第１０章　モールの定理による静定梁のたわみ

ポイント：　モールの定理を用いて、静定梁のたわみを求める

断面力の釣合と梁の微分方程式は良く似ている

10.1 はじめに

前章では、梁の微分方程式を直接積分する方法で、静定梁の断面力と変形状態を求めた。本章では、梁の微分方程式と断面力による力の釣合式が類似していることを利用して、微分方程式を直接解析的に解くのではなく、力の釣合より梁のたわみを求める方法を学ぶ。この方法は、モールの定理と呼ばれ、一般に静定梁のたわみ解析に用いられる。

キーワード

モールの定理　梁の微分方程式と断面力の釣合　単純梁　片持ち梁

10.2 モールの定理

前章では、梁の微分方程式を用いて静定骨組の変形を求めた。本章ではモールの定理を用いて、同じく静定梁の変位を求めてみよう。まず、梁の微分方程式と断面力の釣合式を以下に示す。

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x) \qquad \cdots\cdots(10.1)$$

$$EI_z\frac{d^2w}{dx^2} = -M(x) \qquad \cdots\cdots(10.2)$$

上式を比較すると分かるように、式(10.2)に係数 EI_z が付いていること以外は全て同じ形式の微分方程式となっている。そこで、式(10.2)を以下のように変形すると、

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \qquad \cdots\cdots(10.3)$$

式(10.1)と全く同じ形式となる。一方、静定構造物は式(10.1)を力の釣合から解くことができ、曲げモーメントの関数が求められる。その関数を $-EI_z$ で割り、その値を荷重項とすると、式(10.1)の解を求めた方法、つまり力の釣合を用いることで、式(10.3)の解であるたわみ関数が求められことになる。

上記の方法を整理したモールの定理を以下に示す。

モールの定理

梁の曲げモーメントを $-EI_z$ で除し、その値を荷重と考えると、ある点のたわみはその点の曲げモーメントの値に、また、ある点のたわみ角はその点のせん断力に等しい。ただし、片持ち梁の場合は固定端と自由端とを入れかえる必要がある。

次節以降で、実際に、前章で求めた単純梁と片持ち梁の変位を、モールの定理を用いて求めてみよう。

10.3 単純梁のたわみ

前節と同様、下図に示す単純梁に、材中央に集中荷重が加わった場合について考える。部材の断面特性 EI_z は一定とする。

解析は、次の順序で行う。

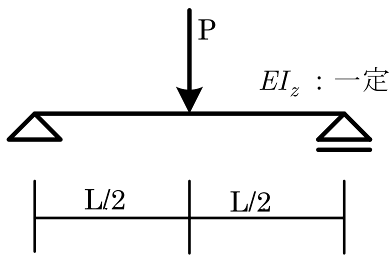
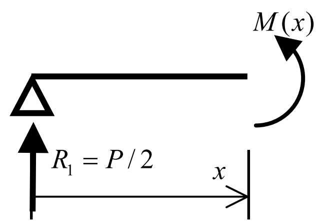


図 10-1 単純梁の解析モデル

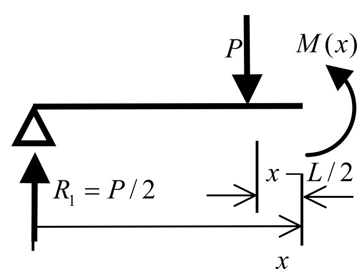
1.　最初に、図 10-2 のように、原点から x の位置で、断面を切断し、反力と断面力によるモーメントの釣合を考える。



$$-M(x) + R_1 x = 0$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x \quad (0 \le x < \frac{L}{2}) \qquad \cdots\cdots(10.4)$$

同様に、荷重を超えた位置で断面を切断し、モーメントの釣合を考えると、次式の曲げモーメント関数が得られる。



$$-M(x) + R_1 x - P(x - \frac{L}{2}) = 0$$

$$M(x) = \frac{P}{2}(L - x) \quad (\frac{L}{2} \le x \le L) \qquad \cdots\cdots(10.5)$$

2.　曲げモーメントの関数は、上記の曲げモーメントの釣合より

求められ、以下のようにまとめられる。また、曲げモーメント図は、図 10-3 に示されている。

$$M_z(x)=\begin{cases}\dfrac{P}{2}x & \left(0\le x\le L/2\right)\\ \dfrac{P}{2}(L-x) & \left(L/2\le x\le L\right)\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(10.6)$$

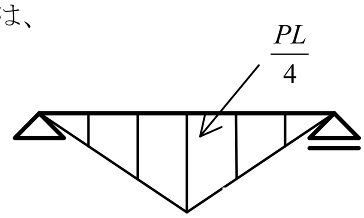


図 10-3 曲げモーメント

3. 求めた曲げモーメントを $-EI_z$ で割った値を荷重とする。そのため、荷重方向は図 10-4 のように曲げモーメントと反対側に描くことになる。まず、力の釣合より反力を求める。

$$R_1=R_2=\frac{1}{2}\frac{PL}{4EI_z}\frac{L}{2}=\frac{PL^2}{16EI_z}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.7)$$

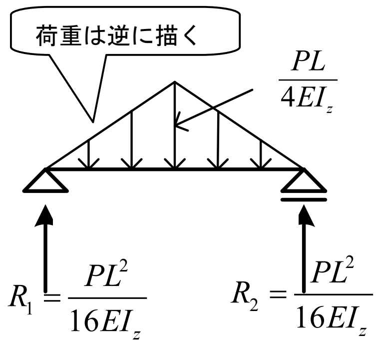


図 10-4 曲げモーメントを荷重におき直し、反力を求める

4. モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の載荷点における鉛直変位である。図 10-5 において、W は三角形部分の分布荷重の合力、M_C が梁中央での曲げモーメントである。分布荷重の合力 W は

$$W=\frac{PL}{4EI_z}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{PL^2}{16EI_z}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.8)$$

