



第12章 不静定梁のたわみ その2

**ポイント：一端固定、一端ピン支持の梁の解析を行う
微分方程式の解析方法をより深く理解する**

本章では、前章に続いて、不静定梁の応力解析を実施し、梁のたわみ曲線を求める。ここで用いる梁は、一端固定で一端ピンの境界条件を有する梁であり、その断面力の分布や変形特性は、第二部以降のたわみ角法や固定法でも基本的な性状として重要であり、その解析方法と共に得られた結果も十分に理解しておく必要がある。

12.1 はじめに

キーワード
梁の微分方程式 不静的構造物の応力解析 一端固定他端ピン支持梁

本節では、図 12-1 に示す一端固定・一端ピン支持の不静定梁が等分布荷重を受けるモデルを応力解析し、断面力の分布とたわみ曲線、あるいは最大曲げモーメントや最大変位を求める。不静的梁の解析を行う4階の微分方程式を以下に示す。

12.2 一端固定、他端ピン支持梁

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x) \quad \dots\dots\dots(12.1)$$

ここで、 $P_w(x)$ は分布荷重関数であるが、ここでは、等分布荷重であるため定数 \bar{P}_w となる。

上式を解くために、以下のように両辺を4回積分する。

$$EI_z \frac{d^3 w}{dx^3} = \bar{P}_w x + C_1 \quad \dots\dots\dots(12.2)$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \quad \dots\dots\dots(12.3)$$

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \quad \dots\dots\dots(12.4)$$

$$EI_z w(x) = \frac{\bar{P}_w}{24} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \quad \dots\dots\dots(12.5)$$

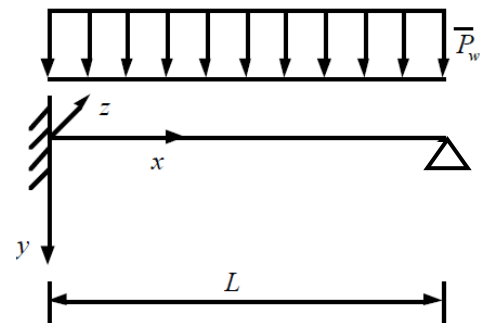


図 12-1 等分布荷重を受ける一端固定・一端ピン支持梁

上式には積分定数が4つあり、4つの境界条件が必要となる。まず、梁

の左端は固定であるため、その点の変位と回転角（勾配）は、次に示すように共にゼロとなる。

$$w(0) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \dots\dots\dots(12.6)$$

また、右端はピン支持であるため、

$$w(L) = 0 \quad \dots\dots\dots(12.7)$$

として、変位に対する境界を与え、他のひとつの境界は応力で与えることになる。ここでは、ピン支持であることから、曲げモーメントはゼロとなる。曲げモーメントは、式(12.3)より次式で与えられる。

$$M(L) = -EI_z \left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad \dots\dots\dots(12.8)$$

まず、式(12.6)を式(12.4)と(12.5)に適用すると、

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_3 = 0 \quad \dots\dots\dots(12.9)$$

$$EI_z w(0) = C_4 = 0 \quad \dots\dots\dots(12.10)$$

となり、2つの積分定数が決定する。次に、式(12.7)を式(12.5)に適用すると、

$$EI_z w(L) = \frac{1}{24} \bar{P}_w L^4 + \frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(12.11)$$

また、応力境界の条件を式(12.3)に適用すると

$$M(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} L^2 - C_1 L - C_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(12.12)$$

となる。式(12.11)と式(12.12)を連立にして、積分定数 C_1, C_2 を求めると以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{5\bar{P}_w L}{8} \\ C_2 &= \frac{\bar{P}_w L^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12.13)$$

これで、積分定数は全て決定したので、たわみや断面力が、これらの積分定数を該当する関数に代入することで得られる。まず、断面力を求め

$$\left. \begin{aligned} Q(0) &= \frac{5}{8} \bar{P}_w L \\ Q(L) &= -\frac{3}{8} \bar{P}_w L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12.19)$$

反力は、図12-2を参考にして、支持点での力の釣り合いから、

$$\left. \begin{aligned} R_a = Q(0) &= \frac{5}{8} \bar{P}_w L; \quad R_b = -Q(L) = \frac{3}{8} \bar{P}_w L \\ M_a &= -M(0) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8}; \quad M_b = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12.20)$$

