は、節点*i*と*j*に結合し、両節点の変位は u_i 、 u_j 、節点力は p_i 、 p_j とする。

部材内の変位 u と応力 f は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ f &= -P_i \quad ; \quad f = P_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.26)$$

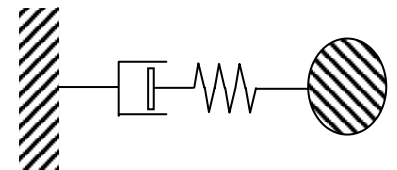


図3-2 Maxwell モデル

Maxwellモデルは、要素が直列結合しているため、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + c\dot{u}_1 \\ f &= ku_2 \\ u &= u_1 + u_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.27)$$

ここで、 u_1 はダッシュポットの変位を、 u_2 はばね要素の変位を表す。ただし、ダッシュポットの減衰定数はバイリニア型の非線形とし、 f_0 、 c は係数である。また、 k はばねの線形剛性係数を表す。

Maxwellモデルの基本式を少し変形して、節点力を求めることにする。最初に、式(3.26)の上式の両辺を時間微分する。

$$\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \dots\dots\dots (3.28)$$

次に、式(3.27)を次のように変更する。

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{c}(f - f_0) \dots\dots\dots (3.29)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\dot{f}}{k} \dots\dots\dots (3.30)$$

式(3.29)と(3.30)を式(3.28)に代入すると、Maxwellモデルの基本式が得られる。

$$\dot{u} = \frac{1}{c}(f - f_0) + \frac{\dot{f}}{k} \dots\dots\dots (3.31)$$

さらに、上式を変更すると、部材内部の応力 f は、

$$f = c\dot{u} - \frac{c}{k}\dot{f} + f_0 \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

として得られる。

Maxwell モデルは上記のように、応力の微分を含むため、このまま振動方程式の中に組み込むことはできない。そこで、フレームの非線形振動方程式を *Newmark* 法で解くことから、このモデルに対しても同様な手法で近似的に解くことにする。

今、 n ステップの応力状態 f_n が求まっているとし、 t 秒後の応力 f_{n+1} を次式で仮定する。

$$f_{n+1} = f_n + \dot{f}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{f}_n \Delta t^2 \quad \dots\dots\dots(3.33)$$

ここで、 f_n の 2 回微分を次式で仮定する。

$$\ddot{f}_n = \frac{1}{\Delta t} (\dot{f}_{n+1} - \dot{f}_n) \quad \dots\dots\dots(3.34)$$

上式を式(3.33)に代入し、整理すると、

$$f_{n+1} = f_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{f}_{n+1} + \dot{f}_n) \quad \dots\dots\dots(3.35)$$

となる。

n ステップ、あるいは、 $n + 1$ ステップで Maxwell の基本式は成立していなければならない、下式：

$$\dot{f}_n = k\dot{u}_n - \frac{k}{c}(f_n - f_0) \quad \dots\dots\dots(3.36)$$

$$\dot{f}_{n+1} = k\dot{u}_{n+1} - \frac{k}{c}(f_{n+1} - f_0) \quad \dots\dots\dots(3.37)$$

が成立する。式(3.36)、(3.37)の \dot{f}_n と \dot{f}_{n+1} を式(3.35)に代入し、整理すると次式が得られる。

$$f_{n+1} = f_n + \frac{\Delta t}{2} (k\dot{u}_{n+1} + k\dot{u}_n - \frac{2k}{c}f_{n+1} + \frac{2k}{c}f_0) \quad \dots\dots\dots(3.38)$$

上式を f_{n+1} について解くと、

$$(1 + \frac{k\Delta t}{2c})f_{n+1} = (1 - \frac{k\Delta t}{2c})f_n + \frac{k\Delta t}{2}\dot{u}_{n+1} + \frac{k\Delta t}{2}\dot{u}_n + \frac{k\Delta t}{c}f_0 \quad \dots\dots\dots(3.39)$$

