第６章　梁のせん断応力

ポイント：梁のせん断応力分布を考える
断面内部の応力による力の釣合からせん断応力分布を求める

6.1 はじめに

梁が曲げられるとき、曲げモーメントによる軸方向応力と同時にせん断応力も発生する。本章では、その際に断面内部に生じるせん断応力分布を断面内の応力の釣合より求める。特に、長方形断面では、断面内部のせん断応力分布が放物線となることを示す。また、梁理論の代表であるベルヌーイ・オイラー梁では、せん断応力は発生するが、せん断ひずみは生じないことを説明する。

キーワード
せん断応力　せん断変形　モールの応力円　断面力の釣合　単純梁の応力　片持ち梁の応力

6.2 断面内のせん断応力

6.2.1 矩形断面内のせん断応力分布

本節では、曲げモーメントによって生じる断面内のせん断応力を求める。曲げモーメントによる梁断面内のせん断応力分布を求めるために、まず、図 6-1 の矩形断面を材軸方向に dx の幅で切断し、その断面内の応力状態を考える。構造力学初学者には少し難しいが、吹き出しなどを参考に、学習されたい。

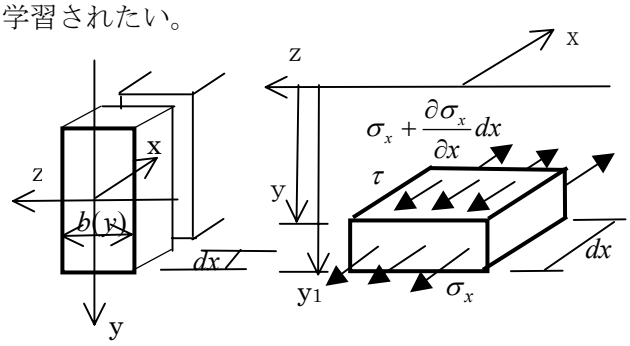


図 6-1 断面内応力

ここで、さらにこの切り出した断面を y より断面端部の y_1 まで切断し、その断面における x 方向の力の釣合を次のように求める。ただし、断面が矩形であることから、応力分布は幅方向に一定(一様)である。

$$-\int_y^{y_1}\int_0^{b(y)} \sigma_x dz dy - \int_0^{b(y)} (\tau dx) dz + \int_y^{y_1}\int_0^{b(y)} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dz dy = 0 \quad \cdots(6.1)$$

断面に沿うせん断応力分布を知るため、まず図 6-1 に示す x 軸方向のせん断応力を求める。このせん断応力は図 6-1 のように梁を微小部分で切断し、x 方向の力の釣合より求められる。この微小部分では両側面と下面には外力はなく、切断面に働く応力が生じており、この応力による合力の釣合状態を仮定する。
式(6.1)で第 1 項は図 6-1 の前方側面、第 3 項は後方側面の軸方向応力による合力であり、第 2 項は、上面に沿うせん断応力である。

次に、軸方向応力が幅方向では一定であることを考慮して、z 軸方向の積分を行い、dx で割った後、上式を整理すると次式が得られる。

$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1} \int_0^{b(y)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz dy = \int_y^{y_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b(y) dy \qquad \cdots\cdots(6.2)$$

ここで、$b(y)$ は y 位置の断面幅を示すが、実際は矩形断面であることから定数 b となる。一方、軸方向ひずみは平面保持の仮定より、また、座標原点が断面の中心にあることから次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y \qquad \cdots\cdots(6.3)$$

ここで、ε_0 は断面内のひずみの平均値であり、また κ は曲げによる曲率で、κy は曲げひずみと呼ばれる。応力とひずみの関係は弾性であるとすると、弾性係数 E を用いて軸方向応力 σ_x は次式で表される。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\varepsilon_0 + E\kappa y \qquad \cdots\cdots(6.4)$$

軸方向応力を断面について積分すると、断面力である軸力 N と曲げモーメント M が次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = \varepsilon_0 EA; \quad A = \int_A dA \\ M &= \int_A y\sigma_x dA = \kappa E \int_A y^2 dA = \kappa E I_z; \quad I_z = \int_A y^2 dA \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.5)$$

ここで、A は断面積を、また I_z は z 軸に関する断面二次モーメントを示す。また、座標の原点は断面の図芯位置であることから、断面一次モーメントはゼロとなる。

上式より式(6.3)の軸方向ひずみと曲げひずみが決まる。

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA}; \quad \kappa = \frac{M}{EI_z} \qquad \cdots\cdots(6.6)$$

上式を式(6.4)に代入すると断面内の軸方向応力が決定される。

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y \qquad \cdots\cdots(6.7)$$

断面内の応力を式(6.2)に代入し、同式を評価するために、まず、

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{y}{I_z}\frac{dM}{dx} = \frac{y}{I_z} Q; \quad \frac{dM}{dx} = Q \qquad \cdots\cdots(6.8)$$

を求め、これを式(6.2)に代入することで、切断した断面における x 方

式(6.2)では、軸方向応力の x に関する微分が必要となる。そこで、式(6.7)の用いて、軸方向応力の微分を求める。この式(6.7)において、x の関数は曲げモーメントのみであることを考慮すると式(6.8)が得られる。

向の釣合式を評価する。

$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1} \frac{yQ}{I_z} b(y) dy = \frac{Q}{I_z} S(y); \quad S(y) = \int_y^{y_1} yb(y) dy \qquad \cdots\cdots(6.9)$$

ここで、$S(y)$ は z 軸に関する y より外の断面の断面一次モーメントを表す。

式(6.9)の右辺においてせん断応力が断面幅 $b(y)$ で一定であると仮定すると、幅方向の積分は単純で、せん断応力は次のように求められる。なお、一様でない場合には平均値が算出され、最大値はそれよりも大きい値となる。

