第５章　断面性能と応力分布の算定

ポイント：各種の断面について断面性能を求める演習を行う
断面特性を計算する

5.1 はじめに

前章では、基本的な断面性能について学習した。本章で、建築の構造で使用される断面を用いて、断面性能の値を具体的に求めてみよう。この演習を行うことで、各種の断面性能を計算することができ、また、その特性を理解することができる。

ここで、演習した断面を、SPACE を用いて数値計算し、理論的に求めた断面特性を比較してみよう。

キーワード
応力と断面力の関係　断面特性（断面積、断面二次モーメント、断面係数）
断面内の軸方向応力の分布

5.2 断面一次モーメントと図芯位置

前章で、断面一次モーメントと断面の図芯位置について学んだ。ここでは、例題を通して断面一次モーメントと図芯位置を求める演習を行い、具体的に求めてみよう。

例題5-1 次の三角形断面の図芯位置を求めよ。

断面の下端を Y 軸の原点にとり、図芯位置までの距離を Y_0 とすると、その距離は式(4.6)で与えられる。そこで、断面積 A と Z 軸に関する断面一次モーメント S_z を求めることにする。まず、微小断面 dA を

$$dA = b(Y)dY \qquad \cdots\cdots(5.1)$$

で表す。関数 $b(Y)$ は、Y 軸に関する断面の幅を表し、その値は、三角形断面に対し

$$b(Y) = b(1-\frac{Y}{h}) \qquad \cdots\cdots(5.2)$$

となることから、断面積及び断面一次モーメントは、次式となる。

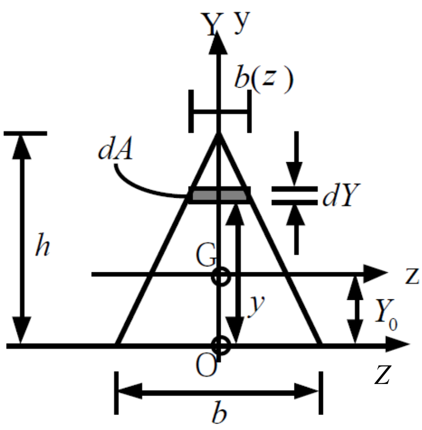


図 5-1　三角形断面の図芯位置

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^h b(1-\frac{Y}{h})dY = b\left[Y-\frac{Y^2}{2h}\right]_0^h = \frac{bh}{2} \\ S_Z &= \int_0^h b(1-\frac{Y}{h})YdY = b\left[\frac{Y^2}{2}-\frac{Y^3}{3h}\right]_0^h = \frac{bh^2}{6} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5.3)$$

従って、図芯までの距離 Y_0 は次式となる。

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3} \qquad \cdots\cdots(5.4)$$

例題5-2　次に示すＴ形断面の図心位置を求めよ。

Ｔ型梁の梁幅と梁せいの各々の比率を次式で表す。

$$n = \frac{B_2}{B_1};\quad n_1 = \frac{D_1}{D};\quad n_2 = \frac{D_2}{D} \qquad \cdots\cdots(5.5)$$

Ｔ型梁の断面積は、

$$A = B_2D_2 + B_1D_1 = (nn_2 + n_1)B_1D \qquad \cdots\cdots(5.6)$$

となる。また、Z 軸に関する断面一次モーメントは、式(4. 6)を利用すると

$$S_Z = AY_0 \qquad \cdots\cdots(5.7)$$

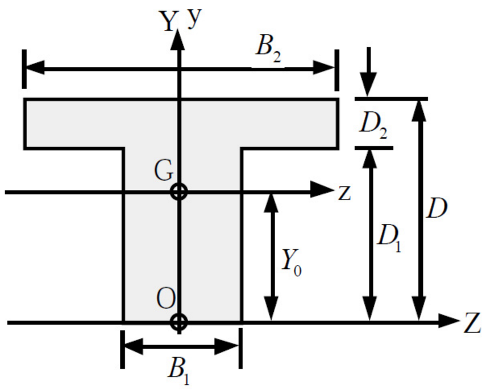


図 5-2 T 型断面の図芯位置

あり、Y_0 は Z 軸から断面の図芯位置までの距離である。上式を利用すると、S_Z は

$$\begin{aligned} S_Z &= B_2D_2(D_1 + 0.5D_2) + B_1D_1 \cdot 0.5D_1 \\ &= 0.5B_1D^2(nn_2(2n_1 + n_2) + n_1^2) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.8)$$

となる．従って、図芯までの距離 Y_0 は次式となる。

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{S_Z}{A} = \frac{0.5B_1D^2(nn_2(2n_1 + n_2) + n_1^2)}{(nn_2 + n_1)B_1D} \\ &= 0.5D\frac{(nn_2(2n_1 + n_2) + n_1^2)}{(nn_2 + n_1)} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.9)$$

例題5-3 次に示すＴ型断面の図芯位置を求めよ。

前の例題にしたがって各係数を求める。

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{120}{30} = 4 \\ n_1 &= \frac{88}{100} = 0.88 \\ n_2 &= \frac{12}{100} = 0.12 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5.10)$$