であり、その荷重中心点は、三角形荷重であることより、左端より部材長さの 1/3 の点である。中央点でのモーメントの釣合より、M_C は次のように求められる。

$$M_C=\frac{PL^2}{16EI_z}\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{6}\right)=\frac{PL^3}{48EI_z}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.9)$$

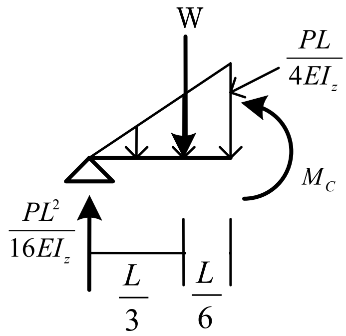


図 10-5 力の釣合

従って、梁中央の変位は次式で与えられることになる。

$$\delta=\frac{PL^3}{48EI_z}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.10)$$

例題 10-1 単純梁に等分布荷重が加わるとき、梁に生じる最大たわみをモールの定理を利用して求めよ。

1．最初に、図 10-6 のように、原点から x の位置で、断面を切断し、反力と断面力によるモーメントの釣合を考える。ここで、x 位置での分布荷重によるモーメントの評価は、積分を利用して行う。まず、図 10-7 のように原点から X 位置の微小部

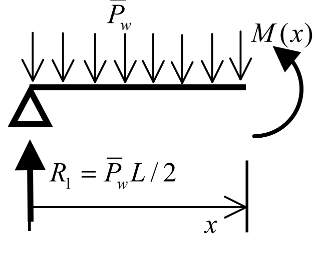


図 10-6 切断面におけるモーメントの釣合

分の荷重 $P_w dX$ が作用するモーメントは次式で表される。

$$dM = (x-X)P_w dX \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10.11)$$

従って、図 10-6 に示す荷重全てが作用するモーメントは、次式のように積分することによって得られる。

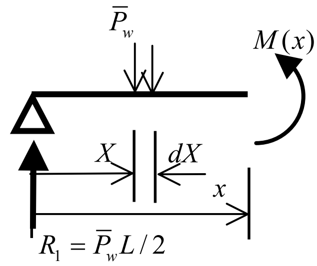


図 10-7 切断面における微小荷重によるモーメント

$$M = \int_0^x (x-X)\overline{P}_w dX$$
$$= \overline{P}_w \left[xX - \frac{X^2}{2} \right]_0^x = \frac{\overline{P}_w x^2}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10.12)$$

荷重によるモーメントも含めて、上式を参考にして、点 x におけるモーメントの釣合は、次式で与えられる。得られた曲げモーメント分布は、図 10-8 に示されている。

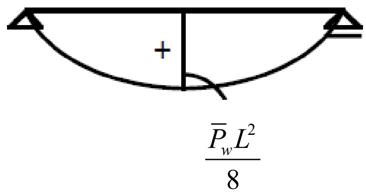


図 10-8 曲げモーメント

$$-M(x) + R_1 x - \int_0^x \overline{P}_w (x-X)dX = 0$$
$$M(x) = \frac{\overline{P}_w x}{2}(L-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10.13)$$

２．求めた曲げモーメントを $-EI_z$ で割った値を荷重とする。そのため、荷重の方向は図 10-9 のように曲げモーメントと反対側に描く。まず、力の釣合より次のように反力を求める。図 10-9 に示す全荷重を以下のように積分して求める。

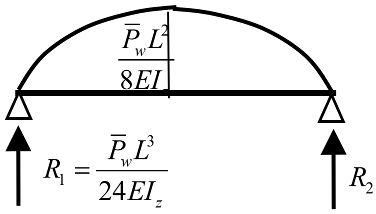


図 10-9 曲げモーメントを荷重におき直し、反力を求める

$$W = \int_0^L \frac{\overline{P}_w}{2EI_z}(Lx - x^2)dx = \frac{\overline{P}_w}{2EI_z}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L$$
$$= \frac{\overline{P}_w}{2EI_z}\frac{L^3}{6} = \frac{\overline{P}_w L^3}{12EI_z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10.14)$$

従って、反力 R_1, R_2 は以下のようである。

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}\frac{\overline{P}_w L^3}{12EI_z} = \frac{\overline{P}_w L^3}{24EI_z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10.15)$$

３．モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の載荷点における鉛直変位である。右図において、M_C が梁中央での曲げモーメントである。$x = L/2$ における分布荷重によるモーメントは、まず、微小部分の荷重について求めることから始める。この微小部分のモーメントは、式(10.11)を参考にし、式(10.13)を用いると、

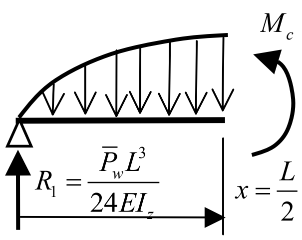


図 10-10 切断面におけるモーメントの釣合

$$dM = (\frac{L}{2} - X)\frac{\overline{P}_w}{2EI_z}(LX - X^2)dX \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.16)$$

