第１１章　不静定梁のたわみ

ポイント：基本的な不静定梁のたわみ
梁部材の断面力とたわみ

11.1 はじめに

本章では、不静定構造物として、最も単純でしかも最も大切な両端固定梁の応力解析を行う。ここでは、梁の微分方程式を用いて解くわけであるが、前章とは異なり、不静定構造物であるため力の釣合から先に断面力を決定することができない。そのため、梁のたわみ曲線と同時に断面力を求めることになる。この両端固定梁のたわみ曲線や断面力分布は、第二部のたわみ角法や第三部の固定法の基本応力として使用される最も重要な情報である。

キーワード
梁の微分方程式　不静定構造物の応力解析　両端固定梁

11.2 不静定梁の変形

11.2.1 中央集中荷重を受ける両端固定梁

本節では、基本的な解析モデルを用いて、不静定構造に関する解析手法を学ぶ。下図に示す部材中央に集中荷重が加わる両端固定梁を解析モデルとし、部材の変形状態、載荷点の鉛直変位、曲げモーメント分布などを求める。

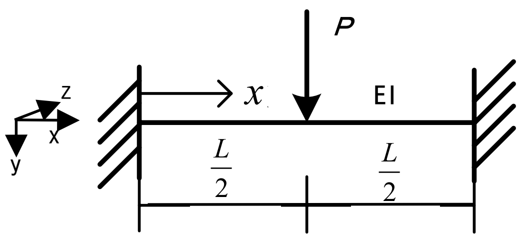


図 11-1 両端固定梁の解析モデル

変位と荷重には以下のような関係がある。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.1)$$

ここで、$P_w(x)$ は分布荷重であり、x の関数である。

梁の基礎式

力の釣合式

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad \frac{dQ}{dx} = -P(x) \qquad \frac{d^2 M}{dx^2} = -P(x)$$

梁の微分方程式

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

断面特性 EI_z が一定の場合

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P(x)$$

例題では、集中荷重なので $P_w = 0$ とし、境界条件で荷重を評価する。このモデルの微分方程式は以下のようになる。ただし、このたわみ関数 $w(x)$ は、構造が対称であることを考慮して $0 \le x < L/2$ の範囲で有効となる。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.2)$$

上式を解くために、以下のように両辺を 4 回積分する。

$$EI_z \frac{d^3 w}{dx^3} = C_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.3)$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = C_1 x + C_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.4)$$

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.5)$$

$$EI_z w(x) = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.6)$$

次に、4 つの境界条件によって積分定数を決定する。境界条件は左端と中央点で以下のように与える。ここで、境界条件の上 2 式は左端が固定であることから、また 3 番目は構造が対称で部材中央の回転角がゼロとなることから得られる。最後の境界条件は、図 11-2 のように中央点での上下方向の力の釣合、つまり荷重とせん断力との力の釣合から得られる。

$$w(0) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.7)$$

$$\theta(0) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.8)$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.9)$$

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = -EI_z \left.\frac{d^3 w}{dx^3}\right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{P}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.10)$$

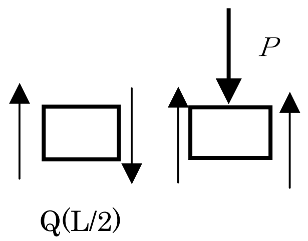


図 11-2 部材中央での外力とせん断力との力の釣合

式(11.7)と(11.8)より、$C_4 = C_3 = 0$ となる。さらに、式(11.9)より、

$$EI_z \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{L^2 C_1}{8} + \frac{L}{2} C_2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.11)$$

となり、また、式(11.10)と式(11.3)より次式が得られる。

$$EI_z \left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=\frac{L}{2}} = C_1 = -\frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.12)$$

式(11. 11)と(11. 12)より、積分定数が次のように決定される。

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{2} \\ C_2 &= \frac{PL}{8} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.13)$$

上式及び式(11. 6)より、たわみ関数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{P}{12EI_z}x^3 + \frac{PL}{16EI_z}x^2 \\ &= \frac{PL^3}{48EI_z}\left(-4(\frac{x}{L})^3 + 3(\frac{x}{L})^2\right) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.14)$$

載荷点における鉛直変位δは、式(11. 14)に$x = L/2$を代入することで、次のように求められる。

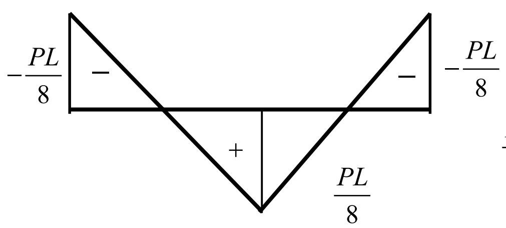
$$\delta = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{192EI_z} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.15)$$