式(6.10)が曲げモーメントを受ける梁のせん断応力分布を表す。当然、せん断力 Q がゼロの場合は、せん断応力もゼロとなる。同式から分るように、せん断応力は断面二次モーメントと断面幅に逆比例し、y より外の z 軸に関する断面１次モーメントに比例する。

$$\tau = \frac{Q}{I_z b(y)} S(y) \qquad \cdots\cdots(6.10)$$

ここで、図 6-2 に示す微小な四角におけるせん断応力の釣合を考える。四角中央を原点にモーメントの釣合は、

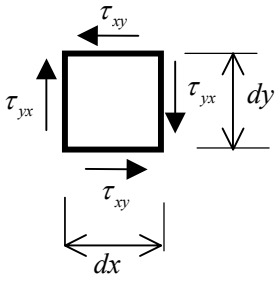


図 6-2 せん断応力の釣合

$$\begin{aligned} &\tau_{yx} dy \frac{dx}{2} + \tau_{yx} dy \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dx \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx \frac{dy}{2} = 0 \\ &\tau_{yx} dy dx = \tau_{xy} dx dy \\ &\tau_{yx} = \tau_{xy} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.11)$$

せん断応力の釣合から、断面せい方向のせん断力が得られる。

となり、式(6.10)で求めた水平方向のせん断応力は直交する断面せい方向のせん断応力に等しいことが分かる。このことから、式(6.10)によって断面に沿うせん断応力が求められることになる。

次に、例として梁幅 b でせい D の矩形断面のせん断応力分布を求めてみよう。まず、$S(y)$ を式(6.9)に従って次のように求める。

矩形断面のせん断応力分布
曲げモーメントによるせん断応力分布を求めるためには、y より外の z 軸に関する断面１次モーメントが必要となる。

$$\begin{aligned} S(y) &= \int_y^{\frac{D}{2}} ybdy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_y^{\frac{D}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \\ &= \frac{bD^2}{8}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.12)$$

上式を式(6.10)に代入すると、矩形断面のせん断応力分布が求められる。

$$\tau(y) = \frac{Q}{I_z b}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)\frac{bD^2}{8} = \frac{3Q}{2A}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right) \qquad \cdots\cdots(6.13)$$

曲げモーメントによって生じる矩形断面のせん断応力分布は、断面の上端と下端でゼロ、中央で最大となる放物線である。また、最大せん断応力は式(6.13)に $y = 0$ を代入すると、次式のように平均せん断応力の 1.5

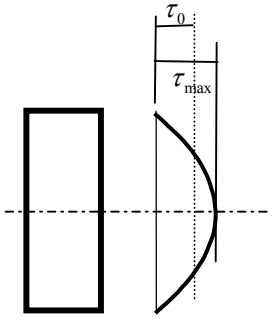


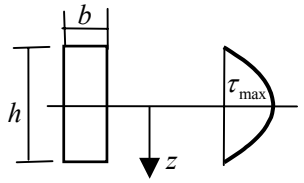
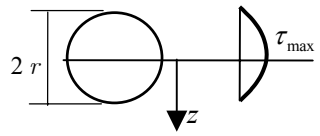
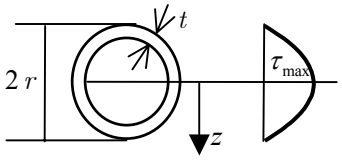
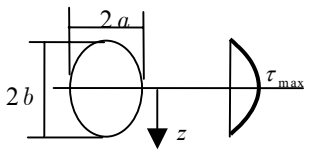
図 6-3 矩形断面内のせん断応力

倍となる。

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = k\tau_0; \quad k = 1.5; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A} \qquad \cdots\cdots(6.14)$$

側面が y 方向に平行な断面、つまり矩形断面やH形断面のウェッブ部、薄肉パイプの中立軸近くでは、式(6.10)は成立するが、その他の断面や部位では、面外のせん断応力が $\tau_{xz} \neq 0$ に、また面内のせん断応力 τ_{xy} が幅方向に一定とならず、同式は成立しない。しかし、無理に同式により平均せん断応力と最大せん断応力の倍率 k を求めると、下界（それ以下ではありえない値）が算出されることになる。同様の方法で求めた代表的な断面に関するせん断応力分布が表 6-1 に示されている。

表 6-1 曲げに伴うせん断応力分布

断面	せん断応力	k の最大値
	$\frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\{1-(\frac{2z}{h})^2\}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2}\{1-(\frac{z}{r})^2\}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{Q}{\pi rt}\{1-(\frac{z}{r})^2\}$	2
	$\frac{4}{3}\frac{Q}{\pi ab}\{1-(\frac{z}{a})^2\}$	$\frac{4}{3}$

6.2.2 薄肉断面で構成された断面のせん断応力分布

最初に、曲げモーメントによって生じるＨ型断面内のせん断応力分布を、前節で解説した古典的な方法で求めた結果について説明しよう。ここでは、フランジ部分に一様なせん断応力が発生するとして断面全体のせん断応力分布を決めている。式(6.10)によってせん断応力が決定されるが、その式中で断面二次モーメントはＨ型断面の値を用い、また、$b(y)$はフランジとウェッブで変更することになる。さらに、式(6.12)でz軸に関するyより外の断面の断面一次モーメント$S(y)$も、フランジとウェッブに分けて計算する。

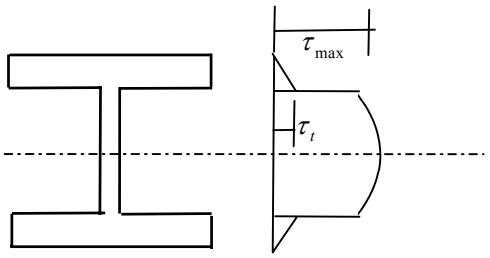


図 6-4 Ｈ型断面せん断応力分布

上記によって求めた代表的な H 型断面のせん断応力分布を図 6-4 に示す。同図より分かるように、式(6.10)で得られたせん断応力分布には矛盾がある。フランジの内端にはせん断応力が発生しているが、このせん断応力に対応する外力が存在しない。また、フランジとウェッブに大きな応力の不連続があり、応力の連続性がどのように成立しているか説明できていない。このように薄肉断面で構成された断面では、式(6.10)で求められる古典的なせん断応力分布には矛盾があり、説明がつかない結果が得られることになる。

