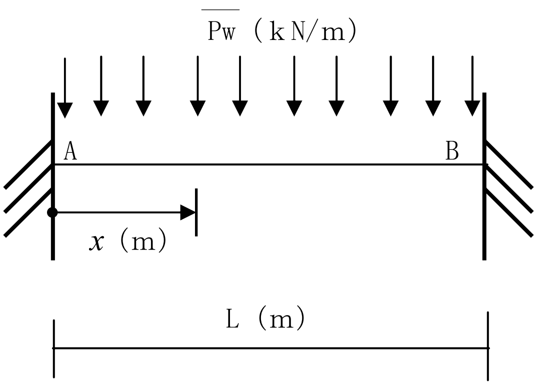
建築構造力学Ⅰ　第５回レポート

学籍番号	氏名

【問題 1】次の等分布荷重が作用する構造物を解き、曲げモーメント図、せん断力図及び、**最大変位**を求めよ。

（ヤング係数:E、断面２次モーメント:I とする。）



問題は両端固定の不静定構造物であり、次の４階の微分方程式を用いて、解を求める。

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=\overline{Pw}$$

$$-Q(x)=EI\frac{d^3w}{dx^3}=\overline{Pw}x+C_1$$

$$-M(x)=EI\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{1}{2}\overline{Pw}x^2+C_1x+C_2$$

$$EI\theta(x)=\quad EI\frac{dw}{dx}=\frac{1}{6}\overline{Pw}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$EIw(x)=\frac{1}{24}\overline{Pw}x^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

（C_1、C_2、C_3、C_4 ：積分定数）

境界条件

$w(0)=0$
$\theta(0)=0$　固定支持による条件
$w(L)=0$
$\theta(\mathrm{L})=0$

境界条件は、両端固定より

$w(0)=0$　　　　$w(L)=0$

$$\theta(0)=\left.\frac{dw}{dx}\right|_{z=0}=0\qquad \theta(L)=\left.\frac{dw}{dx}\right|_{z=\mathrm{L}}=0$$

となり、

$$\theta(0)=C_3=0、\omega(0)=C_4=0$$

$$EI\theta(L)=\frac{1}{6}\overline{Pw}L^3+\frac{1}{2}C_1L^2+C_2L=0$$

$$EIw(L)=\frac{1}{24}\overline{Pw}L^4+\frac{1}{6}C_1L^3+\frac{1}{2}C_2L^2=0$$

上記の２式より、積分定数は

$$C_1=-\frac{1}{2}\overline{Pw}L$$

$$C_2=\frac{1}{12}\overline{Pw}L^2$$

となる。

結果を代入すると、たわみ関数は

$$w(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}\overline{Pw}x^4-\frac{1}{12}\overline{Pw}x^3+\frac{1}{24}\overline{Pw}x^2\right)$$

となる。最大変位は対称変形になることを考慮すると、

その位置は $x=\frac{\mathrm{L}}{2}$ となり、下式で与えられる。

$$w_{MAX}=w\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}\overline{Pw}\left(\frac{L}{2}\right)^4-\frac{1}{12}\overline{Pw}L\left(\frac{L}{2}\right)^3+\frac{1}{24}\overline{Pw}L^2\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

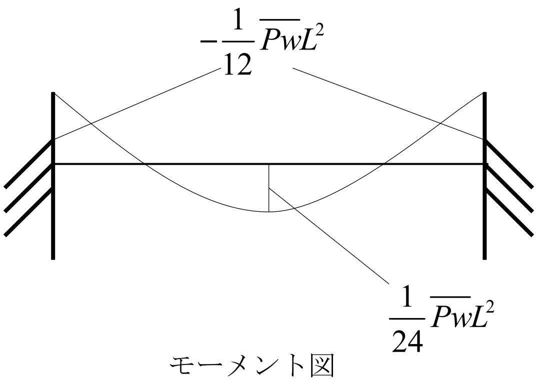
$$=\frac{\overline{Pw}L^4}{384EI}$$

また、曲げモーメント、せん断力は、

$$M(x) = -\frac{1}{2}\overline{Pw}x^2 + \frac{1}{2}\overline{Pw}Lx - \frac{1}{12}\overline{Pw}L^2$$

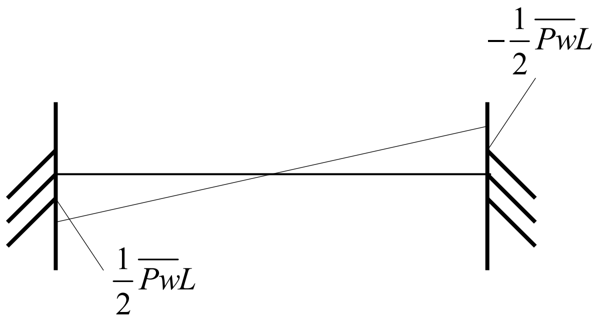
$$Q(x) = -\overline{Pw}x + \frac{1}{2}\overline{Pw}L$$