上の係数を式(5. 9)に代入することで、図芯位置 Y_0 が求められる。

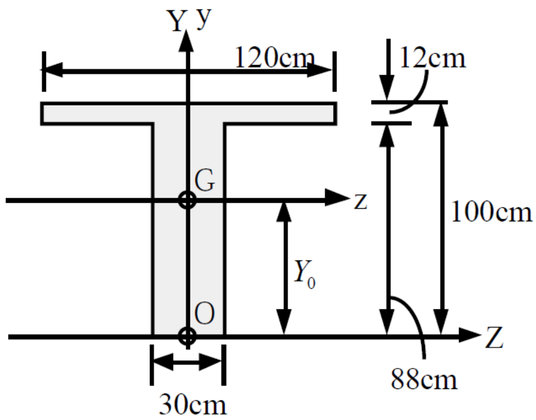


図 5-3 Ｔ型断面の図芯位置

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{Y_0}{A} = 0.5D\frac{(nn_2(2n_1+n_2)+n_1^2)}{(nn_2+n_1)} \\ &= 0.5\cdot 100\frac{(4\cdot 0.12(2\cdot 0.88+0.12)+0.88^2)}{(4\cdot 0.12+0.88)} \\ &= 50\frac{1.6768}{1.36} = 61.65cm \end{aligned} \quad\cdots\cdots(5.11)$$

5.3 断面二次モーメント

断面二次モーメントは既にでできたが、ここで再度、図芯位置での断面二次モーメントの定義式を示す。

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad\cdots\cdots(5.12)$$

以下では、例題を通して断面二次モーメントを求める演習を行い、具体的にその値を求める。

例題5-4 次のH形断面の図芯位置における断面二次モーメントを求めよ。

H 型断面は、図中の斜線を施したフランジと白抜き部分のウェブで構成されている。この断面は主に鋼で作られ、H 型鋼などと呼ばれる。H 型鋼に関する特徴を鉄骨の教科書で調べておこう。フランジ部分の z 軸に関する断面二次モーメント $_fI_z$ は、式(4. 17)を用いると、

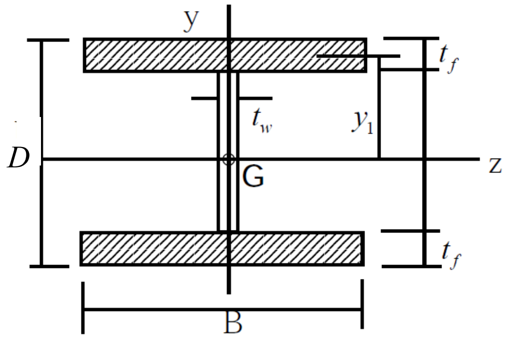


図 5-4 H 形断面の断面二次モーメント

$${}_fI_z = I_z + A_f y_1^2 = \frac{Bt_f^3}{12} + Bt_f\left(\frac{D-t_f}{2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots(5.13)$$

ここで、H 型断面の図芯位置とフランジ部分の図芯位置までの距離 y_1 は、

$$y_1 = \frac{D-t_f}{2} \qquad \cdots\cdots(5.14)$$

である。次にウェブ部分の断面二次モーメント ${}_wI_z$ は、長方形断面であることから、

$${}_wI_z = \frac{t_w(D-2t_f)^3}{12} \qquad \cdots\cdots(5.15)$$

で与えられる。従って、H 型断面の断面二次モーメントは次式となる。

$$\begin{aligned} {}_HI_z &= 2\,{}_fI_z + {}_wI_z \\ &= 2\left\{\frac{Bt_f^3}{12} + Bt_f\left(\frac{D-t_f}{2}\right)^2\right\} + \frac{t_w(D-2t_f)^3}{12} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.16)$$

例題 5-4 三角形断面の図芯位置での断面二次モーメントを求めよ。

三角形断面の下端から図芯位置までの距離は、例題 5-2 によって求められている。これを利用して図芯位置での断面二次モーメントを式(5. 12)より求める。まず、下端から図芯までの距離 Y_0、並びに断面積 A は、

$$Y_0 = \frac{h}{3} \qquad A = \frac{bh}{2} \qquad \cdots\cdots(5.17)$$

であり、また、Z 軸に関する断面二次モーメント I_Z は、例題 5-2 を参照すると次式で与えられる。

$$I_Z = \int_0^h b\left(1-\frac{Y}{h}\right)Y^2 dY \qquad \cdots\cdots(5.18)$$

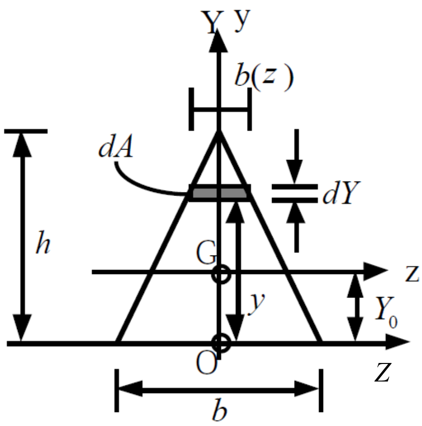


図 5-5 三角形断面の断面二次モーメント

上式の積分を実行すると、

$$I_Z = \left[b\left\{\frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4h}\right\}\right]_0^h = b\left\{\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right\} = \frac{bh^3}{12} \qquad \cdots\cdots(5.19)$$

となり、式(4. 17)を利用すると、図芯位置での断面二次モーメントは、以下のように与えられる。

$$I_z = I_Z - Y_0^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} \qquad \cdots\cdots(5.20)$$

例題 5-5 H 形断面の断面二次モーメントを求めよ。

H 型断面の断面二次モーメントを、例題 5-4 と異なった方法で求める。

H 型断面の断面二次モーメントは、長方形断面 BD の断面二次モーメントから、斜線で示した長方形断面の断面二次モーメントを引くことによって得られる。

$$I_z = \frac{BD^3}{12} - \frac{(B-t_w)(D-2t_f)^3}{12} \qquad \cdots\cdots(5.21)$$