図12-3のように得られる。このように、不静定構造物では反力を最後に求めることになる。

次に、たわみを求めることにしよう。たわみの式(12.5)に積分定数を代入し、整理すると以下の式が得られる。

$$w(x) = \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} \left(2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) \dots\dots\dots (12.21)$$

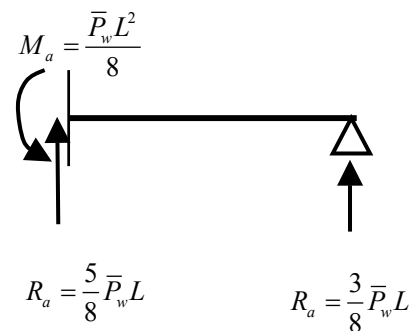


図 12-3 不静定梁の反力

同様に、回転角を表す式(12.4)に積分定数を代入すると、

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w L^3}{48EI_z} \left(8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{L}\right) \right) \dots\dots\dots (12.22)$$

として得られる。変位の最大値は、関数の最大・最小より、回転角がゼロの位置で与えられる。まず、回転角がゼロの位置を求めよう。上式を用いると、

$$8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{L}\right) = 0 \Rightarrow x/L = 0, x/L = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16} \dots\dots (12.23)$$

となる。ただし、 $x=0$ と $x>L$ の値は意味をなさないので、 $x/L = 0.578$

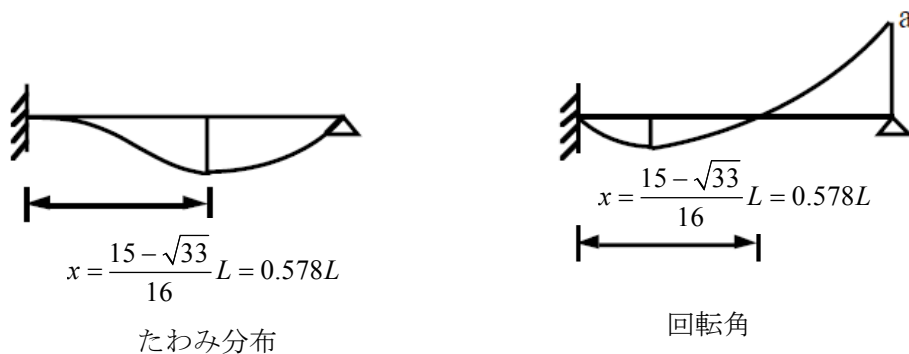


図 12-4 等分布荷重を受ける一端固定で他端ピン支持梁のたわみと回転角分布

の値を用いることになる。この値を式(12.21)に適用することによって、変位の最大値が次のように得られる。

$$w_{\max} = w(0.578L) = 0.26 \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} = \frac{2.08\bar{P}_w L^4}{384EI_z} \quad \dots\dots(12.24)$$