となる。図 10-10 に示される分布荷重全体によるモーメントは、0 から $L/2$ まで積分することによって求められる。ただし、切断面は部材中央 $x = L/2$ としている。中央点でのモーメントの釣合より、M_C は、式(10. 16)を下式のように積分することで次のように求められる。

$$-M_C + R_1\frac{L}{2} - \frac{\overline{P}_w}{4EI_z}\int_0^{\frac{L}{2}}(L - 2X)(LX - X^2)dX$$

$$M_c = \frac{\overline{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\overline{P}_w}{4EI_z}\int_0^{\frac{L}{2}}(L^2X - 3LX^2 + 2X^3)dX \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.17)$$

従って、梁中央の変位は上式を積分することで、以下のように与えられることになる。

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\overline{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\overline{P}_w}{4EI_z}\left[\frac{L^2X^2}{2} - LX^3 + \frac{X^4}{2}\right]_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\overline{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\overline{P}_w L^4}{4EI_z}(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32}) \\ &= \frac{\overline{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\overline{P}_w L^4}{128EI_z} = \frac{5\overline{P}_w L^4}{384EI_z}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.18)$$

10.4 片持ち梁のたわみ

前節と同様、図 10-11 に示す片持ち梁に、先端集中荷重が加わった場合、梁に生じる最大変位を求める。部材の断面特性 EI_z は一定である。

解析は、次の順序で行う。

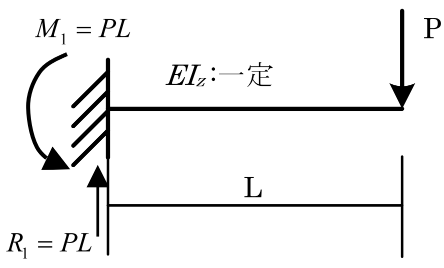


図 10-11 片持ち梁の解析モデル

1. 最初に、図 10-12 のように位置 x で部材を切断し、その点におけるモーメントの釣合より、曲げモーメント関数を求める。曲げモーメントは容易に求められ、次式となる。なお、図 10-13 に曲げモーメント図を描く。

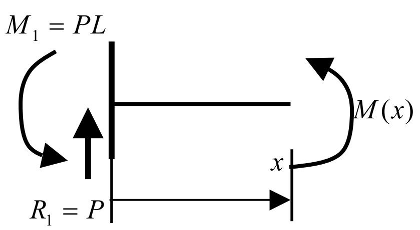


図 10-12 切断面におけるモーメントの釣合

$$M(x) = Px - PL \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.19)$$

2. 単純梁と同様、求めた曲げモーメントを $-EI_z$ で割って、その値を荷重とし、図 10-14 のように

荷重の方向を逆にする。さらに、図のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

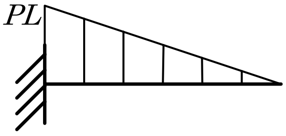


図 10-13 片持ち梁の曲げモーメント図

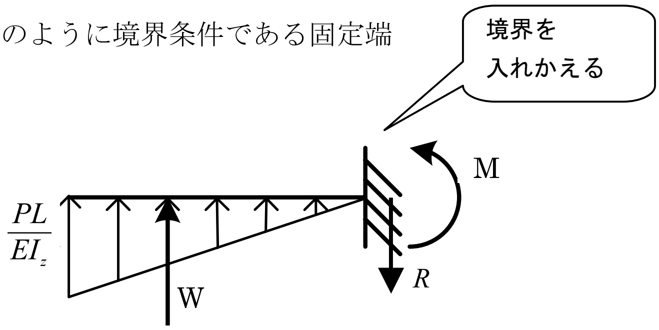


図 10-14 曲げモーメントを荷重におき直す

3.　この荷重に対する固定端での曲げモーメントを求める。この曲げモーメントが片持ち梁の最大変位となる。

分布荷重の合力 W は次のようになる。

$$W = \frac{PL}{EI_z} \times L \times \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{2EI_z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.20)$$

固定端でのモーメントの釣合より M は次のようになり、モールの定理より、その値が変位となる。

$$M = \frac{PL^2}{2EI_z} \times \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.21)$$

また、反力 R は、モールの定理によれば、片持ち梁先端の回転角となる。また、反力は図 10-14 の合力に等しい。

$$\theta(L) = \frac{PL^2}{2EI_z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.22)$$

以上のように、モールの定理を用いても前節と同様の結果が得られた。

モールの定理は微分方程式を解く必要がなく、簡単に任意点の変位を求めることができるので覚えておくと便利である。

例題10-2 等分布荷重を受ける片持ち梁の先端たわみを求めよ。

図 10-15 に示す片持ち梁に、等分布荷重が加わるとき、梁の最大変位をモールの定理を用いて求める。部材の断面特性 EI_z は一定である。

解析は、次の順序で行う。

1．最初に、曲げモーメント関数を求め、図 10-16 のように位置 x で切断し、その点におけるモーメントの釣合より次式

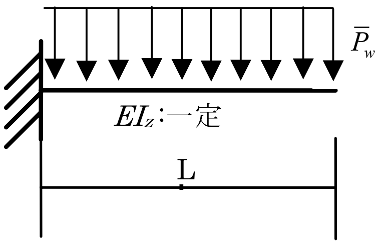


図 10-15 片持ち梁の解析モデル

のように曲げモーメント関数を求め、図 10-17 のように曲げモーメント図を描く。

$$-M(x)+\bar{P}_w Lx-\bar{P}_w\frac{L^2}{2}-\bar{P}_w\frac{x^2}{2}=0$$

$$M(x)=\frac{\bar{P}_w}{2}(-L^2+2Lx-x^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.23)$$