曲げモーメントとせん断力は、式(6. 3)と(6. 4)、及び得られた積分定数より、次式で与えられる。

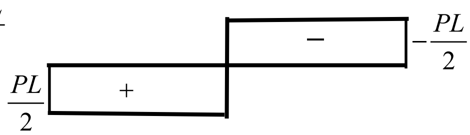
$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_z\frac{d^2w}{dx^2} = -C_1x - C_2 \\ &= -\frac{PL}{8} + \frac{P}{2}x = -\frac{PL}{8}\left(1 - 4(\frac{x}{L})\right) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.16)$$

$$Q(x) = -EI_z\frac{d^3v}{dx^3} = -C_1 = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.17)$$

上式は、先に述べたように解析モデルの左半分の値を与えており、右半分は、構造が対称であることから、右半分にコピーすれば良い。上式より、図 11-3 に曲げモーメント図とせん断力図を示す。



曲げモーメント図



せん断力図

図 11-3 両端固定梁の曲げモーメント図とせん断力図

11.2.2 等分布荷重を受ける両端固定梁

本節では、図 11-4(a)に示す等分布荷重が加えられる両端固定梁の断面力と最大たわみを求める。等分布荷重を受ける梁の微分方程式は、

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=\bar{P}_w \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.18)$$

で与えられ、上の両辺を4回積分すると、

$$EI_z\frac{dw}{dx}=\frac{1}{6}\bar{P}_w x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3 \qquad \cdots\cdot(11.19)$$

$$EI_z w=\frac{1}{24}\bar{P}_w x^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4 \qquad \cdots\cdot(11.20)$$

となる。境界条件として、梁両端が固定であることより、以下の4つの条件が得られる。

$$w(0)=0;\quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.21)$$

$$w(L)=0;\quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.22)$$

まず、式(11.21)を式(11.19)と(11.20)に適用すると、

$$EI_z\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}=C_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.23)$$

$$EI_x w(0)=C_4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.24)$$

となり、2つの積分定数が決定する。次に、式(11.22)を式(11.19)と(11.20)に適用する。

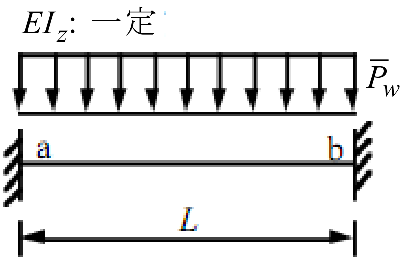
$$EI_z\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L}=\frac{1}{6}\bar{P}_w L^3+\frac{1}{2}C_1L^3+C_2L=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(11.25)$$

$$EI_z w(L)=\frac{1}{24}\bar{P}_w L^4+\frac{1}{6}C_1L^3+\frac{1}{2}C_2L^2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(11.26)$$

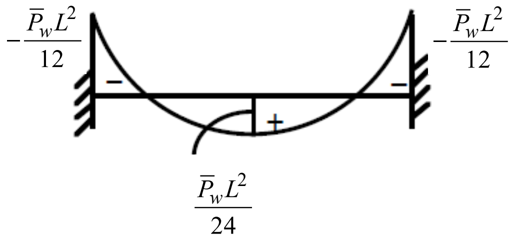
さらに、上式を整理すると、

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{6}\bar{P}_w L^2+\frac{1}{2}C_1L+C_2=0\\&\frac{1}{12}\bar{P}_w L^2+\frac{1}{3}C_1L+C_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.27)$$

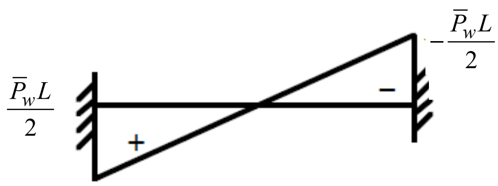
上式を連立にして、積分定数 C_1, C_2 を求めると、



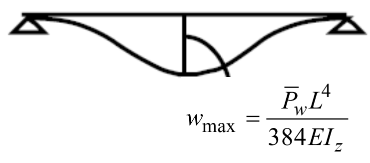
(a) 等分布荷重を受ける両端固定梁



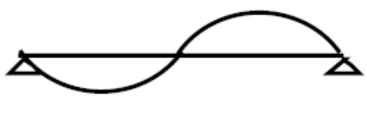
(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図