例題 12-1 図 12-5 に示す中央集中荷重を受ける一端固定・一端ローラー支持梁の応力解析を行い、断面力とたわみを求めよ。

ここでは、前節とは少し異なった方法で鉛直変位を求めてみよう。第 9 章では、片持ち梁先端のたわみを求めたので、この解を利用する。

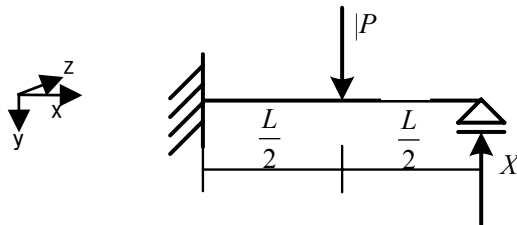


図 12-5 一端固定、他端ローラー支持の解析モデル

まず、図 12-5 のようにローラー支持部の鉛直反力を X で仮定する。次に、下図のように 2 つの片持ち梁に分けて考える。

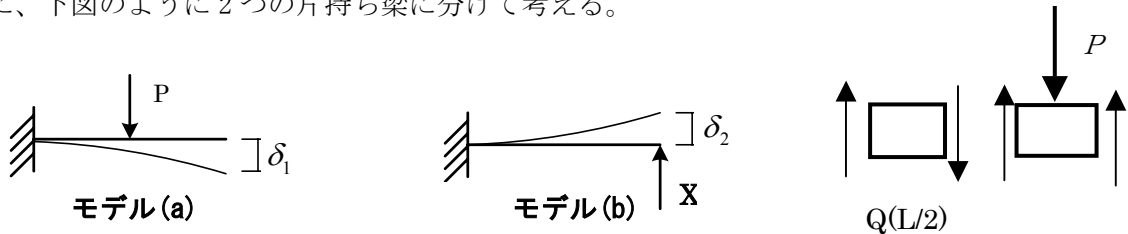


図 12-6 解析モデルを 2 つの片持ち梁に分ける

各片持ち梁先端の変位を次のように求める。この値は、第 9 章で既に求めており、これを利用する。ここで、 δ_1, θ' は荷重直下の変位と回転角である。

$$\delta_1 = \delta_1' + \theta' \frac{L}{2} = \frac{P}{3EI_z} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{P}{2EI_z} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \frac{L}{2} = \frac{5PL^3}{48EI_z} \quad \dots\dots(12.25)$$

$$\delta_2 = -\frac{XL^3}{3EI_z} \quad \dots\dots\dots(12.26)$$

先端に集中荷重を受ける片持ち梁の先端の変位は、第 9 章の式(9.39)より

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

また先端の回転角も次式となる。

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI_z}$$

図 12-5 から分かるように、右端はローラー支持なので鉛直変位は生じない。そのため、以下のような関係が成り立つ。

$$\delta_1 + \delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(12.27)$$

式(12.24)～(6.27)より、反力 X は次のように求められる。

$$\frac{5PL^3}{48EI_z} = \frac{XL^3}{3EI_z}$$

$$X = \frac{5}{16}P \quad \dots\dots\dots(12.28)$$

一端固定、他端ローラーの解析モデルの変形は、図 12-6 に示す 2 つの片持ち梁に関する変形状態の和で与えられる。この 2 つの片持ち梁の中央変位をそれぞれ δ_1' 、 δ_2' とすると、一端固定、他端ローラー支持の不静定梁載荷点の変位 δ は次式となる。

$$\delta = \delta_1' + \delta_2'$$

$$= \frac{P}{3EI_z} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{5L^3}{48EI_z} \cdot \frac{5}{16}P$$

$$= \frac{7PL^3}{768EI_z} \quad \dots\dots\dots(12.29)$$

先端に集中荷重を受ける片持ち梁の中央の変位 δ' は第 9 章の式 (9.37) より

$$\delta_2' = \frac{XL^3}{6EI_z} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right)$$

$$= \frac{XL^3}{6EI_z} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{5L^3}{48EI_z} X$$

曲げモーメント及びせん断力図は、変位と同様に図 12-6 に示す 2 つの片持ち梁の応力を足し合わせて求める。

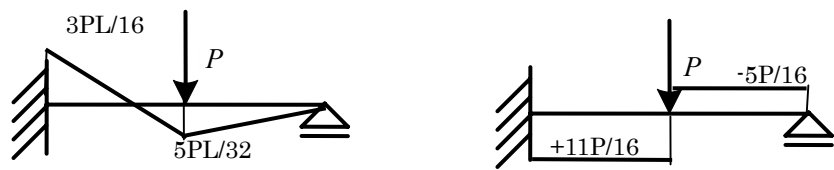
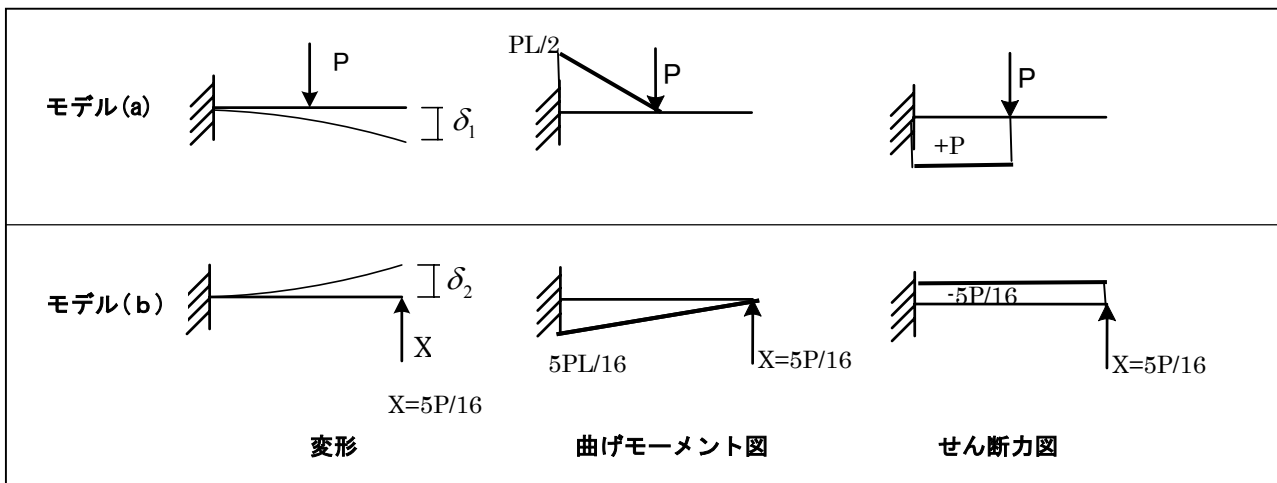