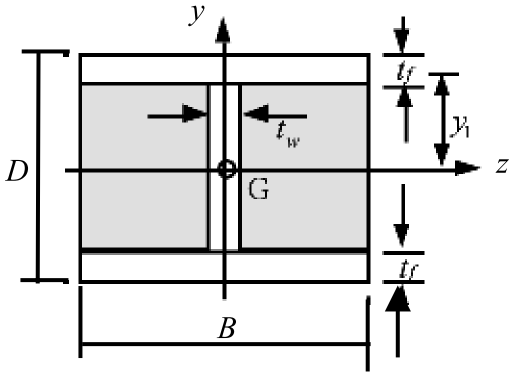


図 5-6 H 形断面の断面二次モーメント

ここでは、H 形断面 H-400x200x8x13 を用いて、具体的に式(5.16)と(5.21)が同じ値となることを確かめる。その中で式(5.16)の{}の第 2 項の値は、断面二次モーメントの値に対し、どのような割合になっているか計算し、その意味を検討する。

式(5.21)より、H 形断面の断面二次モーメントは

$$I_z = \frac{20\cdot 40^3}{12} - \frac{(20-0.8)(40-2\cdot 1.3)^3}{12}$$
$$= 106666.7 + 83701.8 = 22964.9cm^4 \qquad \cdots\cdots(5.22)$$

となり、また、式(5.16)より、

$$I_z = 2\left\{\frac{20\cdot 1.3^3}{12} + 20\cdot 1.3(\frac{40-1.3}{2})^2\right\} + \frac{0.8(40-2\cdot 1.3)^3}{12}$$
$$= 2\{3.7 + 9735.0\} + 3487.6 = 22965.0cm^4 \qquad \cdots\cdots(5.23)$$

となる。両者の値は一致する。

フランジの部分の断面二次モーメントは、式(5.23)の{}内の第二項の値は、

$$_f I_z = 2\cdot 9735.0 = 19470.0 \qquad \cdots\cdots(5.24)$$

となり、断面全体の断面二次モーメントの 85%を占め、フランジ部分の断面が曲げ剛性に大きく影響していることが分かる。

曲げモーメントから断面の縁応力、つまり、その断面内の最大応力を求めるためには、断面係数が必要となる。この断面係数は、

$$Z_t = \frac{I_z}{y_t} \qquad Z_c = \frac{I_z}{y_c} \qquad \cdots\cdots(5.25)$$

で与えられる。ただし、z 軸に対し、断面が対称である場合は、断面係数は同一となる。ここでは、例題を通して、断面係数を具体的に求め、断面内の応力状態を求めてみよう。

例題 5-6 次に示すＴ形断面の断面係数を求めよ。

最初に、Ｔ型梁の断面二次モーメントを求める。図芯位置は、例題 9-4 で既に求めている。

$$Y_0 = 61.65cm \qquad \cdots\cdots(5.26)$$

この位置を図芯とし、断面二次モーメントは式(4.17)を利用して、

$$I_z = \frac{120\cdot 12^3}{12} + 120\cdot 12(100-61.65-6)^2 + \frac{30\cdot 88^3}{12} + 30\cdot 88(61.65-44)^2 = 4.05\cdot 10^6 cm^4 \qquad \cdots\cdots(5.27)$$

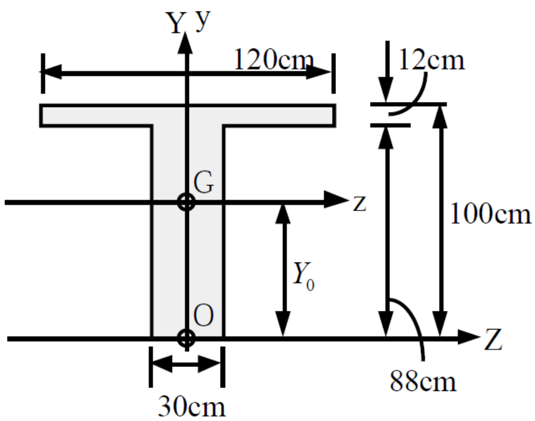


図 5-7 T 型断面の断面係数

として与えられる。従って、断面係数は(5.25)式より

$$Z_t = \frac{I_z}{61.65} = \frac{4.05\cdot 10^6}{61.65} = 6.57\cdot 10^4 cm^3$$

$$Z_c = \frac{I_z}{100-61.65} = \frac{4.05\cdot 10^6}{38.35} = 10.56\cdot 10^4 cm^3 \qquad \cdots\cdots(5.28)$$

例題 5-7　次に示す長方形断面（幅 30cm、せい 60cm）に、曲げモーメント 50kNm が生じている。この断面内に発生している最大応力を求めよ。

最初に、この断面の断面特性を計算する。

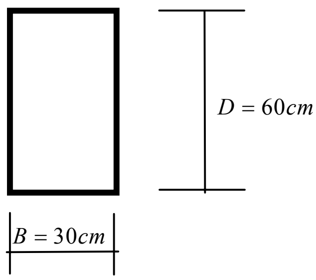


図 5-8a 長方形断面

$$
\left.\begin{aligned}
&A = 30 \cdot 60 = 1800cm^2 \\
&I_z = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000cm^4 \\
&Z_c = Z_t = \frac{540000}{30} = 18000cm^3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.29)
$$

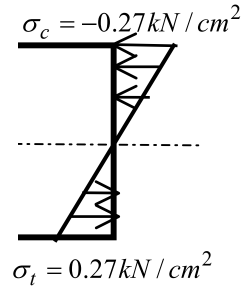


図 5-8b 断面内応力分布

断面の最大応力は、断面の縁部に発生し、断面上部の最大圧縮応力と、断面下部の最大引張応力は、以下のように求められる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_c = -\frac{M}{Z_c} = -\frac{50 \cdot 100}{18000} = -0.27kN/cm^2 \\
&\sigma_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{50 \cdot 100}{18000} = 0.27kN/cm^2
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.30)
$$