となり、従って、 f_{n+1} は次式で与えられる。

$$f_{n+1} = \frac{2c - k\Delta t}{2c + k\Delta t} f_n + \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t} \dot{u}_{n+1} + \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t} \dot{u}_n + \frac{2k\Delta t}{2c + k\Delta t} f_0 \quad \dots\dots\dots(3.40)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{ck\Delta t}{2c + k\Delta t}; \alpha' = \frac{k\Delta t}{2c + k\Delta t}; \gamma = \frac{2c - k\Delta t}{2c + k\Delta t} \quad \dots\dots\dots(3.41)$$

とすると、 f_{n+1} は、

$$f_{n+1} = \gamma f_n + \alpha \dot{u}_{n+1} + \alpha \dot{u}_n + 2\alpha' f_0 \quad \dots\dots\dots(3.42)$$

となる。

節点力と節点変位の関係は式(3.26)、(3.42)より次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\alpha \dot{u}_n + b\gamma f_n + \alpha' f_0 + b\alpha' f'_0) \quad \dots\dots\dots(3.43)$$

反復解法に関する非線形振動方程式(3.5)は、Maxwell モデルを考慮すると次式で表される。

3.7.2 反復解法における Maxwell モデル

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} + \{f_d\} = & -[M][I]\{\ddot{u}_g\} \\ & + \{P_s\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.44)$$

上式で、 $\{f_d\}$ は制震ダンパーの節点力(3.43)を節点での力の釣合より重ね合わせたベクトルであり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \{f_d\} = & [C_0]\{\dot{y}\} + \{(\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + b\bar{\gamma}f_n + \bar{\alpha}\dot{u}_n + \bar{\alpha}'f_0 + b\bar{\alpha}''f'_0\} \\ = & [C_0]\{\dot{y}\} + \{\bar{f}_d\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.45)$$

ダンパーの節点力を表す式(3.45)の右辺 1 項を除いて第 2 項以降を、釣合式(3.44)の右辺に移項する。これより、振動方程式は、

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = & -[M][I]\{\ddot{u}_g\} \\ & + \{P_s\} - \{\bar{f}_d\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.46)$$

となる。ここで、Maxwell モデルに関連する項は、

$$\begin{aligned} [\bar{C}] = & [C] + [C_0] \\ \{\bar{f}_d\} = & \{(\alpha_1 - \alpha_0)\dot{u}_{n+1} + b\bar{\gamma}f_n + \bar{\alpha}\dot{u}_n + \bar{\alpha}'f_0 + b\bar{\alpha}''f'_0\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.47)$$

である。ただし、式(3.47)の下式中に未知ベクトルである次ステップの

速度が含まれていることに注意すべきである。また、 $[C_0]$ はMaxwellモデルの線形減衰項であり、 $[C]$ はそれ以外の線形減衰項である。

Maxwellモデルを考慮した非線形振動方程式(3.46)は以上のように得られ、後はこの方程式にNewmark法を適用すれば良い。まず、増分時間 t 秒後の変位ベクトル $\{y_{n+1}\}$ と速度ベクトル $\{\dot{y}_{n+1}\}$ を、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{y}_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\} + \{(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} + \delta\{\ddot{y}_{n+1}\}\}\Delta t \\ \{\Delta y_{n+1}\} &= \{\dot{y}_n\}\Delta t + \{(0.5-\beta)\{\dot{y}_n\} + \beta\{\dot{y}_{n+1}\}\}\Delta t^2 \\ \{y_{n+1}\} &= \{y_n\} + \{\Delta y_n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

で仮定する。ここで、添え字の n は増分前の値、 $n+1$ は増分後の値、 δ, β は数値計算用パラメータを表す。次に、上式中の係数を

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= \{\dot{y}_n\} + \Delta t(1-\delta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{b\} &= \Delta t\{\dot{y}_n\} + \Delta t^2(0.5-\beta)\{\ddot{y}_n\} \\ \{\bar{b}\} &= \{y_n\} + \{b\} \\ \mu_1 &= \Delta t\delta \\ \mu_2 &= \Delta t^2\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