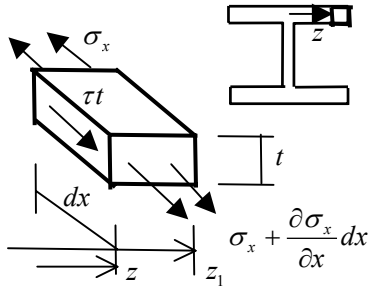


図 6-5 せん断流れ理論による釣合

これらの矛盾を解決するために、せん断流れの仮定による理論がある。肉厚tの薄肉断面では、せん断応力は断面内一様に大きさτtで、断面内を軸線に沿って流れ、その方向は断面内の中心線に一致するという考えである。

この理論に従って、図 6-5 を参考に、フランジ部をzから端部のz_1まで切り出し、その切断部分におけるx方向の力の釣合を考える。

$$-\int_z^{z_1}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dydz - \tau t dx + \int_z^{z_1}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz = 0$$

$$\tau t dx = \int_z^{z_1}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz$$

$$\tau t = \int_z^{z_1}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}) dydz \qquad \cdots\cdots(6.15)$$

フランヂ部の一部を切断し、せん断流れ理論に従って、せん断応力分布を決定する。式(6.15)の第１項は図 6-5 の後方側面、第 3 項は前方側面の軸方向応力であり、第 2 項は切断部のせん断応力である。このせん断応力は、流れ理論によって、断面内は一様の応力τに微小断面tdxの積によって求められる。

上式において、曲げモーメントによって生じる軸方向応力の分布はフランジ部分の断面が薄いので断面内では一定とすると、y軸に関する積分値はtとなり、結果、次式となる。

$$\tau t = \int_z^{z_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} t dz \qquad \cdots\cdots(6.16)$$

ここで、式(6.8)を上式に代入すると、フランジ内のせん断応力分布が

次のように得られる。

$$\tau t = \int_z^{z_1} \frac{Q}{I_z} ytdz = \frac{Q}{I_z} S'(y); \quad S'(y) = \int_z^{z_1} ytdz = yt(z_1 - z)$$

$$\tau = \frac{Qy}{I_z}(z_1 - z) \qquad \cdots\cdots(6.17)$$

ただし、ウェッブのせん断応力は式(6.13)で求められることから、せん断応力の最大値は同式から得られる。

このせん断流れ理論によると、H 型断面におけるせん断応力は、図 6-6 のようになる。

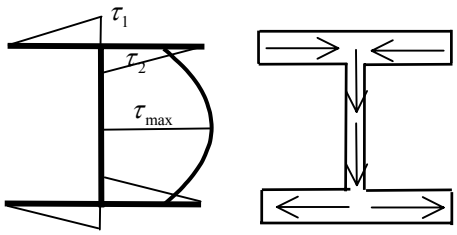


図 6-6 せん断流れ理論による H 型断面せん断応力分布

6.2.3 薄肉断面で構成された非対称断面におけるせん断応力とせん断中心

本節では、非対称の形状を有する溝型断面のせん断応力分布について考える。図 6-7 のように断面幅 b、せい D で、フランジの板厚 t_f、ウェッブの板厚 t_w の溝型断面に、曲げモーメントが作用している場合のせん断応力分布を求める。断面上側のフランジ部のせん断応力は、先端部分でせん断応力がゼロとなるように、z_1 を b とすると、式(6.18)で求められる。また、同式の y は図の原点からの距離であり、$D/2$ となる。

$$\tau_f = \frac{Qy}{I_z}(z_1 - z) = \frac{QD}{2I_z}(b - z) \qquad \cdots\cdots(6.18)$$

フランジ部のせん断応力の最大値はウェッブとの交点に現れ、その値は

$$\tau_{f\max} = \frac{QDb}{2I_z} \qquad \cdots\cdots(6.19)$$

となる。また、その位置におけるせん断応力の断面全体の積分値は $t_f \tau_{f\max} = QDbt_f/(2I_z)$ となる。

次に、ウェッブ部のせん断応力を求める。原点をウェッブ部分の中央にとると、せん断応力は式(6.13)より次式となる。ここで、式(6.13)での b が t_w に変わることとせん断流れの仮定よりフランジ部分のせん断応力が次式右辺の最後の項に加えられることに注意されたい。

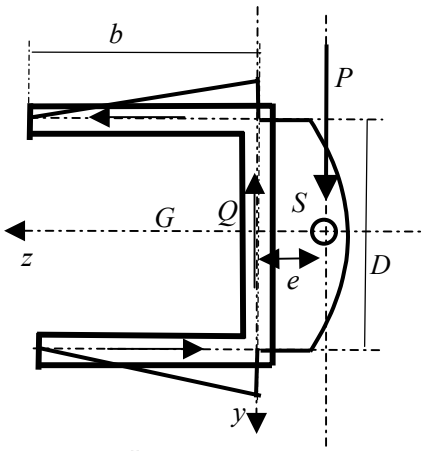


図 6-7 溝型断面のせん断応力分布とせん断中心

$$\tau_w(y) = \frac{Q}{I_z t_w}\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)\frac{t_w D^2}{8} + \frac{QDbt_f}{2I_z t_w}$$

$$= \frac{Q}{I_z t_w}\left\{\left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)\frac{t_w D^2}{8} + \frac{Dbt_f}{2}\right\} \qquad \cdots\cdots(6.20)$$

ウェッブ部のせん断応力の最大値は断面中央に生じるため、上式に $y=0$ を代入することで次のように得られる。

$$\tau_{w\max}=\frac{Q}{I_z t_w}\left(\frac{t_w D^2}{8}+\frac{Dbt_f}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(6.21)$$