例題 5-8　次に示す円形断面（半径 R=20cm）に、圧縮力 500kN と曲げモーメント 50kNm が生じている。この断面内に発生している最大応力を求めよ。

円形断面の断面性能を求める。

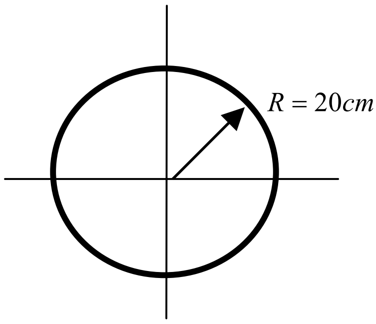


図 5-9a 円形断面

$$
\left.\begin{aligned}
&A = \pi R^2 = 3.1415 \cdot 20^2 = 1256.6cm^2 \\
&I_z = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3.1415 \cdot 20^4}{4} = 125660cm^4 \\
&Z_c = Z_t = \frac{125660}{4} = 31415cm^3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.31)
$$

断面の最大応力は、断面の縁部に発生し、断面上部に現れる。
一方、断面下部では、圧縮力が大きいため、引張応力が発生せず、以下のように圧縮応力となる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c} = -\frac{500}{1256.6} - \frac{50 \cdot 100}{31415} = -0.398 - 0.159 = -0.557kN/cm^2 \\
&\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = -\frac{500}{1256.6} + \frac{50 \cdot 100}{31415} = -0.398 + 0.159 = -0.239kN/cm^2
\end{aligned}\right\}\cdots(5.32)
$$

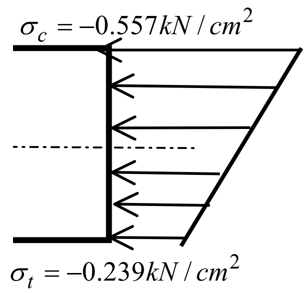


図 5-9b 断面内応力分布

5.5 課題

本章の課題は、鉄骨断面の断面性能を求めることと、その断面性能を用いて、断面内に発生する最大応力を求めることである。解析モデルは、

第４章で使用した単純梁を用いる。また、断面は以下の示すH型断面と角型鋼管とする。H型断面は、H-400x200x8x13とする。また、角型鋼管は、□300x300x6x15とする。

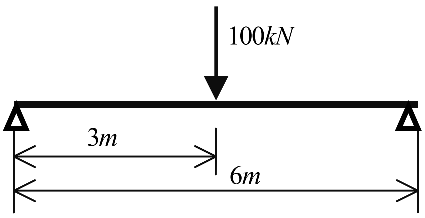


図 5-10 課題の骨組

最初に、部材中央に生じる最大曲げモーメントを求めておこう。

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = \frac{100 \cdot 6}{4} = 150kN \cdot m = 15000kN \cdot cm \qquad \cdots\cdots(5.33)$$

H型断面の断面性能：

$$A = 20 \cdot 40 - (20-0.8)(40-2 \cdot 1.3) = 81.9cm^2$$

$$I = \frac{20 \cdot 40^3 - (20-0.8)(40-2 \cdot 1.3)^3}{12} = 22964.9cm^4$$

$$Z = \frac{22964.9}{20} = 1148.2cm^3$$

角型鋼管の断面性能：式(4.33)より

$$A = 30^2 - (30-2 \cdot 0.6)^2 = 70.56cm^2$$

$$I = \frac{30^4 - (30-2 \cdot 0.6)^4}{12} = 10169.1cm^4$$

$$Z = \frac{10169.1}{15} = 677.9cm^3$$

従って、両断面内に生じる最大応力は、以下のように与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} \text{H型断面：}\ \sigma_{\max} = \dfrac{M}{Z} = \dfrac{15000}{1148.2} = 13.06kN/cm^2 \\ \text{角型鋼管：}\ \sigma_{\max} = \dfrac{M}{Z} = \dfrac{15000}{677.9} = 22.13kN/cm^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(5.34)$$

5.6 モデラーで解析モデルを作成する

SPACE のモデラーを用いて、上記の解析モデルをコンピュータ内に作成する。ここで作成する解析モデルは、第４章で使用したモデルと断面を除いて同じである。復習のために読者は新規に作成しても良いし、第４章の解析結果を保存しているフォルダをコピーしても良い。ここでは、第４章と異なる断面作成部分について説明する。