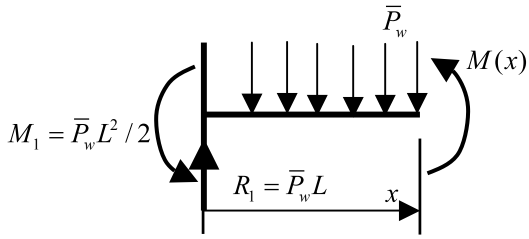


図 10-16 切断面におけるモーメントの釣合

2．単純梁と同様、求めた曲げモーメントを$-EI_z$で割り、その値を荷重とする。ただし、図 10-18 のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

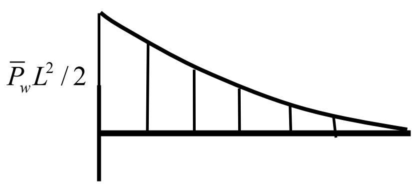


図 10-17 片持ち梁の曲げモーメント図

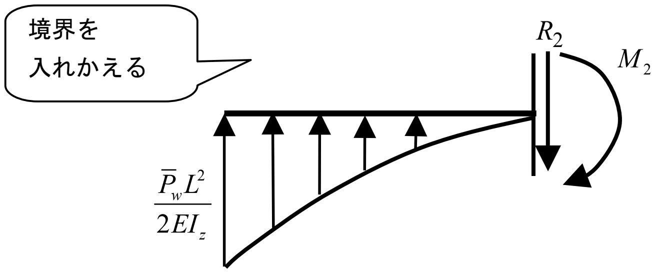


図 10-18 曲げモーメントを荷重におき直す

3．図 10-18 の荷重に対する固定端での曲げモーメント反力M_2を求める。この曲げモーメントが変位となる。この曲げモーメントは、外力と反力との力の釣合より、次式で与えられる。ここでは、式(10.23)及び式(10.16)を利用する。

$$M_2-\int_0^L (L-X)\frac{\bar{P}_w}{2EI_z}(L^2-2LX+X^2)dX=0 \qquad \cdots\cdots(10.24)$$

上の積分を実行すると、梁先端のたわみは次式となる。

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{\bar{P}_w}{2EI_z}\int_0^L (L-X)(L^2-2LX+X^2)dX\\&=\frac{\bar{P}_w}{2EI_z}\int_0^L (L^3-3L^2X+3LX^2-X^3)dX\\&=\frac{\bar{P}_w}{2EI_z}\left[L^2X-3L\frac{X^2}{2}+LX^3-\frac{X^4}{4}\right]_0^L\\&=\frac{\bar{P}_w L^4}{8EI_z}(4-6+4-1)=\frac{\bar{P}_w L^4}{8EI_z}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(10.25)$$

また、片持ち梁先端の回転角は、反力Rに等しく、また、合力に等しい。

$$\theta(L)=\frac{\overline{P}_w}{2EI_z}\int_0^L(L^2-2LX+X^2)dX$$
$$=\frac{\overline{P}_w}{2EI_z}\left[L^2X-LX^2+\frac{X^3}{3}\right]_0^L$$
$$=\frac{\overline{P}_wL^3}{6EI_z} \qquad \cdots\cdots(10.26)$$

10.5 課題

本章の課題は、例題で示した先端に集中荷重を受ける片持ち梁の解析を実施し、断面力の分布と最大たわみを求めることであり、また、SPACEで数値解析した結果と比較することである。

解析モデルは図10-19に示す先端に集中荷重を受ける片持ち梁を用いる。また、断面はH型断面とし、SS400のH-400x200x8x13とする。材料のヤング係数は$E=20500kN/cm^2$である。

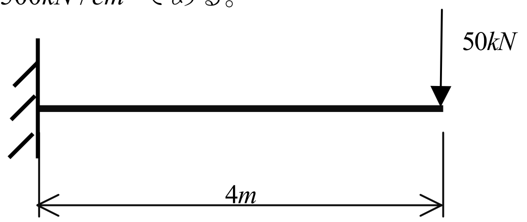


図 10-19 課題の骨組

最初に、部材固定端に生じる最大曲げモーメントは

$$M_{\max}=PL=50\cdot4=200kN\cdot m=20000kN\cdot cm \qquad \cdots\cdots(10.27)$$

H型断面の断面性能：

$$A=20\cdot40-(20-0.8)(40-2\cdot1.3)=81.9cm^2$$
$$I=\frac{20\cdot40^3-(20-0.8)(40-2\cdot1.3)^3}{12}=22964.9cm^4$$
$$Z=\frac{22964.9}{20}=1148.2cm^3$$
$$E=20500kN/cm^2$$

従って、両断面内に生じる最大応力と最大変位は、以下のように与えられる。

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{Z}=\frac{20000}{1148.2}=17.42kN/cm^2 \qquad \cdots\cdots(10.28)$$

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 400^3}{3 \cdot 20500 \cdot 22964.9} = 2.266cm \qquad \cdots\cdots(10.29)$$

10.6 モデラーで解析モデルを作成する

SPACE のモデラーを用いて、上記の解析モデルをコンピュータ内に作成する。片持ち梁の解析モデルを「演習解析モデル」－「第 10 章」フォルダ内の「課題 1」フォルダ中に作成する。

モデラーを起動し、要素データの設定ツールチップを押し、次のダイアログを表示させる。鉄骨断面を使用するため、材料は SS400 とし、また、両端ファイバーモデルを使用する。解析に使用する断面は、H 型断面で H-400x200x8x13 とする。