最後に、断面下側のフランジのせん断応力分布を求める。先端部でせん断応力がゼロであることと、ウェッブ部のせん断応力との釣合を考慮すると、下側のフランジのせん断応力は次式で与えられる。

$$\tau_f=\frac{Qy}{I_z}(z-z_1)=-\frac{QD}{2I_z}(b-z) \qquad \cdots\cdots(6.22)$$

次に、フランジ部とウェッブ部のせん断力をそれぞれ求めてみよう。まず、ウェッブ部のせん断力 Q_w は、次のようにせん断応力をウェッブ断面全体について積分することで求められる。

$$\begin{aligned}Q_w&=2\int_0^{\frac{D}{2}} t_w\tau_w(y)dy=2\frac{Q}{I_z}\left(\int_0^{\frac{D}{2}}\left(1-\left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)\frac{t_w D^2}{8}dy+\frac{D}{2}bt_f\int_0^{\frac{D}{2}}dy\right)\\&=2\frac{Q}{I_z}\left(\frac{t_w D^2}{8}\left[y-\frac{4y^3}{3D^2}\right]_0^{\frac{D}{2}}+\frac{bD^2t_f}{4}\right)=2\frac{Q}{I_z}\left(\frac{t_w D^2}{8}\left(\frac{D}{2}-\frac{D}{6}\right)+\frac{bD^2t_f}{4}\right)\\&=\frac{Q}{I_z}\left(\frac{t_w D^3}{12}+\frac{bD^2t_f}{2}\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.23)$$

ここで、溝型断面の断面二次モーメントは次式で与えられる。ただし、フランジの板厚は薄いため、フランジの板厚中心位置に関する断面二次モーメントは無視される。

$$I_z=\left(\frac{t_w D^3}{12}+2\frac{bD^2t_f}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(6.24)$$

上式を式(6.23)に代入すると、ウェッブ部分のせん断力 Q_w が外力 Q と釣合うことを理解できる。

一方、上側のフランジ部のせん断力 Q_f は、ウェッブ部と同様に、式(6.18)を次式のように積分することで求められる。

$$\begin{aligned}Q_f&=\int_0^b t_f\tau_f dz=\frac{QDt_f}{2I_z}\left[bz-\frac{z^2}{2}\right]_0^b=\frac{QDt_f}{2I_z}\left(b^2-\frac{b^2}{2}\right)\\&=\frac{QDb^2t_f}{4I_z}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.25)$$

式(6.22)のせん断応力から分かるように、フランジ部のせん断力は互いに方向が逆であるため偶力となり、断面を捩じるようなモーメントを発

生させる。このモーメントM_Tはフランジ部のせん断力にその間の距離を掛けることによって得られる。

$$M_T = Q_f D = \frac{QD^2 b^2 t_f}{4I_z} \qquad \cdots\cdots(6.26)$$

この断面では上記のように偶力によるモーメントが発生するため、外力の作用点はこのモーメントと釣合う位置に存在する必要がある。そこで、その作用点を中心に断面のせん断力によるモーメントの釣合を考える。図6-7を参考に、偶力によるモーメントとウェッブ部のせん断力によるモーメントが釣合うとして、ウェッブ部の中心から作用点までの距離eが次のように決定される。ここで、断面二次モーメントI_zは式(6.24)を用いる。

$$\begin{aligned} M_T &= eQ \\ e &= \frac{M_T}{Q} = \frac{QD^2 b^2 t_f}{4I_z}\frac{1}{Q} = \frac{D^2 b^2 t_f}{4I_z} \\ &= \frac{3D^2 b^2 t_f}{D^3 t_w + 6bD^2 t_f} = \frac{b^2 t_f}{Dt_w/3 + 2bt_f} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.27)$$

ここで示した溝型断面のように非対称の断面は、図芯とせん断中心がずれることになる。このことは、図芯に鉛直方向荷重を受け、材が曲げられると、同時に捩じれを自動的に生じることになる。従って、非対称断面部材を主要部材とする場合は、特に注意が必要である。

一方、弱軸（y軸）方向でも曲げモーメントによるせん断応力の分布は上記と同様にせん断流れの仮定を用いて、決定することができる。この断面形状ではz軸に対称であることから、外力がウェッブの中心を通る線上に存在すると、断面に捩じりモーメントを生じないことになる。

上記2つの外力が作用する直線の交点はせん断中心Sと呼ばれ、この点は断面の形状で決定され、断面固有の値となる。このせん断中心を通って外力が作用すると断面は捩じれることなく純粋に曲げ変形を生じる。この点を通らずにせん断力が作用すると曲げ変形と共に断面が捩じれることになる。逆に、このせん断中心を軸にして捩じると曲げ変形が生じず、純粋に捩じれのみが発生する。

6.3 モールの応力円

ここまでは、断面内の応力は図芯に対し垂直の面で考えていた。本節では、斜めの面において、応力状態がどのようになっているかについて考える。

図6-8(a)には$x-y$座標に平行で微小な矩形を取り出し、そこに働く応力を示す。式(6.11)に示すように$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$である。次に、図6-8(b)のように角度$\varphi$で長さ$l$の斜面に働く応力$(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$を力の釣合より求めてみよう。

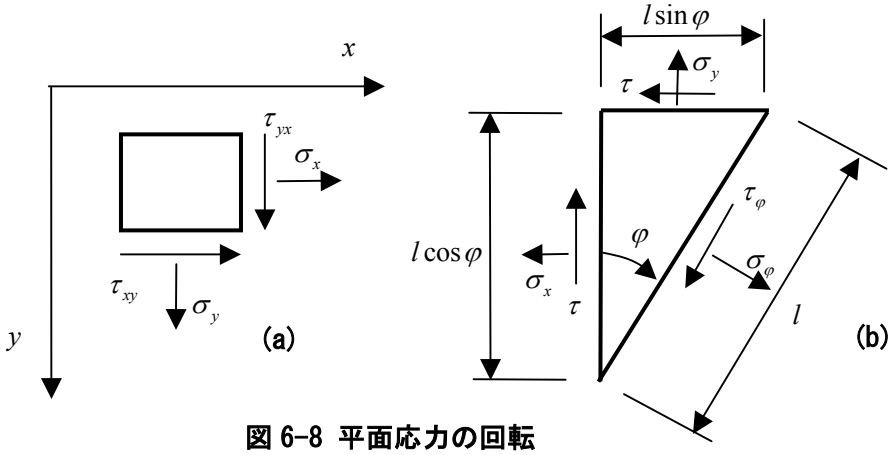


図 6-8 平面応力の回転

式(6.28)第 1 式の第 1 項は、斜め面に垂直な σ_φ の x 方向分力、第 2 項は、同じく τ_φ の x 方向分力、第 3 項は長さが $l\cos\varphi$ で軸方向応力 σ_x 、第 4 項は長さ $l\sin\varphi$ でせん断応力 τ の項である。