モデラーを起動し、要素データの設定ツールチップを押し、次のダイ

アログを標示させる。鉄骨断面を使用するため、材料は SS400 とし、また、両端ファイバーモデルを使用する。

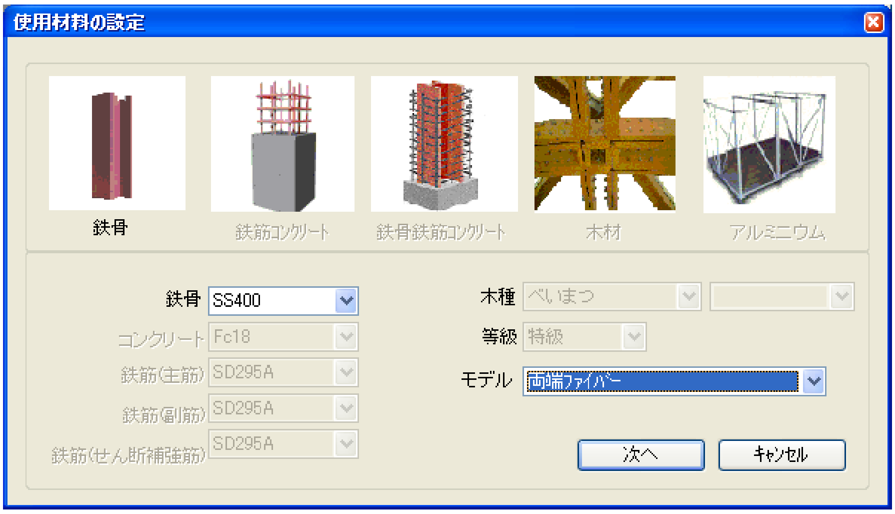
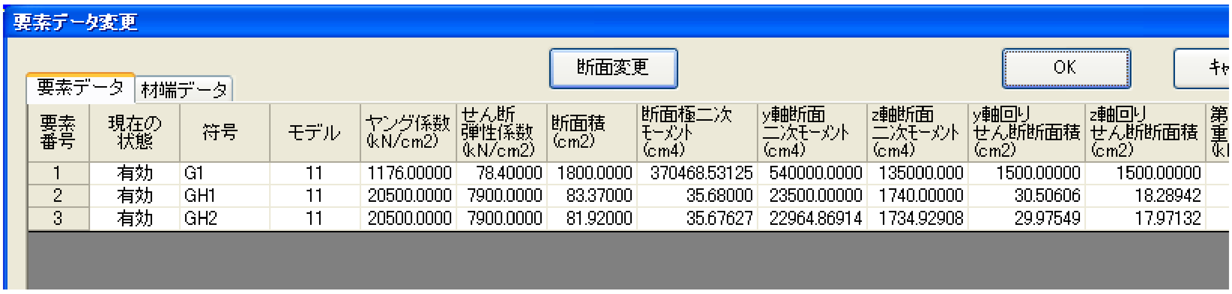


図 5-11 使用材料の設定

図 5-12 で、鉄骨の材料断面・設定ダイアログで、使用する H 型断面を作成する。断面は、H-400x200x8x13 であり、図 5-12a ではデータベースの値を使用し、同図 b では内部計算を用いて作成する。

図 5-12 鉄骨断面の設定
a:データベースの値使用
b ：内部計算使用

この２種の断面を作成した理由は、データベースに保存されている各断面の性能は鉄骨メーカーの公証性能であり、断面が多少ずれていることから正確に計算した値と異なることを理解するためである。両者の断面性能は、図 5-13 に示される要素データ変更ダイアログを見ることによって理解できる。



要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm2)	せん断弾性係数 (kN/cm2)	断面積 (cm2)	断面極二次モーメント (cm4)	y軸断面二次モーメント (cm4)	z軸断面二次モーメント (cm4)	y軸回りせん断断面積 (cm2)	z軸回りせん断断面積 (cm2)
1	有効	G1	11	1176.00000	78.40000	1800.0000	370468.53125	540000.0000	135000.000	1500.00000	1500.00000
2	有効	GH1	11	20500.0000	7900.0000	83.37000	35.68000	23500.00000	1740.00000	30.50606	18.28942
3	有効	GH2	11	20500.0000	7900.0000	81.92000	35.67627	22964.86914	1734.92908	29.97549	17.97132

図 5-13 要素データ変更ダイアログで使用する断面の断面性能を検証する

内部計算で求めた H 型断面 GH2 の断面性能は、先に計算した断面性能と同一であるが、データベースの値は、断面積も断面二次モーメントも少し大きな値となっている。図 5-14 には、H 型断面をソリッド表示して、断面形状を確認する。

解析モデルを完全に作成した後、線形解析を実施し、プレゼンターで断面内の応力状態を分析する。図 5-15 には、曲げモーメント分布、部材の変形状態、部材中央部の断面内の応力状態、最後に、フランジブ部の応力が