図 12-7 曲げモーメント図とせん断力図

本章で使用する解析モデルは、下図の不静定梁である。

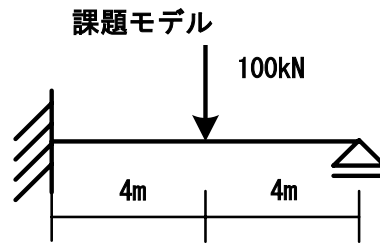


図 12-8 解析モデル

部材の断面は次に示すの $D = 40\text{cm}$, $t = 1.2\text{cm}$ の角型鋼管とする。

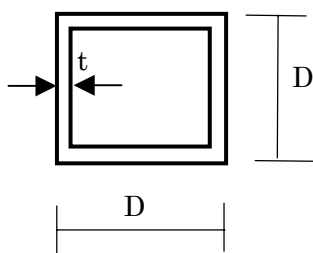


図 12-9 断面形状

角型鋼管の断面特性を以下に示す

$E = 20500\text{kN/cm}^2$

$D = 40\text{cm}; t = 1.2\text{cm}$

$A = 186.24\text{cm}^2$

$I_y = 0.4677 \times 10^5 \text{ cm}^4$

$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{0.4677 \times 10^5}{20} = 2339\text{cm}^3$

SPACE のモデラーを用いて、フォルダ「第 1 2 章」－「例題 1」に上記の解析モデルを作成する。各解析モデルに対する載荷点変位の理論値は前節の結果を利用すると以下のように計算される。

・ 課題の載荷点の変位

$$\delta_2 = \frac{7PL^3}{768EI_y} = \frac{7 \times 100 \times 800^3}{768 \times 20500 \times (0.4677 \times 10^5)}$$

$$= 0.4867\text{cm} \quad \dots\dots\dots (12.30)$$

また、課題の曲げモーメント図とせん断力図は、図 12-7 より、次のように得られる。



図 12-10 曲げモーメント図とせん断力図

12.4 解析結果の
分析

モデラーを用いて、解析モデルを作成する。作成方法は、前章までに用いた方法とはほぼ同じであり、容易にモデルを作ることは可能であろう。ここでは、キーポイントを述べるに留める。

スパン数は、両モデル共、図 12-11 のように 2 とする。スパン長も図 12-12 に示すように、同じく、4m である。

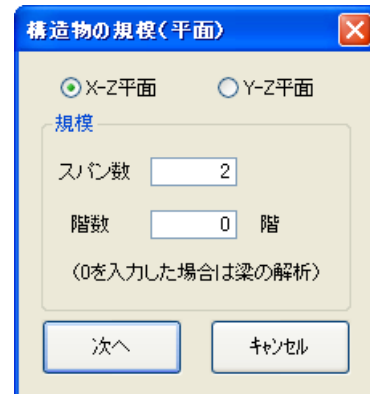
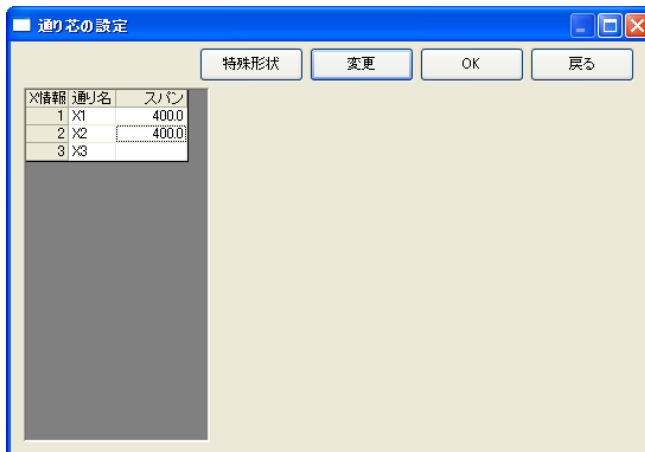