ここで、図 6-8 より x 方向と y 方向の力の釣合は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_\varphi\cos\varphi - l\tau_\varphi\sin\varphi - l\cos\varphi\sigma_x - l\sin\varphi\tau = 0 \\ l\sigma_\varphi\sin\varphi + l\tau_\varphi\cos\varphi - l\sin\varphi\sigma_y - l\cos\varphi\tau = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.28)$$

上式を $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ に付いて解くと、角度 φ における応力が求められる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sigma_x\cos^2\varphi + 2\tau\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi \\ &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau\sin 2\varphi \\ \tau_\varphi &= \tau(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - (\sigma_x-\sigma_y)\sin\varphi\cos\varphi \\ &= \tau\cos 2\varphi - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.29)$$

次に、応力が最大、最小となる角度を $\varphi=\alpha$ とし、最大・最小の応力を求める。まず、上の第 1 式を用いて応力が極値となる角度を、以下のように $\partial\sigma_\varphi/\partial\varphi = 0$ より求める。

$$-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau\cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau}{(\sigma_x-\sigma_y)/2} \qquad \cdots\cdots (6.30)$$

上式は角度が $2\alpha+\pi$ でも成立する。このことより、最大応力と最小応力を示す方向間の角度は 90 度ずれており、従って、互いに直交している。上式の最大応力を示す角度 α を用いると次の関係が得られる。

$$\cos 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}} = \frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2}} \qquad \cdots\cdots (6.31a)$$

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\alpha}} = \frac{\tau}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2}}$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2}} \qquad \cdots\cdots(6.31b)$$

また、最小応力となる角度$\alpha + \pi/2$を用いると上式の右辺項には、両者共に負記号が加えられる。最大応力をσ_1、最小応力をσ_2とし、上式を式(6.29)の第 1 式に代入すると最大応力と最小応力が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2}{\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.32)$$

このときのせん断応力は、式(6.31)を式(6.29)の下式に代入することで、下式のようにゼロとなる。

$$\frac{\tau_\varphi}{\cos 2\alpha} = \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\tan 2\alpha$$

$$= \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\frac{\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = 0 \qquad \cdots\cdots(6.33)$$

この直交する 2 断面を主応力面、また、その方向の応力σ_1, σ_2を主応力という。その際、式(6.33)のようにせん断応力はゼロとなる。

次に、せん断応力が最大、最小となる角度$\varphi = \beta$を求めてみよう。条件として、$\partial\tau_\varphi / \partial\varphi = 0$を式(6.29)の下式に適用すると、

$$\frac{\partial\tau_\varphi}{\partial\varphi} = -\tau\sin 2\beta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\beta = 0$$

$$\tan 2\beta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau} \qquad \cdots\cdots(6.34)$$

となる。この面は、先の主応力面と 45 度の角度をなし、主せん断応力面という。そのときの最大せん断応力をτ_1、最小せん断応力をτ_2とすると、最大せん断応力と最小せん断応力は、

$$\tau_1 = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2};\quad \tau_2 = -\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2} \qquad \cdots\cdots(6.35)$$

となり、この応力を主せん断応力という。

以上の応力関係を図示したものに、モール(Mohr)の応力円がある。応力円では、角度を 2 倍で測り、時計回りを正とする。例えば、応力が $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ の場合、モールの応力円の中心は $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ となり、半径は式(6.35)の τ_1 となる。逆に、主応力 σ_1, σ_2 から一般の $\sigma_\varphi, \tau_\varphi$ を求めるには、その応力は σ_1 の方向から反時計回りに 2φ の角度の面に存在する。

例えば、静水圧の状態 $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \tau = 0)$ では、モールの応力円の半径は 0 であり、どの方向でも主応力面となる。また、純せん断の状態 $(\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau)$ では、モールの応力円の中心は原点となり、半径はこのせん断応力に等しくなる。この場合の主応力は、せん断応力と同じで、互いに逆向きの応力状態となる。

平板上における主応力の 2 方向を求め、同じ主応力の方向を続けて描いた曲線を主応力線と呼ぶ。この主応力線の特徴として、最大応力と最小応力から描かれる曲線は互いに直交し、せん断外力のない部材の端部、例えば、梁の上下端では、一方の主応力線は平行で他は縁に直交する。また、軸方向応力がゼロとなる中立軸上では純せん断状態となり、主応力線は中立軸に対し 45 度となっている。

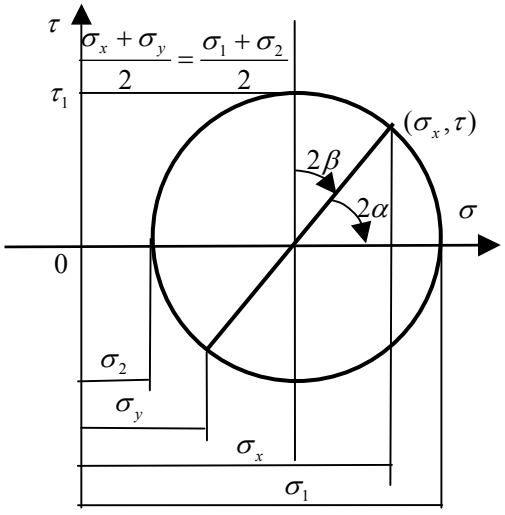
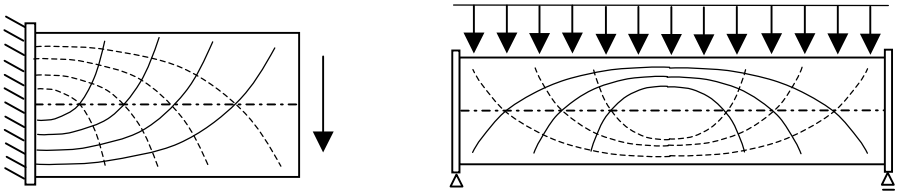