(d) 変形図



(e) 回転角図

図 11-4 等分布荷重を受ける両端固定梁の断面力分布と変形状態

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\bar{P}_w L}{2} \\ C_2 &= \frac{\bar{P}_w L^2}{12} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.28)$$

求めた積分定数より、曲げモーメントは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + \frac{\bar{P}_w}{2} Lx - \frac{\bar{P}_w}{12} L^2 \\ &= \frac{\bar{P}_w L^2}{12}\left(-6(\frac{x}{L})^2 + 6(\frac{x}{L}) - 1\right) \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.29)$$

上式より、梁端部、及び中央の曲げモーメントは、

$$\left.\begin{aligned} M(0) &= -\frac{\bar{P}_w L^2}{12} \\ M(\frac{L}{2}) &= \frac{\bar{P}_w L^2}{24} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.30)$$

次に、せん断力分布は、

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\bar{P}_w x + \frac{\bar{P}_w L}{2} \\ &= \frac{\bar{P}_w L}{2}\left(-2(\frac{x}{L}) + 1\right) \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.31)$$

となる。図11-4(b)と(c)に、ここで求めた関数を用いて、曲げモーメント図とせん断力図が各々描かれている。

最後に、梁のたわみと回転は、求めた積分定数を式(11.25)と(11.26)に代入すると、

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\bar{P}_w}{EI_z}(\frac{x^4}{24} - \frac{Lx^3}{12} + \frac{L^2 x^2}{24}) \\ &= \frac{\bar{P}_w L^4}{24 EI_z}\left((\frac{x}{L})^4 - 2(\frac{x}{L})^3 + (\frac{x}{L})^2\right) \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.32)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w}{EI_z}(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{4} + \frac{L^2 x}{12}) \\ &= \frac{\bar{P}_w L^3}{12 EI_z}\left(2(\frac{x}{L})^3 - 3(\frac{x}{L})^2 + (\frac{x}{L})\right) \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.33)$$

たわみの最大値は、部材中央に生じ、式(11.32)より、

$$w_{\max} = w(\frac{L}{2}) = \frac{\overline{P}_w L^4}{384EI_z} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.34)$$

となる。

11.3 解析モデル

本章で使用する解析モデルは、下図に示す両端固定梁である。

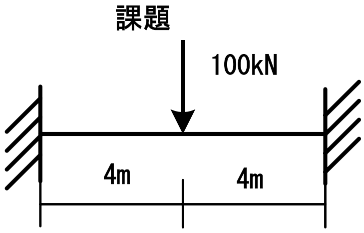


図 11-5 解析モデル

部材の断面は次に示す $D = 40cm, t = 1.2cm$ の角型鋼管とする。

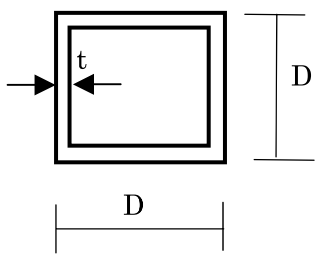


図 11-6 断面形状

角型鋼管の断面特性を以下に示す

$$E = 20500kN/cm^2$$
$$D = 40cm; \quad t = 1.2cm$$
$$A = 186.24cm^2$$
$$I_y = 0.4677 \times 10^5 \quad cm^4$$
$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{0.4677 \times 10^5}{20} = 2339cm^3$$

SPACE のモデラーを用いて、フォルダ「第 11 章」－「例題１」に上記の解析モデルを作成する。解析モデルに対する載荷点変位の理論値は前節の結果を利用すると以下のように計算される。

・荷重直下の最大変位

$$\delta_1 = \frac{PL^3}{192EI} = \frac{100 \times 800^3}{192 \times 20500 \times \left(0.4677 \times 10^5\right)}$$
$$= 0.2781cm \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.35)$$

課題の曲げモーメント図とせん断力図は、図 11-3 より、次図のように示される。

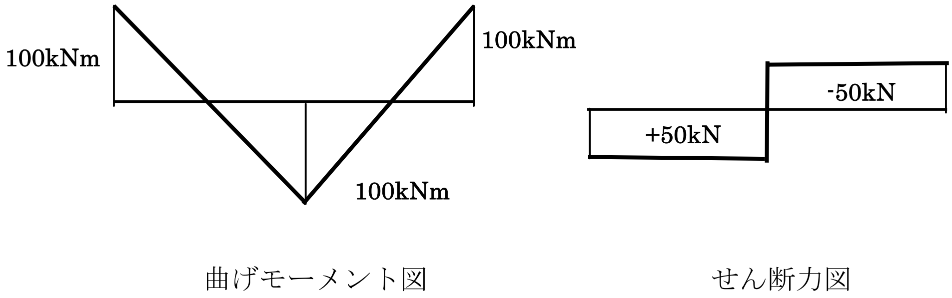


図 11-7 両端固定単純梁の曲げモーメント図とせん断力図

11.4 解析結果の分析

モデラーを用いて、解析モデルを作成する。作成方法は、前章までに用いた方法とほぼ同じであり、容易にモデルを作ることは可能であろう。ここでは、キーポイントを述べるに留める。