としてまとめ、式(3.6)と(3.7)を反復解法の基礎式(3.46)に代入すると、増分後の加速度を未知ベクトルとする釣合式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} &[M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [\bar{C}]\{\{a\} + \mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \\ &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - \{\bar{f}_d\} \\ &- [K_T(y_n)]\{\{b\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} + [K]\{\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\}\} \end{aligned} \dots\dots\dots(3.48)$$

さらに、上式を整理すると、

$$\begin{aligned} &([M] + \mu_1[\bar{C}] + \mu_2[K])\{\ddot{y}_{n+1}\} \\ &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \\ &- \{\bar{f}_d\} + \mu_2([K] - [K_T(y_n)])\{\ddot{y}_{n+1}\} \end{aligned} \dots\dots\dots(3.49)$$

となる。ここで、係数を以下のように

$$\left. \begin{aligned} [F] &= [M] + \mu_1[\bar{C}] + \mu_2[K] \\ \{G(\ddot{y}_{n+1})\} &= \mu_2([K] - [K_T(y_n)])\{\ddot{y}_{n+1}\} - \{\bar{f}_d\} \\ \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_S\} - \{Q(y_n)\} \\ &- [\bar{C}]\{a\} - [K_T(y_n)]\{b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.50)$$

整理すると、方程式(3.49)は以下ようになる。

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = \{G(\ddot{y}_{n+1})\} + \{g\} \dots\dots\dots(3.51)$$

式(3.51)で分かるように両辺に未知ベクトルである増分後の加速度ベクトル $\{\ddot{y}_{n+1}\}$ を含んでおり、そのため、この方程式は反復法を用いて解かれることとなる。

前節では、Maxwell モデルを組み込んだ反復解法の基本式を導いた。しかしながら、SPACE で使用している反復解法は、これとは多少異なっている。ここでは、SPACE で用いている反復基本式を導くことにしよう。

Maxwell モデルを組み込んだ振動方程式(3.46)を再度示す。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [\bar{C}]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_s\} - \{\bar{f}_d\} - \{Q(\bar{y})\} - [K_T(\bar{y})]\{\Delta y\} + [K]\{y\} \quad \dots\dots\dots(3.46)$$

上式に、式(3.6)、(3.7)を代入して、反復式を作るわけであるが、前節とは異なり、以下のように、右辺の $\{\Delta y\}$ と $\{y\}$ は加速度で展開せず、そのまま変位として残す。

$$[M]\{\ddot{y}_{n+1}\} + [\bar{C}]\{\dot{a}\} + \mu_1\{\ddot{y}_{n+1}\} + [K]\{\bar{b}\} + \mu_2\{\ddot{y}_{n+1}\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_s\} - \{Q(y_n)\} - \{\bar{f}_d\} - [K_T(y_n)]\{\Delta y_{n+1}\} + [K]\{y_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots(3.52)$$

上式を整理すると、

$$[M] + \mu_1[\bar{C}] + \mu_2[K]\{\ddot{y}_{n+1}\} = -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_s\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}]\{a\} - [K(y_n)]\{\bar{b}\} - \{\bar{f}_d\} - [K_T(y_n)]\{\Delta y_{n+1}\} + [K]\{y_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots(3.53)$$

となる。ここで、係数を以下のように整理すると、

$$\left. \begin{aligned} [F] &= [M] + \mu_1[\bar{C}] + \mu_2[K] \\ \{G(y_{n+1}, \Delta y_{n+1})\} &= -\{\bar{f}_d\} - [K_T(y_n)]\{\Delta y_{n+1}\} + [K]\{y_{n+1}\} \\ \{g\} &= -[M][I]\{\ddot{u}_g\} + \{P_s\} - \{Q(y_n)\} - [\bar{C}]\{a\} - [K]\{\bar{b}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.54)$$