図 6-9 モールの応力円



(a)　片持ち梁　　**(b)　単純梁**

図 6-10 梁内部に生じる主応力線

6.4 断面内の力の釣合

本節では、梁部材内の力の釣合について考えよう。ただし、梁内部の応力による力の釣合ではなく、断面力を用いた力の釣合を考える。まず、原点から x の位置にある部材の微小部分、長さ dx 間における力の釣合を、図6-11を参照しながら考える。微少部分の両端には断面力、つまり、曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$ が、また、部材上端には、荷重 $P_w(x)$

が加わっているものとする。曲げモーメント $M(x)$ は偶力であり、図に示した偶力を正とし、逆方向を負とする。また、ここでは軸力は考えないこととする。微少部分の右端の断面力には、断面力 dM と dQ が考慮されている。これは、微小長さ dx で断面力が変化するとして付け加えている。また、これ以後、表現が不明確とならない場合は、$M(x)$ と $Q(x)$ を M 、Q と略して示す。

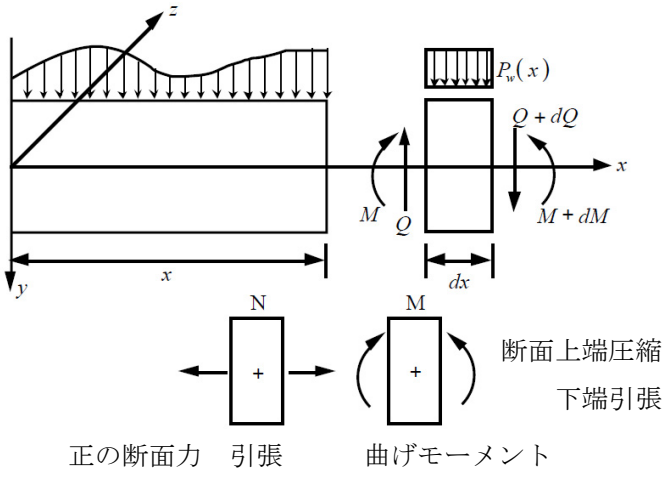


図 6-11 梁における断面力による力の釣合

最初に、上下方向の力の釣合を考えよう。次式が上下方向の力の釣合であり、ここでは、荷重は、考えている範囲が微少部分であることから変化しないとして、$P_w(x)$ に dx を掛けた値を用いる。以上の関係より、上下方向の力の釣合は、

$$-Q+(Q+dQ)+P_w dx=0 \qquad \cdots\cdots(6.36)$$

となる。上式を整理し、微小長さ dx で割ると、微分形式で上下方向の釣合式が次式のように得られる。これは力の釣合の第一式である。

$$\frac{dQ}{dx}=-P_w(x) \qquad \cdots\cdots(6.37)$$

次にモーメントの釣合を考える。任意の位置でモーメントの釣合を考えても良いが、ここではモーメントの回転中心は、微小部分の中心位置とする。この位置を回転中心とすると、荷重は自己釣合の状態であるため考慮しなくても良い。荷重を除いた各断面力によるモーメントの釣合は次式となる。

$$M-(M+dM)+Q\frac{dx}{2}+(Q+dQ)\frac{dx}{2}=0 \qquad \cdots\cdots(6.38)$$

上式を整理すると共に、他の項に比較して、より小さな値となる二次の微小項である $dQdx$ を無視し、微小長さ dx で割ると、力の釣合の第二式であるモーメントの釣合が以下のように得られる。

$$\frac{dM}{dx}=Q \qquad \cdots\cdots(6.39)$$

さらに、上式の両辺を微分し、式(6.37)を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x) \qquad \cdots\cdots(6.40)$$

以上をまとめると、梁内の上下方向の釣合とモーメントの釣合は、次の微分方程式で表されることになる。この釣合式が、梁内の力の釣合を表し、この方程式だけで応力状態が決定する構造物を静的構造物と呼ぶ。

表6-2 梁内における断面力の釣合

$\frac{dQ}{dx} = -P_w(x)$ $\frac{dM}{dx} = Q$	→	$\frac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x)$

6.5　単純梁の応力解析

前節で示した力の釣合から得られる方程式(6.40)のみを用いて、梁内部の応力状態を決定できる構造物を静定であるという。ここでは、トラスで学んだ切断法を用いて、部材の断面力を求めてみよう。解析モデルは図6-12(a)で示されている部材中央に集中荷重を受ける単純梁である。

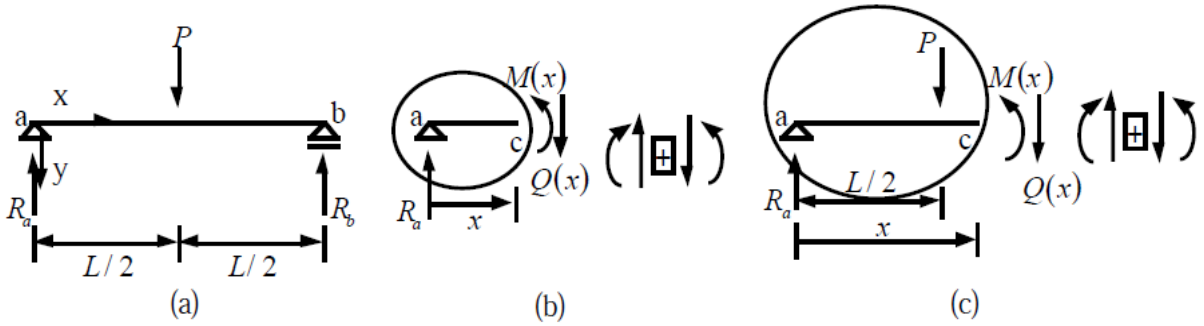


図 6-12 中央集中荷重を受ける単純梁と単純梁における力の釣合

図6-12(b)は、構造物の一部を閉曲線で切り取った図である。この閉曲線の中、あるいは、線上の外力、支持点からの反力、また、閉曲線によって切断された部材内部の断面力に対応する力、これら全ての力は釣り合っていなければならない。切断面に作用する力は、梁内部の断面力に対応し、軸力とせん断力、並びに曲げモーメントであり、その方向は図6-12(b)に示す各断面力を正として仮定される。これらの力間には、x方向とy方向の力の釣合とモーメントの釣合が存在する。具体的に、図6-12(a)に示す単純梁で力の釣合を見ていこう。静的構造物では、まず、反力を求めるために、閉曲線として単純梁全体を包む曲線を描く。この