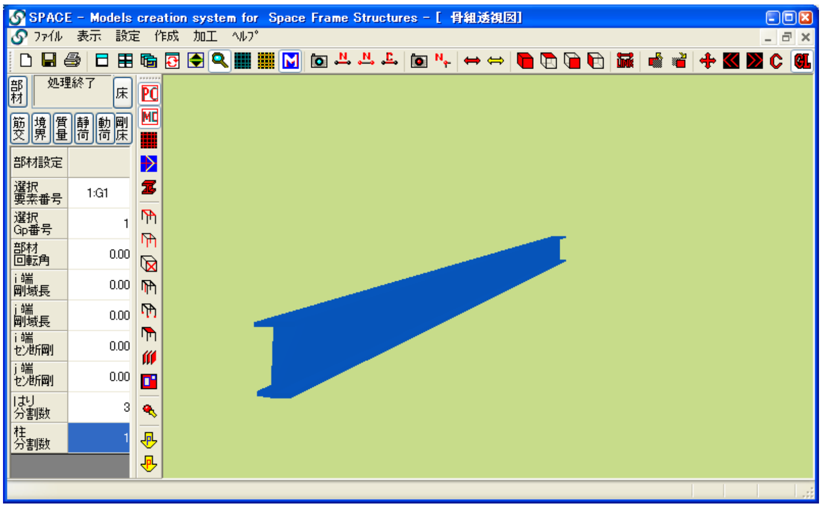


図 5-14 H 型断面のソリッド表示

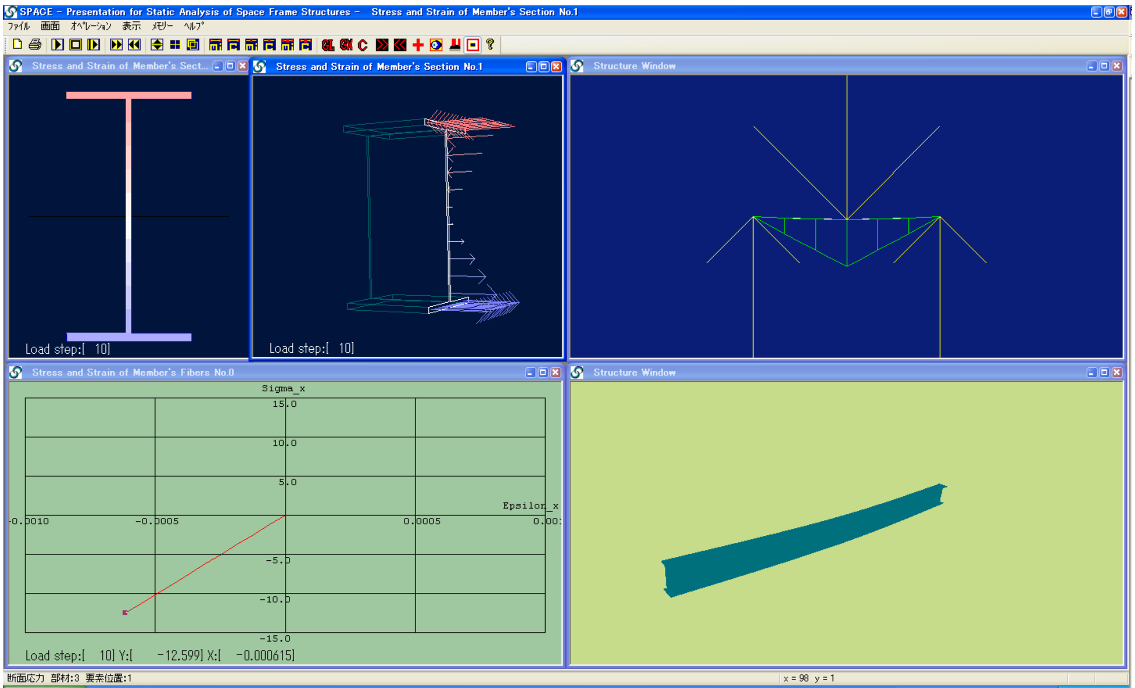


図 5-15 プレゼンターによる部材内部に生じる応力を分析する

表示されている。これらを利用して部材内に発生する応力状態を良く理解されたい。

次に、課題２の解析モデルを作成する。課題１のフォルダをコピーして課題２とする。また、ここでは、課題１の操作とほとんど同じであるため、断面作成部分のみダイアログを表示する。使用する角型鋼管は、□300x300x6x15とする。課題１と同様に、データベースの値と、内部計算の値を比較するため、２種の断面を作成する。