図 12-11 構造物のスパン数

図 12-12 モデルのスパン長設定

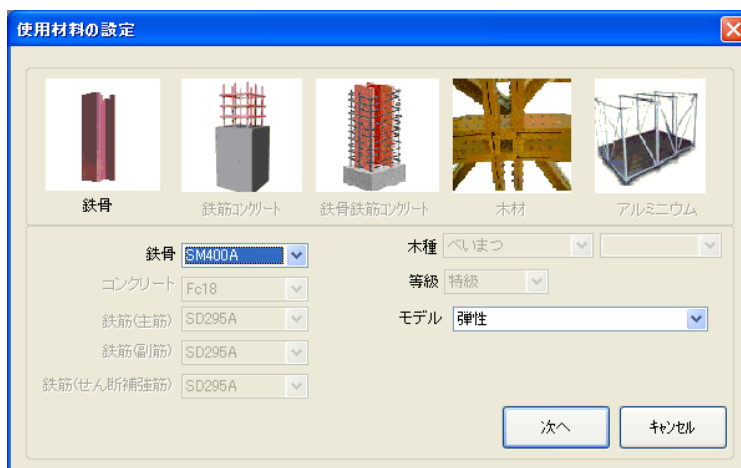


図 12-13 使用部材の設定

使用断面は、前節と同様に、鉄骨で弾性モデルを採用する。断面は、図 12-14 に示す角型鋼管を選択し、断面性能は「内部計算値を採用」にチェックマークを入れる。さらに、図 12-15 に示す「要素データ変更」ダイアログでせん断断面積をゼロにセットして、解析ではせん断変形を考慮しないとする。

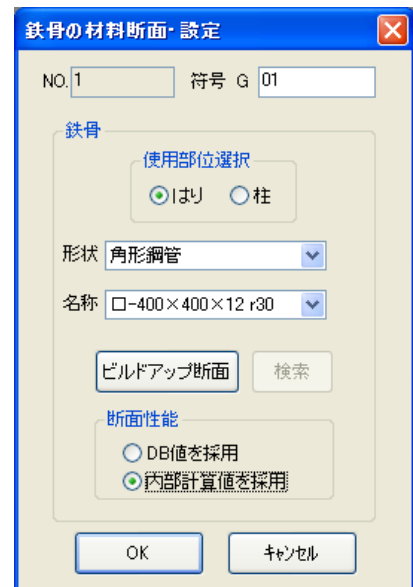


図 12-14 断面の設定

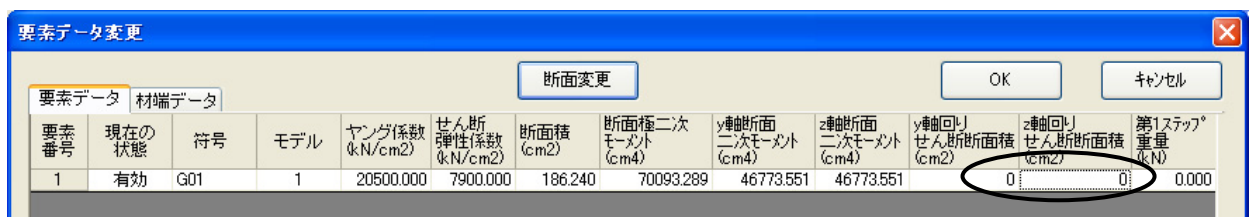


図 12-15 せん断断面積をゼロにセットし、せん断変形を考慮しない

ただし、Ver. 3.6 では、図 12-16 のように、「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログで、「せん断変形を考慮しない」にチェックマークを入れることで、せん断変形を考慮しない解析が実施できる。

次に、モデラーの画面を利用して、形状、境界、荷重などの解析モデルを設定する。設定終了後、節点情報で解析データが正確に設定されているか検証する。ここでは、境界条件として、部材右端がピン支持であることに注意されたい。図 12-17 に示すように節点情報で境界条件を確認しよう。後は、解析に必要なデー