閉曲線は部材を切断しないことから、外力と仮定した反力とで力の釣合がとられる。上下方向の力の釣合は、

$$P - R_a - R_b = 0 \qquad \cdots\cdots(6.41)$$

となり、また、a 点を中心としたモーメントの釣合は、次式となる。

$$P \cdot \frac{L}{2} - R_b L = 0 \qquad \cdots\cdots(6.42)$$

上の2つの釣合式から反力 R_a と R_b が次のように決定される。

$$R_a = R_b = \frac{P}{2} \qquad \cdots\cdots(6.43)$$

次に、図6-12(b)に示す閉曲線の中の釣合を考える。今回は、原点から x の位置（ただし、$x < L/2$）で梁部材が切断されており、ここに、梁内部の断面力と釣り合う外力を仮定する。この外力の方向は、その隣に描かれている梁の微小部分に釣り合う力となっており、微小部分の力の方向は、断面力が正となる方向に仮定する。まず、上下方向の力の釣合は、

$$-R_a + Q(x) = 0 \qquad \cdots\cdots(6.44)$$

となり、また、モーメントの釣合は、梁の切断位置である c 点を中心に求められる。

$$R_a x - M(x) = 0 \qquad \cdots\cdots(6.45)$$

式(6. 44)と(6. 45)を $Q(x)$ と $M(x)$ について解くと、せん断力と曲げモーメントが次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= R_a = \frac{P}{2} \\ M(x) &= \frac{P}{2} x \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.46)$$

上式のせん断力と曲げモーメントは x の関数として得られており、x が $L/2$ より小さい部分に当てはまる。次に、x が $L/2$ より大きい場合について考えよう。閉曲線は、図6-12(c)に示されている。切断面の外力は先と同様である。まず、上下方向の釣合は、以下のように得られる。

$$-R_a + Q(x) + P = 0 \qquad \cdots\cdots(6.47)$$

また、モーメントの釣合は、図6-12(c)の c 点を中心とすると、次のように得られる。

$$R_a x - M(x) - P(x - \frac{L}{2}) = 0 \qquad \cdots\cdots(6.48)$$

上の2式を解くことによって、$x > L/2$ の範囲のせん断力と曲げモーメントが得られる。

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{P}{2} \\ M(x) &= \frac{P}{2}(L - x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.49)$$

これで、単純梁の断面力分布が全て得られたことになる。これらの式を用いて、せん断力と曲げモーメントを図6-13のように描く。曲げモーメントの最大値は、集中荷重の場合、荷重直下に現れ、その位置でせん断力は不連続となる。

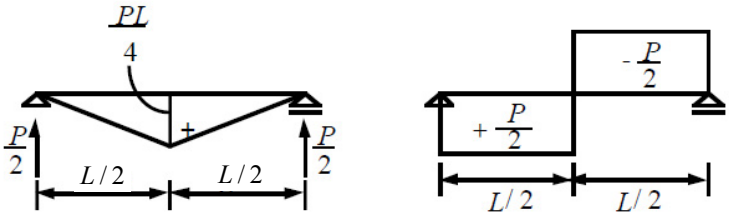


図 6-13 曲げモーメント図とせん断力図

荷重位置の微小部分を取り出して、荷重と断面力との力の釣合を調べてみよう。図6-14(a)は、荷重位置の微小部分であり、その両隣にそれに続く梁の微小部分が描かれている。梁の2つの微小部分における断面力とその方向は、図6-13と比較すると良い。荷重位置の上下方向における力の釣合は、荷重とせん断力によって得られており、また、集中荷重による力が2つのせん断力となって支持点に伝わっていく様子が良く理解できる。集中荷重がある場合、せん断力に荷重の大きさの不連続ができることを覚えておこう。曲げモーメントの釣合はモーメント荷重がないため、当然微小部分の両端の曲げモーメントは釣り合っており、曲げモーメント図は連続線で描かれることになる。

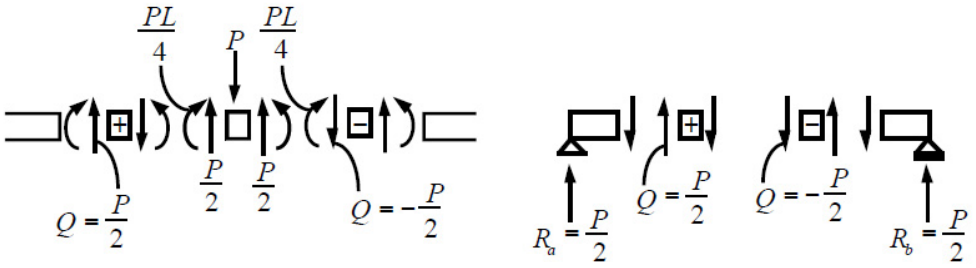


図 6-14 梁微小部分における力の釣合

次に、支持点での力の釣合を観察する。図6-14(b)は *a* 点近くの微小部分を取り出し、断面力と反力を描いたものである。同図よりせん断力と反力が釣り合っていることが分かる。また、支持点がピン支持であるため、モーメントの反力はなく、そのため、梁の曲げモーメントもゼロとなっている。同様に、図6-14(c)には、*b* 点における力の釣合が描かれている。