スパン数は、図 11-8 のように 2 とする。スパン長も図 11-9 に示すように、同じく、4m である。

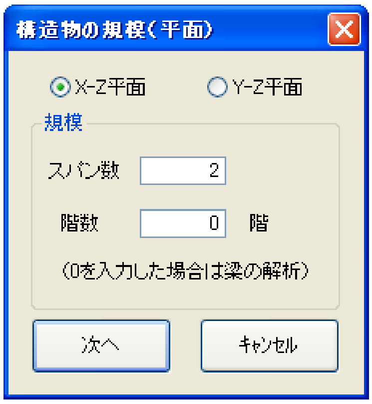


図 11-8 構造物のスパン数

図 11-9 モデルのスパン長設定

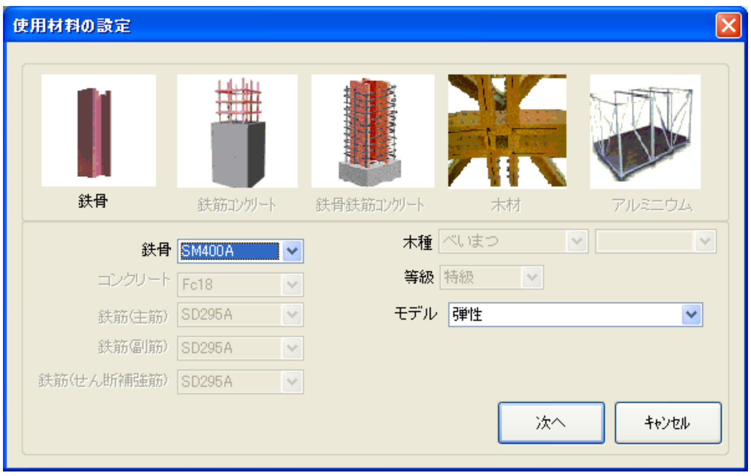


図 11-10 使用部材の設定

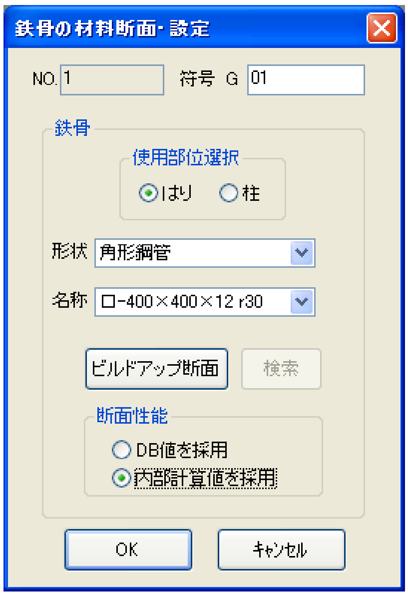


図 11-11 断面の設定

使用断面は、前節と同様に、鉄骨で弾性モデルを採用する。断面は、図 11-11 に示す角型鋼管を選択し、断面性能は「内部計算値を採用」にチェックマークを入れる。さらに、図 11-12 に示す「要素データ変更」ダイアログでせん断断面積をゼロにセットして、解析ではせん断変形を考慮しないとする。

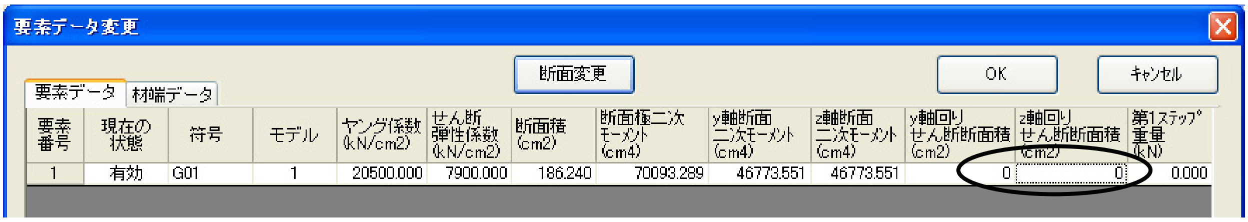


図 11-12 せん断断面積をゼロにセットし、せん断変形を考慮しない

ただし、Ver. 3. 6 では、図 11-13 のように、「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログで、「せん断変形を考慮しない」にチェックマークを入れることで、せん断変形を考慮しない解析が実施できる。