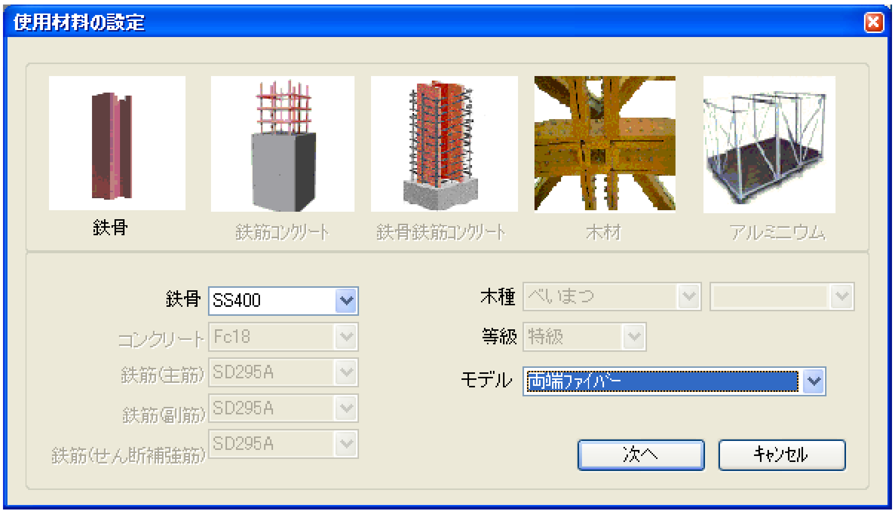


図 5-16 使用材料の設定

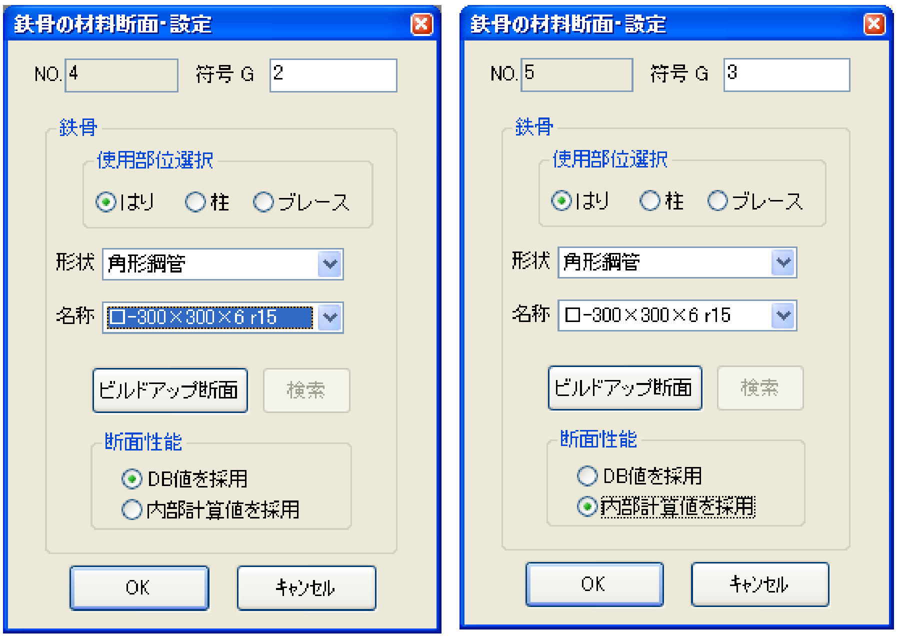
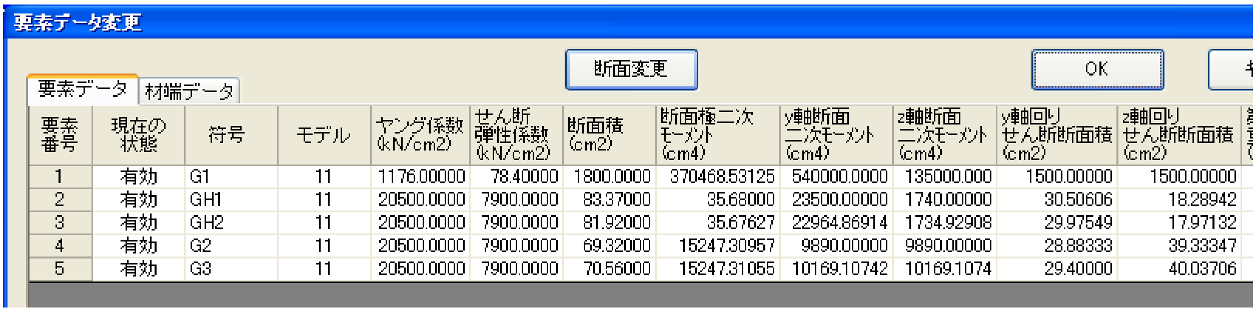


図 5-17 鉄骨断面の設定
a:データベースの値使用
b：内部計算使用

要素データ変更ダイアログを利用して、２つの断面の断面性能を比較すると、図 5-18 で分かるように、内部計算の G2 断面の断面積と断面二次モーメントは、先に計算した値と同一となっている。データベースの

値は、H 型断面とは逆に、断面積、断面二次モーメント共に小さい値となっている。



要素データ変更

断面変更　OK

要素データ　材端データ

要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm2)	せん断弾性係数 (kN/cm2)	断面積 (cm2)	断面極二次モーメント (cm4)	y軸断面二次モーメント (cm4)	z軸断面二次モーメント (cm4)	y軸回りせん断断面積 (cm2)	z軸回りせん断断面積 (cm2)
1	有効	G1	11	1176.00000	78.40000	1800.0000	370468.53125	540000.0000	135000.000	1500.00000	1500.00000
2	有効	GH1	11	20500.0000	7900.0000	83.37000	35.68000	23500.00000	1740.00000	30.50606	18.28942
3	有効	GH2	11	20500.0000	7900.0000	81.92000	35.67627	22964.86914	1734.92908	29.97549	17.97132
4	有効	G2	11	20500.0000	7900.0000	69.32000	15247.30957	9890.00000	9890.00000	28.88333	39.33347
5	有効	G3	11	20500.0000	7900.0000	70.56000	15247.31055	10169.10742	10169.1074	29.40000	40.03706