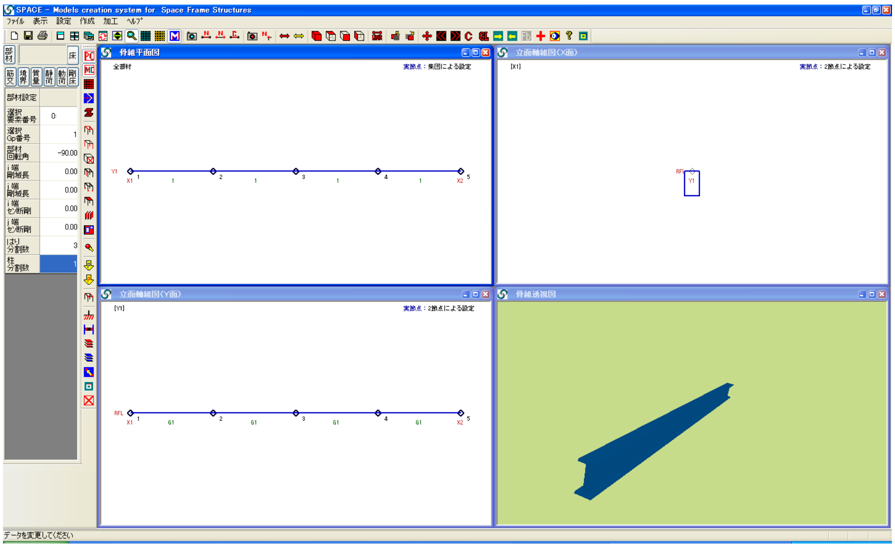
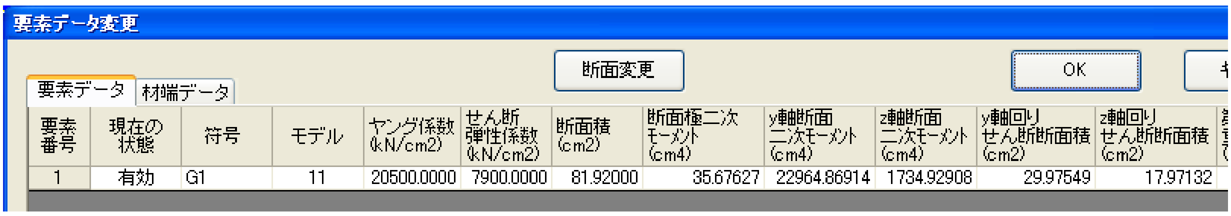


図 10-20 課題 1 の片持ち梁の解析モデル

モデラーで作成した課題 1 の 4 分割の解析モデルが、図 10-20 に示されている。また、使用した H 型断面の断面性能は、図 10-21 に示されており、先に計算した値と同じになっている。



要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm2)	せん断弾性係数 (kN/cm2)	断面積 (cm2)	断面極二次モーメント (cm4)	y軸断面二次モーメント (cm4)	z軸断面二次モーメント (cm4)	y軸回りせん断断面積 (cm2)	z軸回りせん断断面積 (cm2)
1	有効	G1	11	20500.0000	7900.0000	81.92000	35.67627	22964.86914	1734.92908	29.97549	17.97132

図 10-21 課題で使用している梁の断面特性

課題 1 の線形解析を行い、断面力とたわみの結果を比較してみよう。ここでは、せん断変形を無視した解析を行うので、図 10-21 の「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログで、○印で示したように「せん断変形を考慮しない」にチェックマークを入れる。解析経過の断面力を SOUTPUT ファイルに出力するために、同図の下の○印で示した「出力」項にチェックマークを入れる。これで、部材の断面

力が出力され、その値を確認することか可能となる。解析後、断面力を解析結果と比較してみよう。

図 10-23 には、課題 1 の解析結果が断面力として表示されている。同図の上がせん断力図、下が曲げモーメント図を表す。両図ともに、解析結果と同じであることが分かる。

片持ち梁先端の最大たわみは、Ctrl キイを押しながら、図 10-23 の梁先端部分を、マウスの右ボタンをクリックすることで、求められる。この操作で、図 10-24 に示される節点情報が表示され、梁先端の最大変位 $\delta = 2.266cm$ は、解析式(10. 29)と同じ値を示している。