方程式(3.49)は以下のようになる。

$$[F]\{\ddot{y}_{n+1}\} = \{G(y_{n+1}, \Delta y_{n+1})\} + \{g\} \quad \dots\dots\dots(3.55)$$

SPACE では、式(3.54)と(3.55)を用いて反復解法を行っている。

3.7.3 SPACE で用いる反復解法

3.7.4 Maxwell モデルを含む数値解析手法

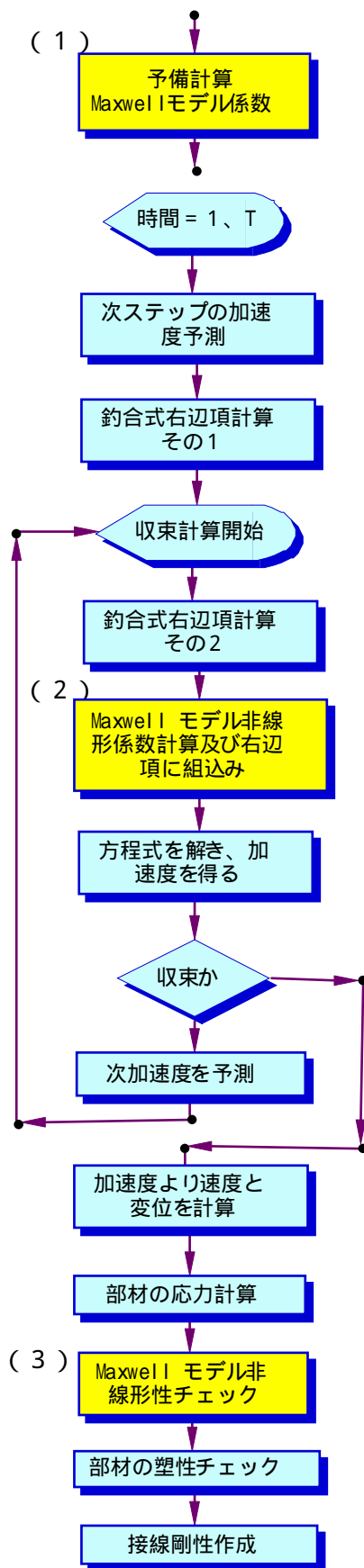


図 3-3 Maxwell モデルの計算フロー

本節では、前節で得た Maxwell モデルの基本式を、SPACE の反復計算の中に組み込むことにする。図 3-3 には、Maxwell モデルを組み込む部分のフローチャートを示す。図 3-1 に示す通常の計算のフローチャートを参照しながら見ていただきたい。このモデルを組み込むために、数値解析の流れの中で、図 3-3 に示すように 3 箇所追加されることになる。

最初に、(1)予備計算の中で、Maxwell モデルに関する係数を計算し、線形の減衰項と式(3.41)で示される係数を構造体にセットする。

(2)収束計算中で、上記の係数と増分前の速度と変位を用いて、右辺項の計算を行い、釣合式の右辺項に足し込む。

(3)反復収束計算が終了し、収束解が得られると通常部材の応力計算が実行され、その後、Maxwell モデルの応力計算を行い、次に、非線形性をチェックし、新たな係数を更新する。

以上で、Maxwell モデルの組み込みは終了であり、詳細は、後章で述べることにする。

線形振動方程式に対する固有値問題は式(3.3)より次のように定義される。

$$[M]\{\ddot{y}\} + K\{y\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(3.56)$$