次に、モデラーの画面を利用して、形状、境界、荷重などの解析モデルを設定する。設定終了後、節点情報で解析データが正確に設定されているか検証する。

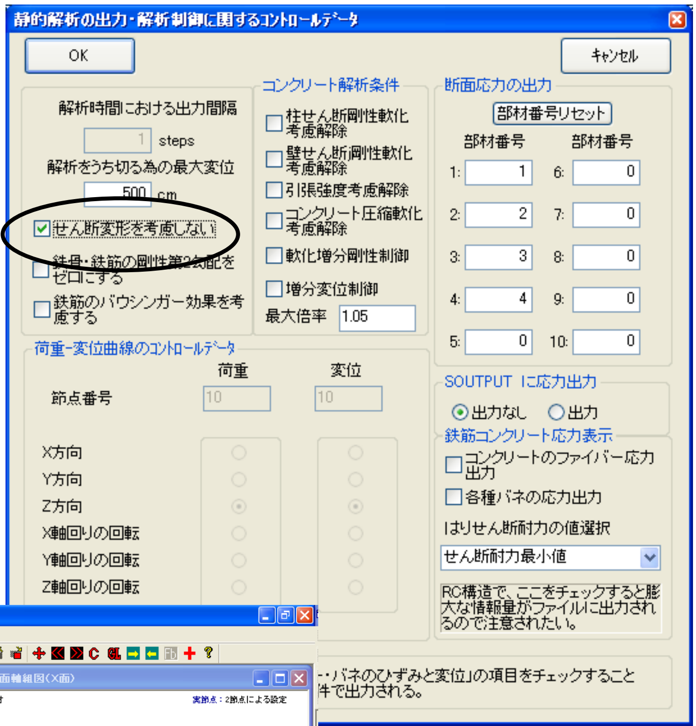


図 11-13 静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログでせん断変形考慮せずにチェック

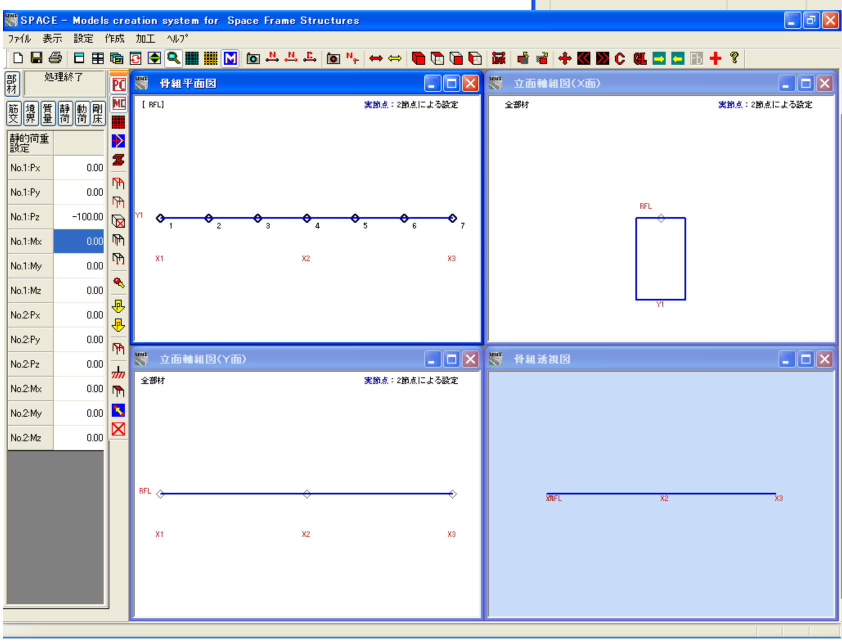


図 11-14 モデラーで形状、境界、荷重を割り付ける

解析モデルを設定した後、構造ファイル、静的荷重ファイル、情報ファイルを出力する。次に、静的ソルバーを用いて、数値解析を実施する。解析手法は「線形解析」を用いる。静的解析用コントロールデータは図 11-16 のようであり、ステップ数は 100 で、荷重係数は 0.01 を用いる。