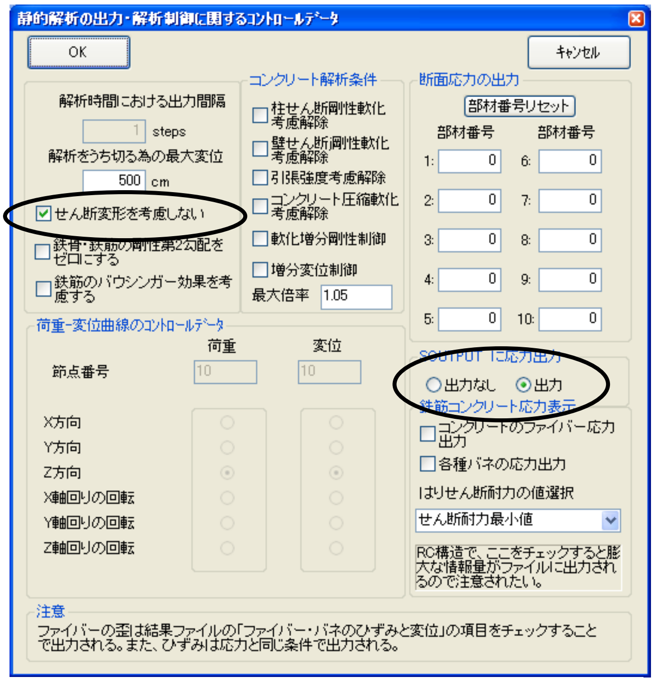


図 10-22 せん断変形を考慮しない解析

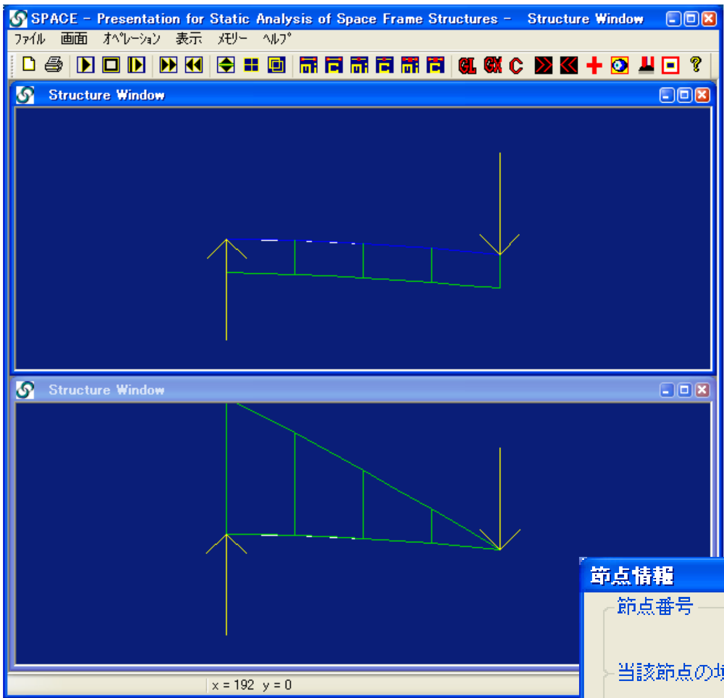


図 10-23 課題 1 の断面力の表示

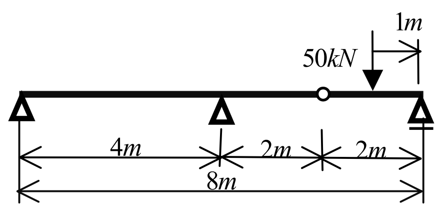
図 10-24 片持ち梁先端の変位

10.7　まとめ

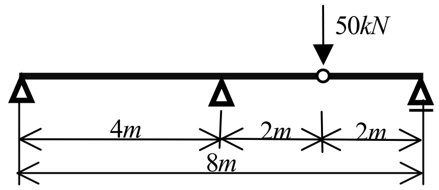
本章では、梁の微分方程式を解かなくても、力の釣合からたわみを求めるモールの定理について学習した。梁の微分方程式と断面力の釣合式が良く似ていることからこのモールの定理が得られている。代表的な静定梁について、モールの定理を用いて最大たわみなどを求めた。

10.8　問題

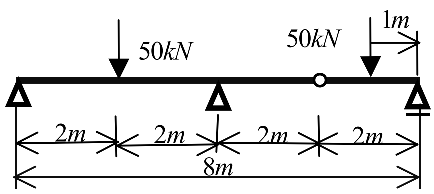
問 10-1　次に示す静的構造物の断面力と変形状態を、SPACE を用いて求めなさい。これらの構造物は静定であるため、曲げモーメント分布や、せん断力分布は解析的に求めることができる。SPACE で求めた結果と比較し、断面力の分布状態を理解しなさい。部材は鉄骨で材料のヤング係数は $E = 20500kN/cm^2$ である。使用する断面は、H 型断面で SS400 の H-400x200x8x13 とする。なお、梁中の○印は、ピン接合を意味する。



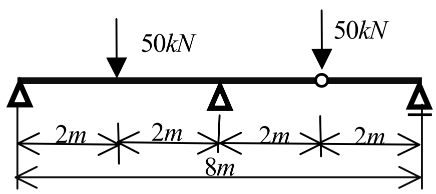
問 10-1



問 10-2



問 10-3



問 10-4

解析モデルには、梁の途中にピン接合部を有している。SPACEでは、この解析モデルとして、ピン位置に２つの節点をとり、両節点の回転自由度は独立に、一方、変位は同じ動きとなるように設定する必要がある。この解析モデルを作成するヒントを以下に示す。

まず、図10-25に示すように、平面図を用いて各スパン4分割で梁を設定する。次に、図10-26のように、ピン位置と少しは離れたところに1つの節点を作成する。さらに、集団設定で、梁部材を選択し、図10-27のように、部材番号７の両端の節点番号を7から10に変更する。「OK」ボタ

ンを押すと、図10-28のように部材の結合状態が変化する。

ここで、縦のツールバーの下から3つ目の「他節点と変位同一化設定」チップを押すと、左のダイアログバーが表示され、そこで、図10-29のように変更し、節点７と１０を続けてクリックする。この操作で、節点７と10の変位は同一視され、各回転角は独立に回転を許すことになる。

後は、図10-30のように、節点７と10の変位は同一視されたことを確認し、図10-31のように、節点10の座標を、節点７の座標と同じにする。これで、梁中のピンを有するモデル(図10-32)の作成が完成したことになる。後は、境界支持点と荷重を設定して、完全に完成したことになる。