となり、曲げモーメント図、せん断力図は次となる。



モーメント図

（単位： $kN \cdot m$ ）

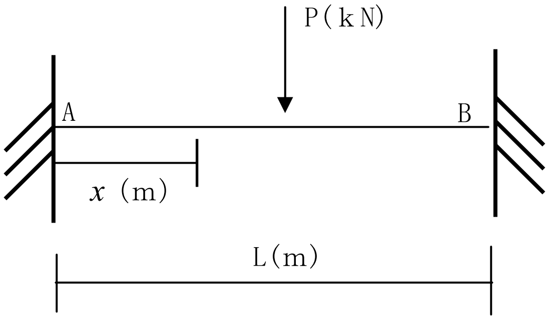


せん断力図

（単位： kN ）

【問題２】次の集中荷重が作用する構造物を解き、曲げモーメント図、せん断力図及び、**最大変位**を求めよ。

（ヤング係数:E、断面２次モーメント:I とする。）



問題は両端固定の不静定構造物であり、中央集中荷重であることから半分だけ用いて次の 4 階の微分方程式を解く。変形が対称になることより、$\theta\left(\frac{L}{2}\right)=0$ となる。

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=0$$

$$-Q(x)=EI\frac{d^3w}{dx^3}=C_1$$

$$-M(x)=EI\frac{d^2w}{dx^2}=C_1x+C_2$$

$$EI\theta(x)=EI\frac{dw}{dx}=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$EIw(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

（C_1、C_2、C_3、C_4：積分定数）

境界条件

$w(0)=0$

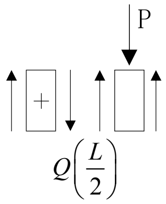
$\theta(0)=0$

$\theta\left(\frac{L}{2}\right)=0$ （最大たわみとなるため）

$Q\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{P}{2}$

中央点での力の釣り合いより求められる。

$$Q\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{2}P$$



境界条件より

$\theta(0)=C_3=0$ 、 $\omega(0)=C_4=0$ 、

$-Q\left(\frac{L}{2}\right)=C_1=-\frac{P}{2}$

$$EI\theta\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{PL^2}{16}+C_2\frac{L}{2}=0$$

上記より

$$C_2=\frac{PL}{8}$$

となり、計算結果を代入すると、

たわみ関数は

$$EIw(x)=\frac{1}{12}Px^3-\frac{PL}{16}x^2$$

となる。

最大変位は対称変形になることを考慮すると

その位置は $x=\frac{L}{2}$ となり、下式で与えられる。

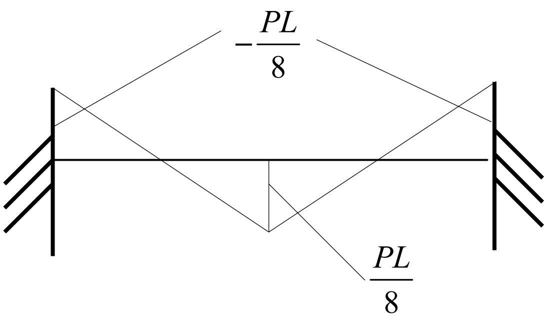
$$w_{MAX}=w\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{12}P\left(\frac{L}{2}\right)^3+\frac{PL}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