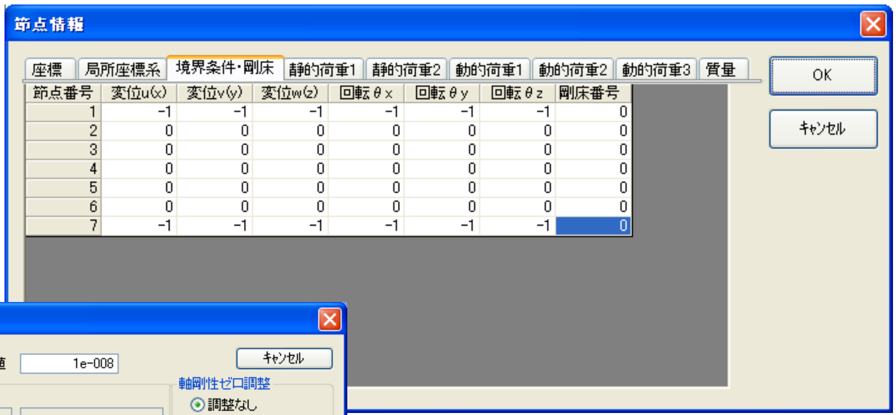


図 11-15 両端固定の境界条件をチェックする

図 11-16「静的解析用コントロールデータ」ダイアログ

解析終了後、プレゼンターを起動し、解析結果、特に変形と任意節点の変位を分析しよう。ここでは、プレゼンターの機能を学びながら解析結果を分析する。

プレゼンターを起動した後、子ウインドウ内でマウスの右ボタンをクリックし、プルダウンメニューを表示させ、構造画面を選択する。図 11-17 に示される両端固定梁の構造画面が表示される。次に、アニメーション機能を用いて、荷重、骨組の変形と曲げモーメントの関係を理解しよう。図に示すツールチップをク

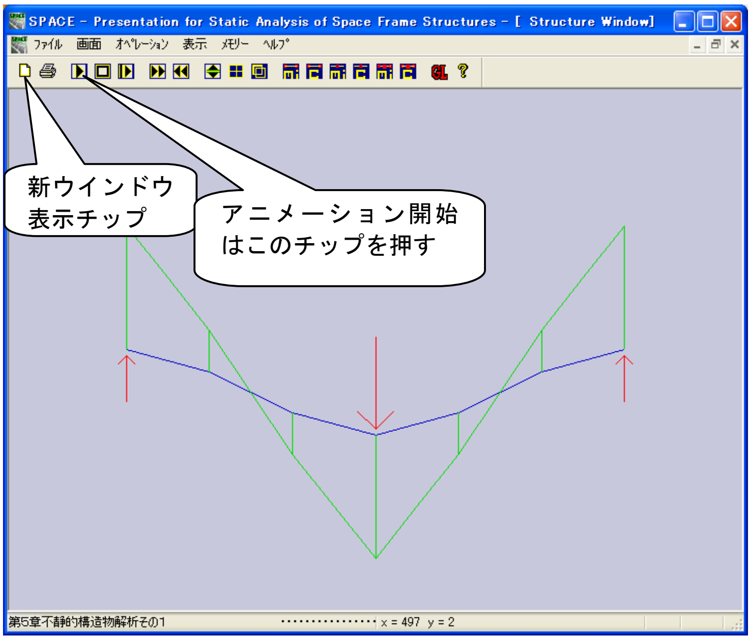


図 11-17 プレゼンターによるアニメーション表示

リックすることで、両端固定梁の変形状態が下図のようにアニメーションで示される。

曲げモーメントとせん断力のデジタル量を求めてみよう。曲げモーメントとせん断力を出力するために、SPACE のメニュー「I/0 データ」→「静的解析用データ」→「静的解析出力コントロールデータ」を選択し、ダイアログを表示させる。ここで、ダイアログ右下の「SOUTPUT に応力出力」で「出力」にチェックを入れる。この操作を行った後で、静的解析を再度行う。この処理によって、次のような出力が得られる。得られた結果と理論的に求めた曲げモーメント、せん断力を比較してみよう。

Divided step number :　100　---

Unstable number:　0

部材番号	部材モデル	Nx	Qy	Qz	Mx	My	Mz
1	1	0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	9999.9998	0.0000
		0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	3333.4999	0.0000
2	1	0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	3333.4999	0.0000
		0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	-3333.4999	0.0000
3	1	0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	-3333.4999	0.0000
		0.0000	0.0000	-50.0000	0.0000	-9999.9998	0.0000
4	1	0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	-9999.9998	0.0000
		0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	-3333.4999	0.0000
5	1	0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	-3333.4999	0.0000
		0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	3333.4999	0.0000
6	1	0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	3333.4999	0.0000
		0.0000	0.0000	50.0000	0.0000	9999.9998	0.0000