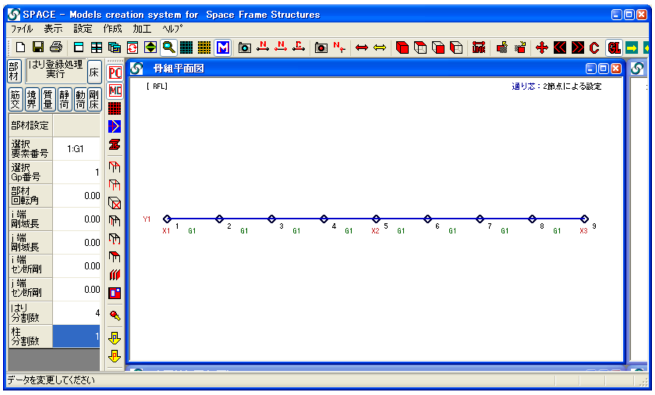


図 10-25 梁を 4 分割で作成

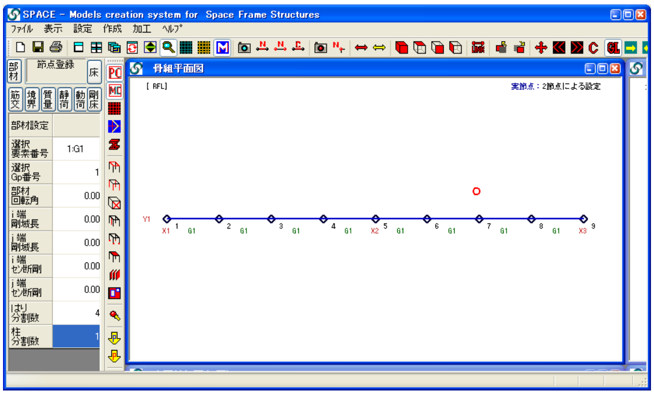
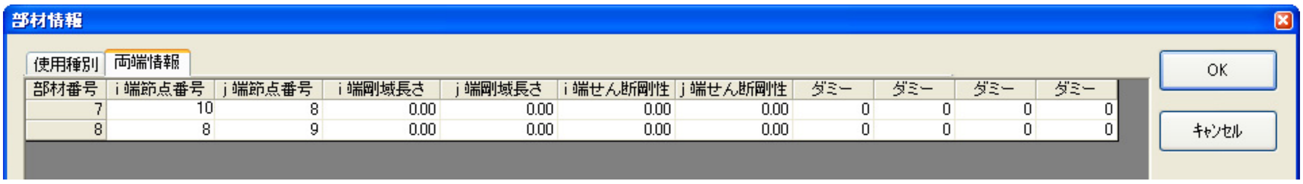


図 10-26 実節点を 1 つ設定



部材番号	i 端節点番号	j 端節点番号	i 端剛域長さ	j 端剛域長さ	i 端せん断剛性	j 端せん断剛性	ダミー	ダミー	ダミー	ダミー
7	10	8	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0	0	0
8	8	9	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0	0	0