自由振動の解を以下のように仮定し、式(3.20)に代入すると

$$\{y\} = \{\phi\} \exp(i\omega t) \quad \dots\dots\dots(3.57)$$

以下の釣合式が得られる。ただし、 $\{\phi\}$ は振動モード、 ω は円振動、 i は虚数を各々表す。

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(3.58)$$

振動モード $\{\phi\}$ はゼロではないので、係数行列は以下の条件が必要となる。

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.59)$$

上式は、一般固有値問題と呼ばれ、各種の数値解析方法が提案されている。特に、上式の固有値問題において、係数行列である $[M]$ と $[K]$ は共に対称マトリックスであることから、固有値 ω^2 は実数であることが保証されている。しかも、 $[K]$ が正定値であれば固有値は全て正の値を持つことになる。この条件によって構造物は固有の振動数を持ち、逆に正定値でなければ、ゼロもしくは負の固有値をひとつ以上持つことになる。そのとき、構造物の変位が急激に大きくなる状態、いわゆる動的に不安定な状態を示すことになる。

3.8 固有値問題と減衰

3.8.1 固有値問題

3.8.2 減衰

減衰は内部減衰と外部減衰に区別される。その区分は減衰を生じさせる要因が構造物の内部にあるか外部にあるかによる。内部減衰は、粘性減衰、履歴減衰、摩擦減衰などがあり、また、外部減衰には外部粘性減衰、逸散減衰などがある。他にオイルダンパーやその他の免震装置や制震装置に組み込まれた減衰機構もある。

内部粘性減衰は材料の内部粘性によって生じ、速度に比例する抵抗を示す。この減衰は数学的取り扱いが容易であり、最も一般的な減衰である。また、この減衰はダッシュポットとして表され、そのパラメータは線形であると定数となり、減衰力は $c\dot{y}$ で、速度に比例する力を持つ。なお、非線形であると減衰係数 c は速度の関数となる。

履歴減衰は部材の塑性化によって生じる減衰である。力と変位の関係

が非弾性関係であるため応答時にループを描き、その履歴ループの面積が減衰力に関連する。履歴モデルは力と変位の関係を表す骨格曲線とループ規則とで表され、骨格曲線として、バイリニアモデルとトリリニアモデルが多く用いられている。ループ規則にも、原点指向型、最大点指向型などがあり、特に、トリリニアと最大点指向型を組み合わせた剛性低下型トリリニアモデルは鉄筋コンクリート構造の弾塑性解析に多用されている。また、ループ面積を持たないスプリングモデル、あるいはスリップモデルやダブルバイリニアモデルがブレース材の特性として用いられている。さらに複雑な復元力特性として、これらの基本モデルを組み合わせた複合非線形モデルも開発されている。

関数を利用したモデルとして、*Ramberg-Osgood* モデル (RO モデル) と *Hardin-Drinevich* モデル (HD モデル) がある。これらは滑らかな骨格曲線を持ち、免震装置や土の履歴特性に使用される場合が多い。逸散減衰は半無限媒体である地盤内を波動エネルギーが無限遠方に逸散することによって生じる減衰効果である。半無限弾性体上の剛な円形や矩形基礎の変位応答解析より、鉛直、水平、回転振動に対する等価なばね定数と減衰係数が求められている。これら係数は、いずれも弾性体を対象にしており、地盤のせん断波速度や固有振動数に依存している。摩擦減衰は構造物の接合部におけるボルトやリベットのすべりなどで生じる減衰である。また、外部粘性減衰は、空気や水などの抵抗で生じる減衰で、空気膜構造など、軽量で柔らかい構造物で考慮される場合がある。

3.8.3 部材減衰とモード減衰

減衰機構を振動方程式の中に表現する方法として、部材ごとに減衰値を定める部材減衰と、系の各次固有周期に対応して減衰値を定めるモード減衰がある。減衰定数は振動振幅に依存し、実験データからも振幅が大きくなると減衰値が大きくなると言われており、非線形性を考慮しなければならない場合もある。さらに、制震装置に付属する減衰機構は、粘性定数を動的に変化させることもあり、特にこの場合は非線形性を考慮する必要がある。