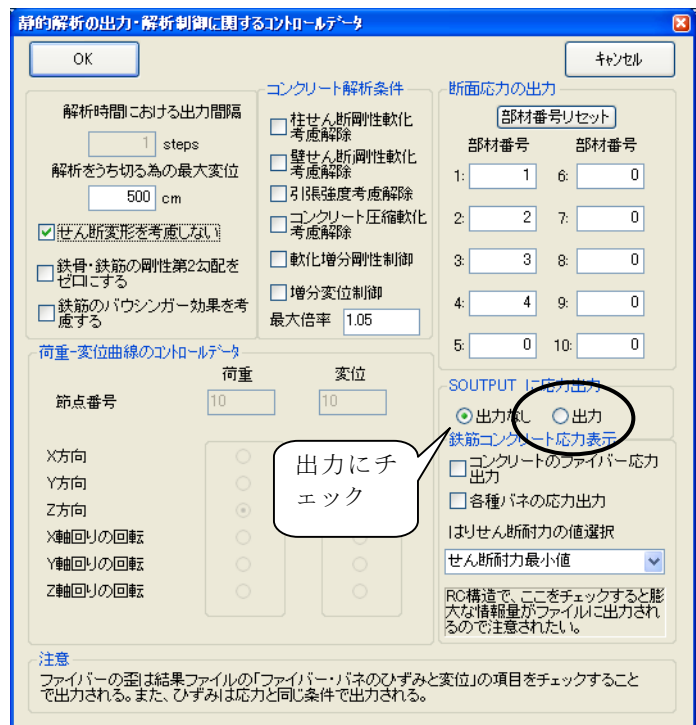


図 12-16 静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログでせん断変形考慮せずにチェック

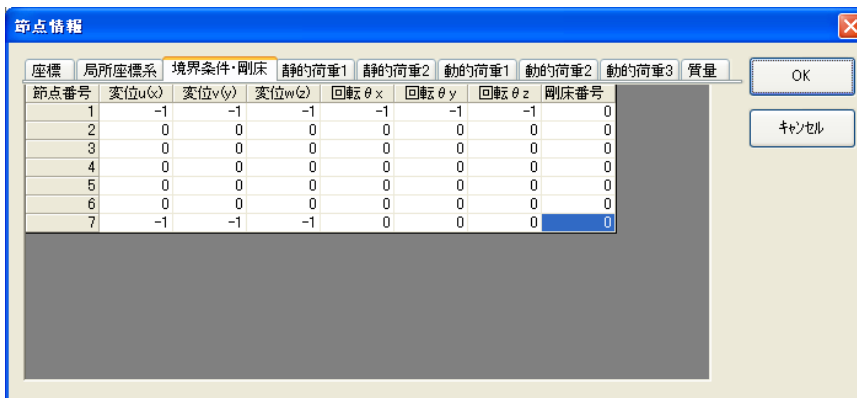


図 12-17 節点情報による境界条件のチェック

タをファイルに出力する。解析モデルを設定した後、構造ファイル、静的荷重ファイル、情報ファイルを出力する。

次に、静的ソルバーを用いて、数値解析を実施する。解析手法は「線形解析」を用いる。静的解析用コントロールデータを開いて荷重に関するデータとして、ステップ数は 100 で、荷重係数は 0.01 を用いる。