図 10-27 部材７の節点番号を７から新規に作成した節点の番号 10 に変更

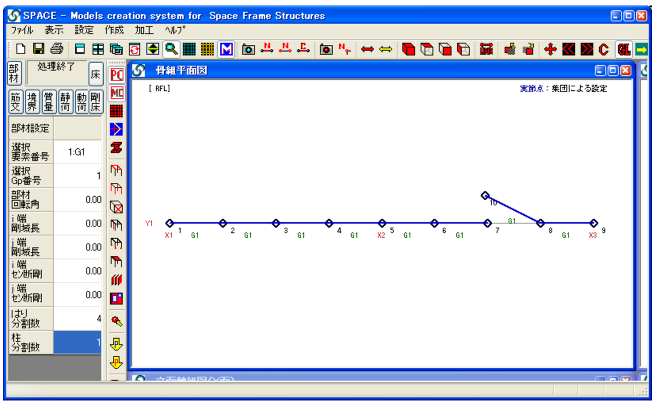


図 10-28 部材の結合状態が変更された様子

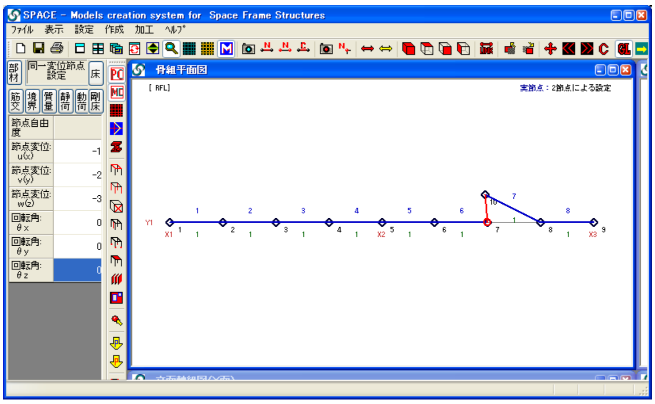


図 10-29 他節点と変位の同一視操作

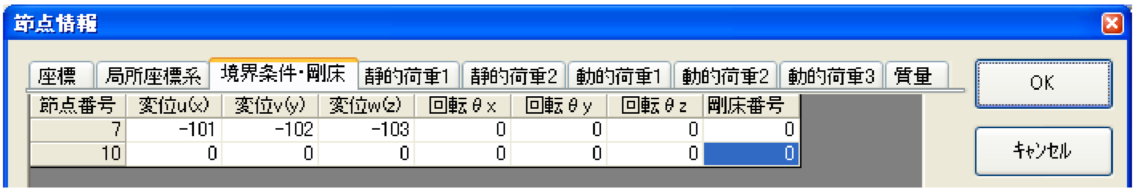


図 10-30 節点 7 の変位 u, v, w が節点 10 と同一視された

図 10-31 節点 10 の座標を節点 7 の座標と同じとなるように設定

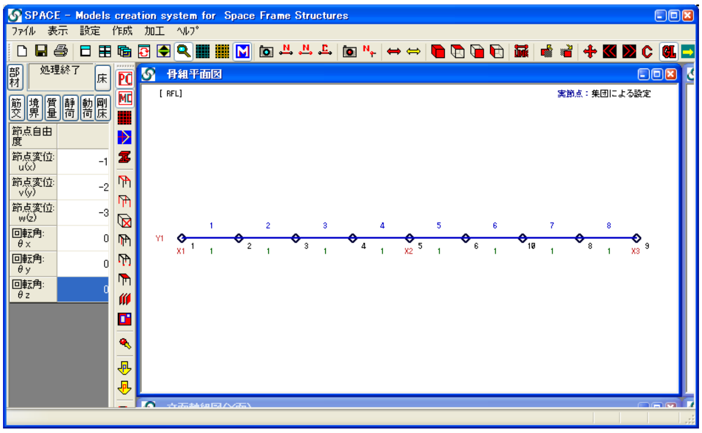


図 10-32 解析モデルの完成

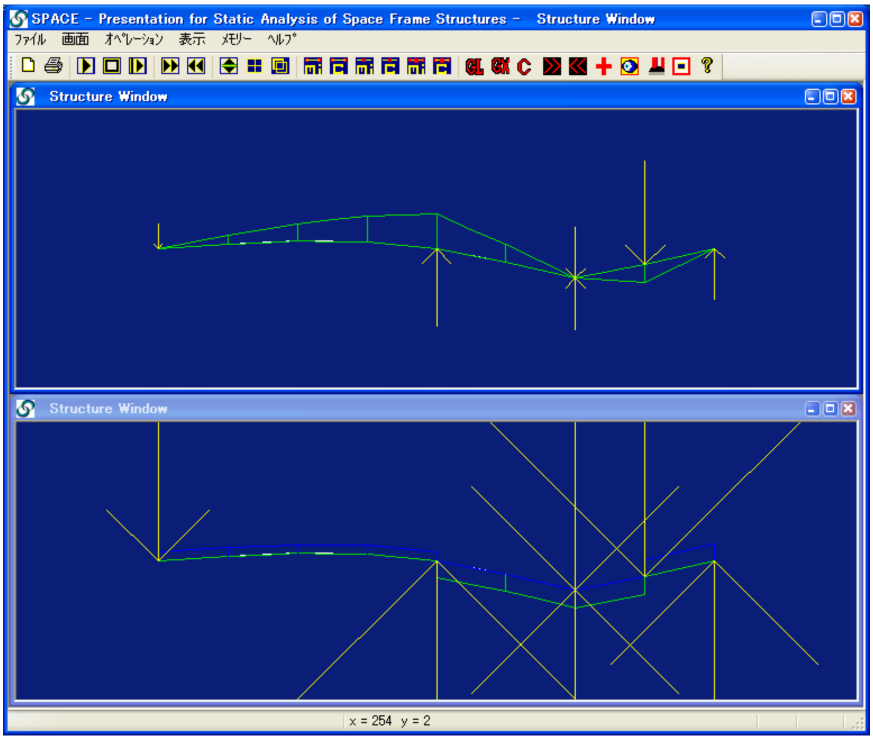
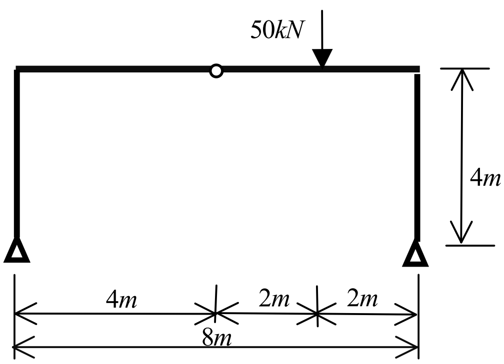
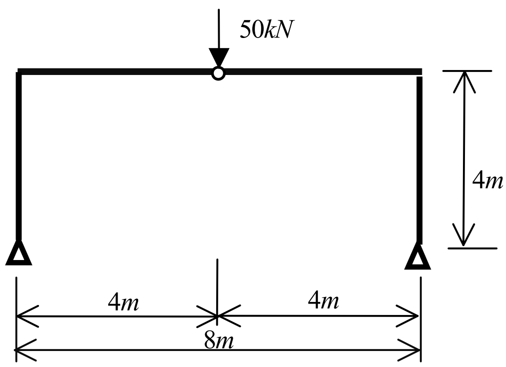


図 10-33 解析結果の表示
（上：曲げモーメント図、
下：せん断力図）

問 10-2　次に示す門型ラーメンの断面力と変形状態を、SPACE を用いて求めなさい。これらの構造物は静定であるため、曲げモーメント分布や、せん断力分布は解析的に求めることができる。SPACE で求めた結果と比較し、断面力の分布状態を理解しなさい。部材は鉄骨で材料のヤング係数は $E = 20500kN/cm^2$ である。使用する断面は、H 型断面で SS400 の H-400x200x8x13 とする。なお、梁中の○印は、ピン接合を意味する。



問 10-6



問 10-7