一般に広く使用されているモード減衰は、減衰のない系の固有モードで座標変換したとき、減衰行列が対角化されることを利用する。減衰を考慮した自由振動方程式は

$$[M]\ddot{y} + [C]\dot{y} + [K]y = \{0\} \quad \dots\dots\dots(3.60)$$

であり、固有値問題の知識を利用すると、減衰のない系の固有モードで

減衰行列を対角化するには、減衰行列 $[C]$ が質量行列 $[M]$ と剛性行列 $[K]$ の両方、あるいはいずれかに比例したものであれば良く、その条件は下式で表される。

$$[C] = [M] \sum_m a_m \{ [M]^{-1} [K] \}^m = \sum_m [C_m] \quad \dots\dots\dots(3.61)$$

Rayleigh 減衰は最も良く利用されているモード減衰のひとつであり、上式中の2項を用いて、次式で表す。

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad \dots\dots\dots(3.62)$$

振動モードで展開すると、第 i 次のモード減衰は、

$$h_i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i \right\} \quad \dots\dots\dots(3.63)$$

となり、右辺第1項が振動数逆比例型、第2項が振動数比例型となる。モード減衰として、第 i 次と第 j 次のモードに対して各々減衰定数を h_i と h_j に設定すれば、係数 a_0 と a_1 は次式となる。これらを式(3.62)に代入することによって減衰行列が得られる。

$$a_0 = \frac{2\omega_i\omega_j(h_j\omega_i - h_i\omega_j)}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad a_1 = \frac{2(h_i\omega_i - h_j\omega_j)}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad \dots\dots\dots(3.64)$$

剛性比例型減衰として、次式で表される *Kelvin* 減衰がある。

$$[C] = a_1 [K] \quad \dots\dots\dots(3.65)$$

第 i 次のモード減衰定数 h_i は次式のようになり、係数 a_1 も容易に得られる。

$$h_i = \frac{1}{2} a_1 \omega_i \quad ; \quad a_1 = \frac{2h_i}{\omega_i} \quad \dots\dots\dots(3.66)$$

モード減衰では、設定したモード以外のモードに対して、減衰値が固有振動数によって自動的に設定されていると言う点に留意されたい。自動的に設定された減衰定数が大きくなり、本来、励起されるべきはずのモードが、減衰して生じない状態になってしまうことがある。このような不合理が生じないためにも、減衰定数の値を決めるモードは振動数や刺激係数に良く注意して選択すべきである。

部材減衰の存在は、一般に無減衰系の振動モードでは減衰行列を対角化できず、減衰を考慮した振動モードと固有振動数を求めようとするとき複素固有値問題を解かなければならない。部材減衰は、主に免震装置と制震装置の減衰項として、また地盤の逸散減衰として使われる。減衰を表す基本的な物理モデルとして、弾性ばねと粘性ダッシュポットを並列結合した *Voigt* モデル、同じく直列結合した *Maxwell* モデルがある。部材モデルを方程式に組み込んだ場合、構造物全体の減衰として、*Rayleigh* 減衰などのモード減衰を用いる場合が多い。無論、部材減衰とモード減衰とを併用した場合、その減衰行列は無減衰の振動モードで対角化できない。

鉄骨のラチスドームと鉄骨鉄筋コンクリート製の下部構造を同時に振動解析しようとしたとき、屋根部分と下部構造とでは固有振動数や減衰定数が異なり、*Kelvin* 減衰や *Rayleigh* 減衰では表現が難しくなる場合がある。このような複合構造物では、各々の構造物の *Rayleigh* 減衰を重ね合わせて使用する方法がある。一方、減衰行列の対角化条件式の高次項を利用する方法もある。質量行列や剛性行列の2乗、3乗項を用いる方法であり、ここでも複合構造物の振動モードを良く検討し、減衰定数を設定するモードを適切に選択する必要がある。