図 5-18 要素データ変更ダイアログで使用する断面の断面性能を検証する

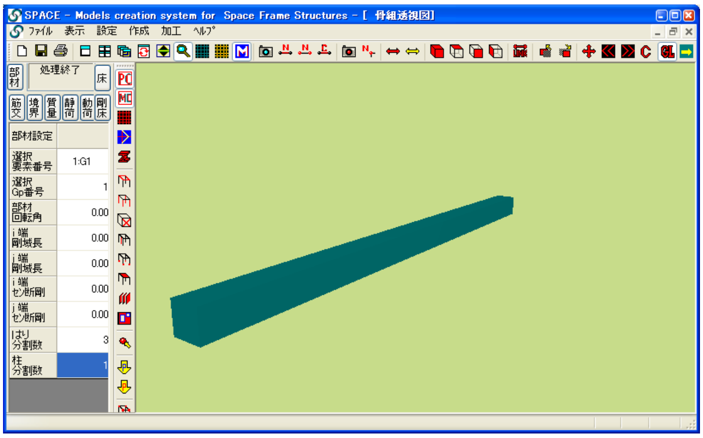


図 5-19 型断面のソリッド表示

図 5-14 には、H 型断面をソリッド表示して、断面形状を確認する。

解析モデルを完全に作成した後、線形解析を実施し、プレゼンターで断面内の応力状態を分析する。図 5-15 には、曲げモーメント分布、部材の変形状態、

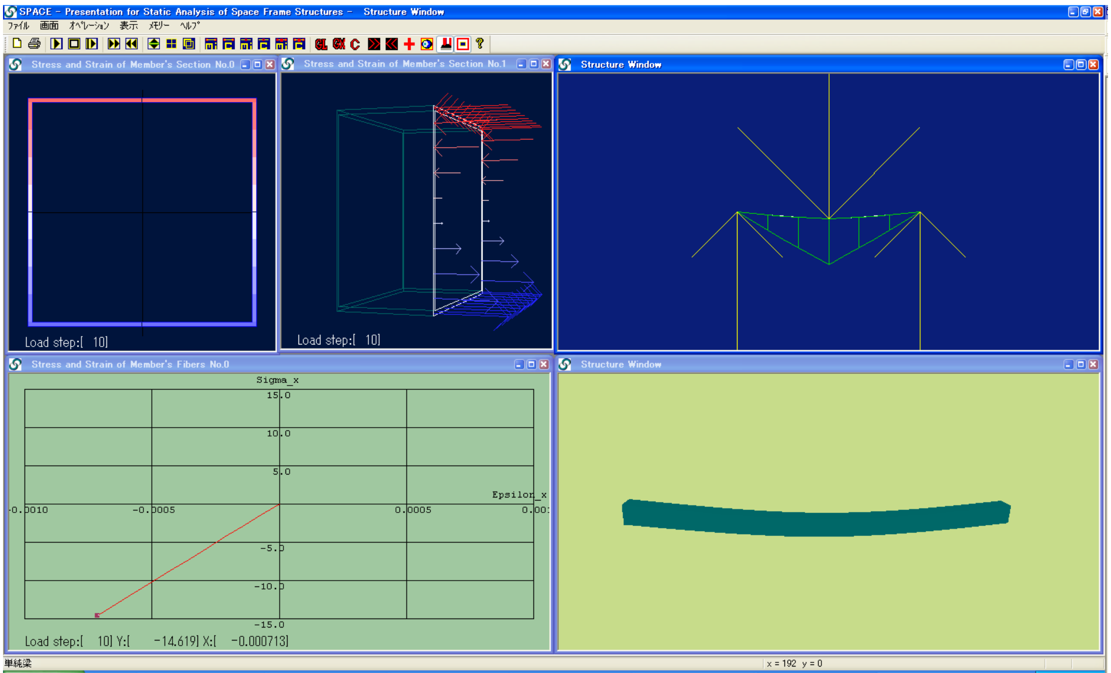


図 5-20 プレゼンターによる部材内部に生じる応力を分析する

部材中央部の断面内の応力状態、最後に、フランジ部の応力が表示されている。

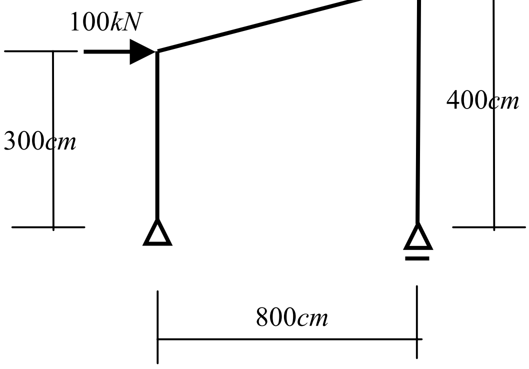
5.7 まとめ

建築構造で使用される断面を用いて、断面性能の値を具体的に求めた。演習を行うことで、各種の断面に関する性能を計算することできる。

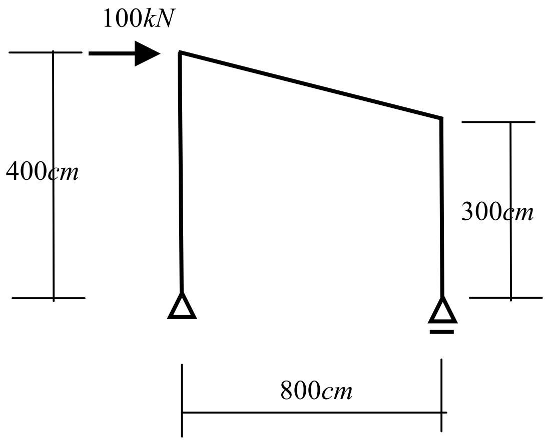
演習した断面を、SPACE を用いて数値計算し、理論的に求めた断面特性を比較した。

5.8 問題

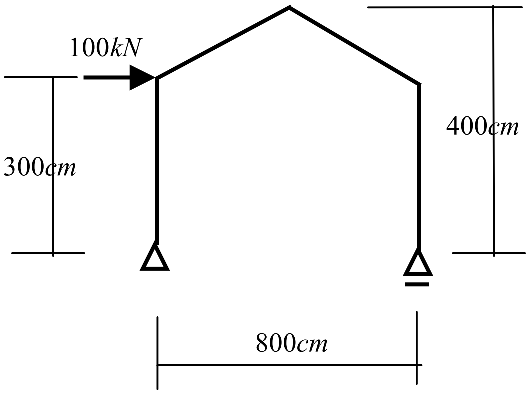
問5-1 次に示す静定構造物について、SPACEを用いて静的応力解析（線形解析）を実行しなさい。また、実際に手を使って解析し、両者の断面内の応力値を比較しなさい。鋼材はSS400を使用し、部材断面として、柱・梁ともH-450x200x9x14を使用する。



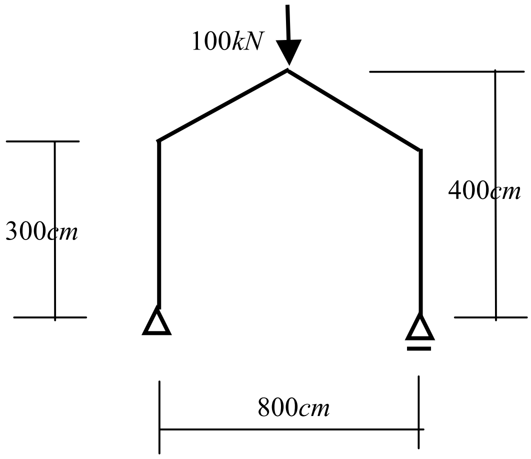
問 5-1



問 5-2



問 5-3



問 5-4