図 11-18 Soutput ファイルの内容表示（断面力の表示）

次に、子ウインドウを新たに表示させ、そこにせん断力図を描いてみよう。まず、図 11-20 に示すプレゼンターの「新ウインドウ発生」チップ*1 で、子ウインドウを表示させる。次に、マウス右ボタンをクリックし、プルダウンメニューを表示させる。そこで、「構造画面」を選択して、骨組構造図を表示させる。同じく、マウス右ボタンで、メニューを表示させ、「プロパティ」を選択する。この操作によって、図 11-19 に示すダイアログが表示され、そこで、「Z 方向のせん断力」をチェックする。変位倍率が大きいと変形状態が過大に図示されるため、曲げモーメント分布やせん断力分布が観察し難い場合がある。そこで、

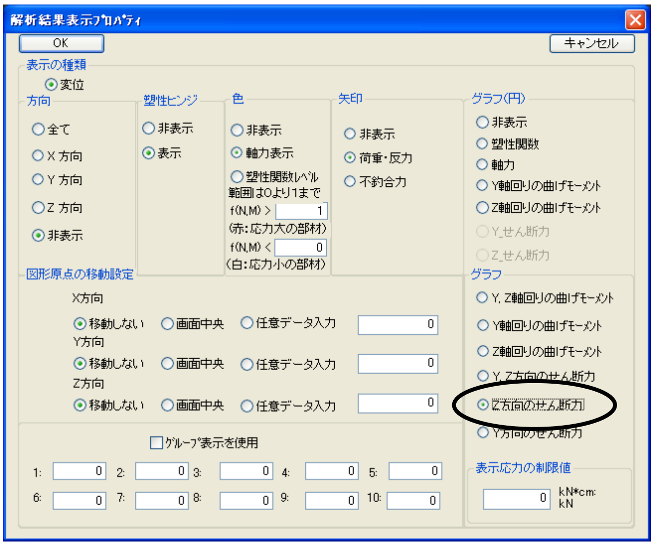
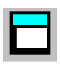


図 11-19 せん断力図を表示する

*1 

同ダイアログの左端の「方向」項目で、「非表示」を選択する。この操作によって図 11-20 に示されるように、せん断力図と曲げモーメントが描かれる。また、アニメーション機能を利用すると、荷重の増加と共にせん断力と曲げモーメントの変化が観察される。