$$=\frac{PL^3}{192EI}$$

上式は左半分の解であることと、対称であることを考慮すると、
曲げモーメント図、せん断力図が以下のように求められる。
曲げモーメントとせん断力は、

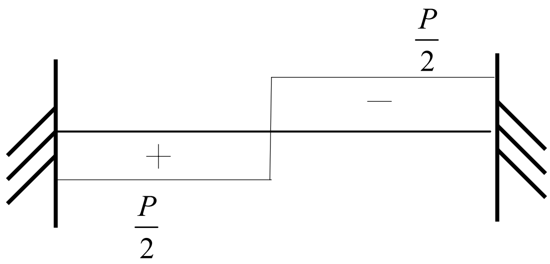
$$M(x) = \frac{P}{2}x - \frac{PL}{8}$$

$$Q(x) = \frac{P}{2}$$



モーメント図

（単位： $kN \cdot m$ ）

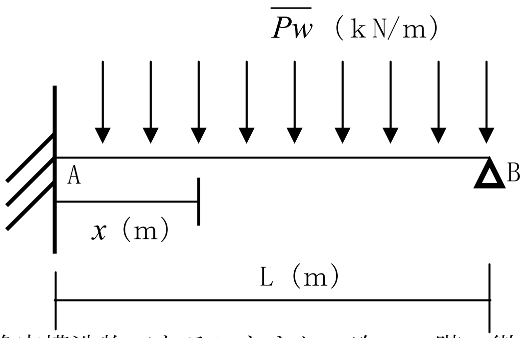


せん断力図

（単位： kN ）

【問題 3】次の等分布荷重が作用する構造物を解き、曲げモーメント図、せん断力図及び、<u>最大変位</u>を求めよ。

（ヤング係数:E、断面 2 次モーメント:I とする。）



不静定構造物であることより、次の 4 階の微分方程式を用いて解を求める。

荷重は等分であるため、$\overline{Pw}$ は定数である。

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = \overline{Pw}$$

$$-Q(x) = EI\frac{d^3w}{dx^3} = \overline{Pw}x + C_1$$

$$-M(x) = EI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{2}\overline{Pw}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI\theta(x) = EI\frac{dw}{dx} = \frac{1}{6}\overline{Pw}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIw(x) = \frac{1}{24}\overline{Pw}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

（C_1、C_2、C_3、C_4 ：積分定数）

境界条件

$\left.\begin{array}{l} w(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{array}\right\}$ 固定支持による条件

$\left.\begin{array}{l} w(L) = 0 \\ M(L) = 0 \end{array}\right\}$ ピン支持による条件

次に、境界条件は、

左端は固定、右端はピン支持であることより

$w(0) = 0 \qquad w(L) = 0$

$\theta(0) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{z=0} = 0 \quad M(L) = 0$

となり、

$\theta(0) = C_3 = 0$、$w(0) = C_4 = 0$

$$M(L) = \frac{1}{2}PwL^2 - C_1L - C_2 = 0$$

$$EIw(0) = \frac{1}{24}PwL^4 + \frac{1}{6}C_1L^3 + \frac{1}{2}C_2L^2 = 0$$

上記の 2 式より

$$C_1 = -\frac{5}{8}PwL$$

$$C_2 = \frac{1}{8}PwL^2$$

となる。

最大変位は $\theta = 0$ の点で与えられることにより、

その値を求める。

$$\theta(x) = \frac{1}{6}\overline{Pw}x^3 - \frac{5}{16}\overline{Pw}Lx^2 + \frac{1}{8}\overline{Pw}L^2x = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{15L \pm \sqrt{(-15L)^2 - 4\times 8\times 6L^2}}{16}$$

$$= \frac{15-\sqrt{33}}{16}L \ (0 < x \leq L)$$

最大たわみは、上の値を代入すると、

$$w_{MAX} = w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}\overline{Pw}x^4 - \frac{5}{48}\overline{Pw}Lx^3 + \frac{1}{16}\overline{Pw}L^2x^2\right)$$

$$= \frac{\overline{Pw}}{48}(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2)$$

$$=0.00542\frac{\overline{Pw}\mathrm{L}^4}{\mathrm{EI}} = \frac{2.08\overline{Pw}L^4}{384EI}$$

となる。

また、曲げモーメント、せん断力は、

$$M(x) = -\frac{1}{2}\overline{Pw}x^2 + \frac{5}{8}\overline{Pw}Lx - \frac{1}{8}\overline{Pw}L^2$$

$$Q(x) = -\overline{Pw}x + \frac{5}{8}\overline{Pw}L$$

モーメント M_c を求めるには、$Q(x)=0$ の点を求める。

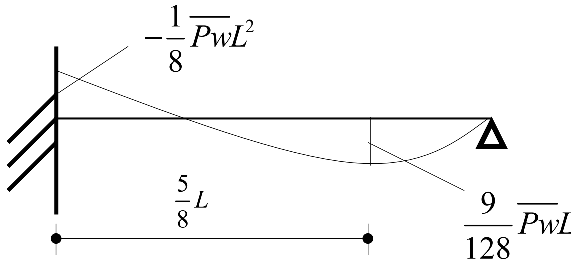
$$Q(x) = -\overline{Pw}x + \frac{5}{8}\overline{Pw}L = 0$$

$x = \frac{5}{8}L$ となり、その値を求める。

$$M_c\left(\frac{5}{8}L\right) = -\frac{1}{2}\overline{Pw}\left(\frac{5}{8}L\right)^2 + \frac{5}{8}\overline{Pw}L\left(\frac{5}{8}L\right) - \frac{1}{8}\overline{Pw}L^2$$

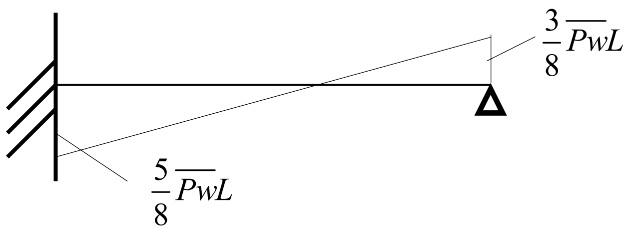
$$= \frac{9}{128}\overline{Pw}L^2$$

となり、曲げモーメント図、せん断力図は次となる。



モーメント図

（単位：$kN \cdot m$）



せん断力図

（単位：kN）