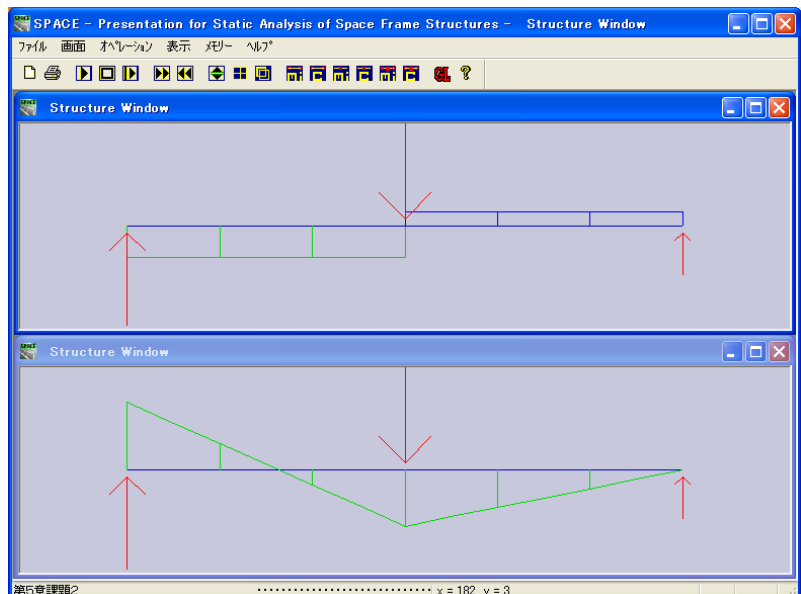


図 12-18 課題のせん断力図と曲げモーメント図

解析終了後、プレゼンターを起動し、解析結果、特に変形と任意節点の変位を分析しよう。

プレゼンターを起動した後、子ウインドウ内でマウスの右ボタンをクリックし、プルダウンメニューを表示させ、構造画面を選択する。図12-18に示される一端固定・他端ピン支持梁の構造画面が表示される。次に、アニメーション機能を用いて、荷重、骨組の変形と曲げモーメントの関係を理解しよう。