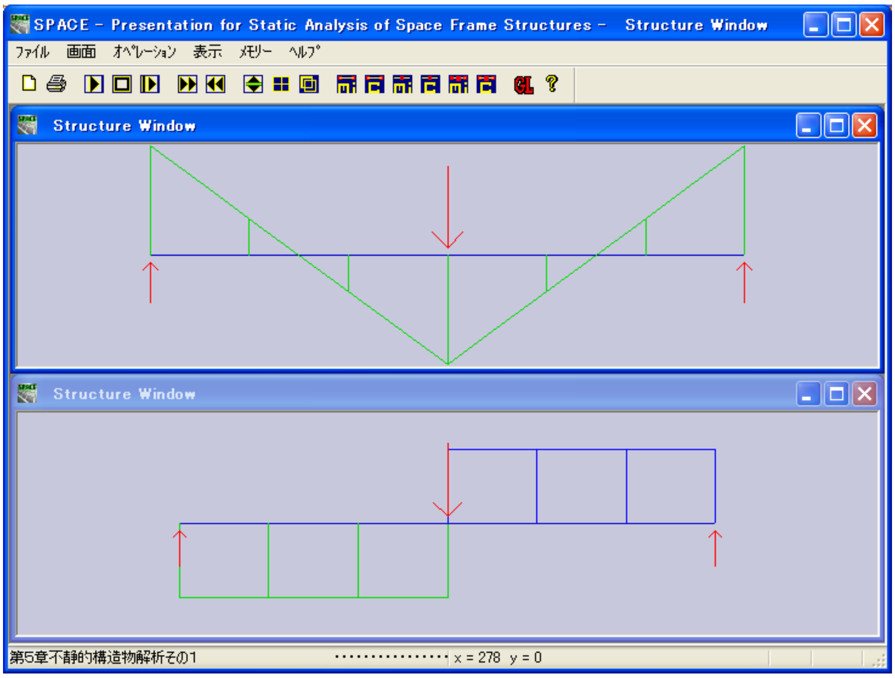


図 11-20 曲げモーメント図とせん断力図

載荷点における変位を求めるために、構造図の荷重位置で、Ctrl+マウス右クリックを行うと、次の「節点情報」ダイアログが表示される。

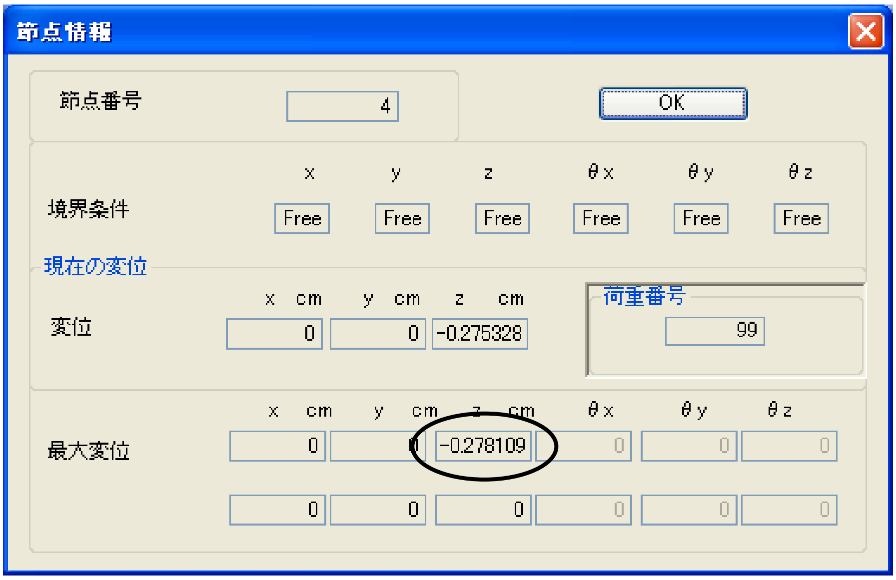


図 11-21 節点情報による部材中央の変位

載荷点の変位はダイアログの最大変位から次のように求められる。

$$\delta = 0.2781cm \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11.36)$$

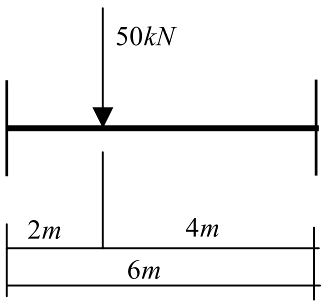
この値は、前節で求めた理論値である式(11.35)と非常に良い一致を示している。断面力の表示は節点情報の表示と同様の操作で行われる。表示させたい部材の上で、Shift+マウス右クリックを行うことで部材の最大断面力などが表示される。

11.5 まとめ

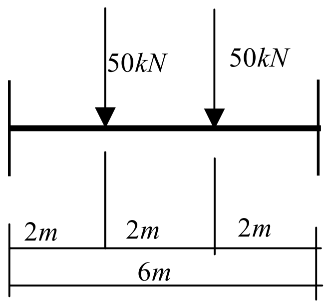
本章では、不静定構造物として、最も単純でしかも最も大切な両端固定梁の応力解析を行い、断面力分布とたわみ、最大たわみを求めた。ここでは、梁の微分方程式を用いて解くわけであるが、不静定梁であるため、断面力分布とたわみを同時に解く必要がある。両端固定梁の材端応力と中央の曲げモーメントは、基本応力として非常に重要となる。さらに、両端固定梁を SPACE で解析し、解析解の結果と比較した。

11.6 問題

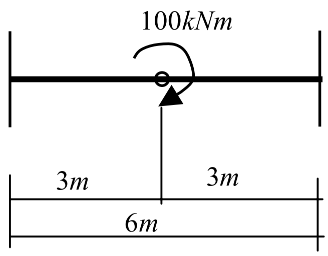
問11-1 次に示す構造物について、SPACEを用いて静的応力解析（線形解析）を実行しなさい。また、実際に手を使って解析し、両者の断面力分布と最大たわみを比較しなさい。鋼材はSS400を使用し、ヤング係数は$20500kN/cm^2$である。断面はH-350x175x7x11を使用するものとする。



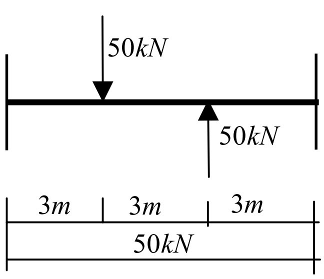
問 11-1



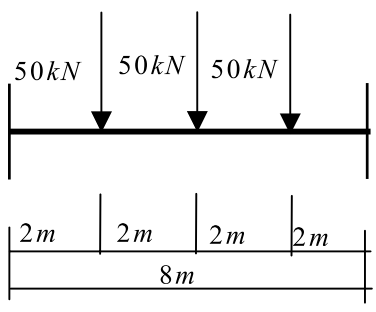
問 11-2



問 11-3



問 11-4



問 11-5