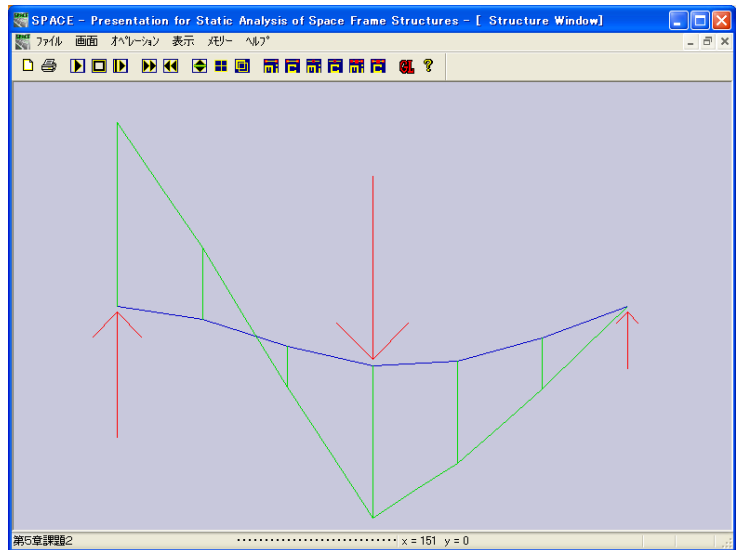


図12-19 アニメーションで変形状態と曲げモーメント図を見る

図12-19に示すツールチップをクリックすることで、両端固定梁の変形状態が上図のようにアニメーションで示される。

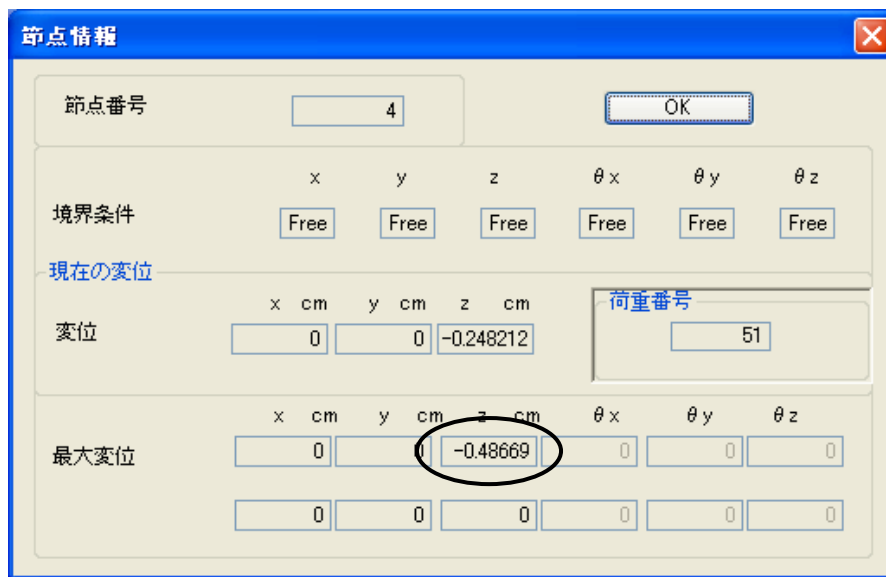


図12-20 「节点情報」ダイアログで課題2の最大変位を読み取る

次に、載荷点における変位を求めよう。まず、構造図の荷重位置で、Ctrl+マウス右クリックを行う。この操作によって、次の「节点情報」ダイアログが表示される。

上のダイアログより、載荷点の変位を読み取ると、

$$\delta = 0.48669\text{cm} \quad \dots\dots\dots(12.31)$$

となる。この値は、前節で求めた理論値であり、式(12.30)と非常に良い一致を示している。

断面力を検証するために、メニューの「表示」→「静的解析の途中経過の表示」を選択すると、図 12-21 のように、解析経過が表示される。断面力は、図 12-16 の丸で示した「SOUTPUT」に応力出力の項で、「出力」にチェックを入れることで出力される。このファイルの最後に、100 ステップ目の断面力が表示されており、図 12-10 の断面力と一致している。

```

Divided step number: 100 -----
Unstable number: 0
部材番号 部材モデル      Nx      Qy      Qz      Mx      My      Mz
  1      1      0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000 14999.9997  0.0000
           0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000  5833.5624  0.0000
  2      1      0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000  5833.5624  0.0000
           0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000 -3333.5624  0.0000
  3      1      0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000 -3333.5624  0.0000
           0.0000  0.0000 -68.7500  0.0000 -12499.9997  0.0000
  4      1      0.0000  0.0000  31.2500  0.0000 -12499.9997  0.0000
           0.0000  0.0000  31.2500  0.0000 -8333.4373  0.0000
  5      1      0.0000  0.0000  31.2500  0.0000 -8333.4373  0.0000
           0.0000  0.0000  31.2500  0.0000 -4166.5624  0.0000
  6      1      0.0000  0.0000  31.2500  0.0000 -4166.5624  0.0000
           0.0000  0.0000  31.2500  0.0000   0.0000  0.0000

Step number : 100 //// Load S1      1.000 Load S2      0.000 Max. disp.(No. node: 4 ) : 0.4867

```

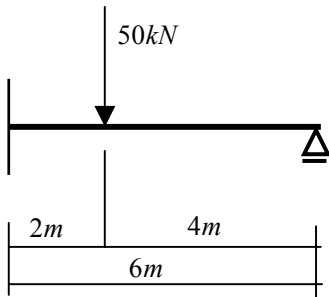
図 12-21 Soutput ファイルの内容表示（断面力の表示）

12.5 まとめ

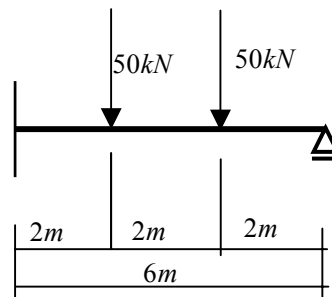
本章では、前章に続き、不静定梁の応力解析を実施し、梁のたわみ曲線、最大たわみを求めた。ここで用いた梁は、一端固定で一端ピンの境界条件を有する梁であり、その断面力の分布や変形特性はたわみ角法や固定法でも基本的な性状として重要である。さらに、両端固定梁を SPACE で解析し、解析解の結果と比較した。

12.6 問題

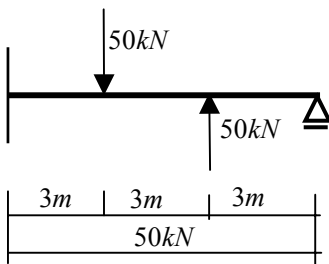
問12-1 次を示す構造物について、SPACEを用いて静的応力解析（線形解析）を実行しなさい。また、実際に手を使って解析し、両者の断面力分布と最大たわみを比較しなさい。鋼材はSS400で、ヤング係数は $E = 20500kN/cm^2$ である。部材断面はH-400x200x8x13を使用するものとする。



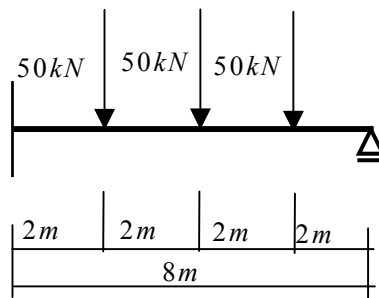
問 12-1



問 12-2



問 12-3



問 12-4