例題6-1　図6-15に示す等分布荷重 P_w を受ける単純梁の応力解析を行い、部材に分布する断面力を求めよ。

両端の反力は、荷重との力の釣合、並びに *a* 点でのモーメントの釣合より、

$$\left.\begin{aligned} -R_a - R_b + \int_0^L \bar{P}_w dx = 0 \\ -R_b L + \int_0^L \bar{P}_w x dx = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.50)$$

で求められる。ここでは、分布荷重の合力とモーメントは積分を用いて表されている。上式の積分を実行すると、釣合式は以下となる。

$$\left.\begin{aligned} -R_a - R_b + \bar{P}_w L = 0 \\ -R_b L + \bar{P}_w \frac{L^2}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.51)$$

両式を解くことによって、反力は、

$$R_a + R_b = \frac{\bar{P}_w L}{2} \qquad \cdots\cdots (6.52)$$

となる。次に、*a* 点より *x* の位置で梁を切断し、その位置での断面力を考慮することによって、切断点 *c* でのモーメントの釣合と上下方向の釣合より、次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} -M(x) + R_a x + \int_0^x \bar{P}_w (x - X) dX = 0 \\ -R_a + \int_0^x \bar{P}_w dx + Q(x) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.53)$$

上式の中の積分を実行し、書き換えると、せん断力と曲げモーメントが各々求められる。

$$\left.\begin{aligned} M(x) = \frac{\bar{P}_w L}{2} x - \bar{P}_w \left[xX - \frac{X^2}{2} \right]_0^x \frac{x^2}{2} = \frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x) \\ Q(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} (L - 2x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.54)$$

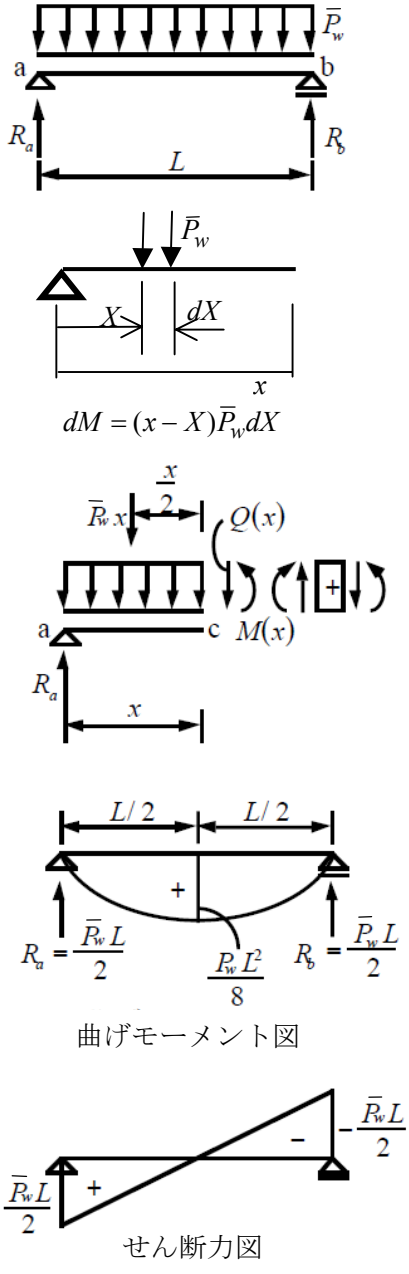


図 6-15 等分布荷重を受ける単純梁

上式を用いて、せん断力図と曲げモーメント図を図6-15に描く。曲げモーメントの最大値は、上式に $x = L/2$ を代入することによって次のように得られる。

$$M(\frac{L}{2}) = \frac{\overline{P}_w L}{4}(L - \frac{L}{2}) = \frac{\overline{P}_w L^2}{8} \qquad \cdots\cdots(6.55)$$

6.6　片持ち梁の応力解析

本節では、単純梁と同様に静定構造物の代表である片持ち梁の応力解析を行う。最初に、図6-16(b)のように反力 (R_a, H_a, M_a) を仮定し、外力と反力の釣合より、反力を決定する。ここでは、上下方向の力の釣合、水平方向の力の釣合、また節点 a におけるモーメントの釣合を用いる。

１）上下方向の力の釣合

$$-R_a + P = 0 \qquad \cdots\cdots(6.56)$$

２）水平方向の力の釣合

$$H_a = 0 \qquad \cdots\cdots(6.57)$$

３）a 点を中心としたモーメントの釣合

$$PL - M_a = 0 \qquad \cdots\cdots(6.58)$$

これで、上記3つの力の釣合より、次のように3つの反力が得られる。

$$\left.\begin{aligned} R_a &= P \\ H_a &= 0 \\ M_a &= PL \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.59)$$

次に、図6-16(c)に示す閉曲線の中の釣合を考える。ここでは、原点から x の位置で梁部材が切断されており、梁内部の断面力と釣り合う外力を仮定する。この外力の方向は、その隣に描かれている梁の微小部分に釣り合う力となっており、微小部分の力の方向は、断面力が正となる方向に仮定している。まず、上下方向の力の釣合は、

$$-R_a + Q(x) = 0 \qquad \cdots\cdots(6.60)$$

となり、また、モーメントの釣合については、梁の切断位置

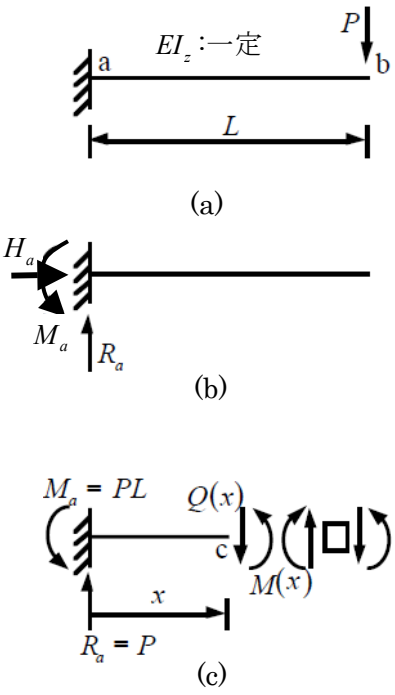


図 6-16 先端集中荷重を受ける片持ち梁

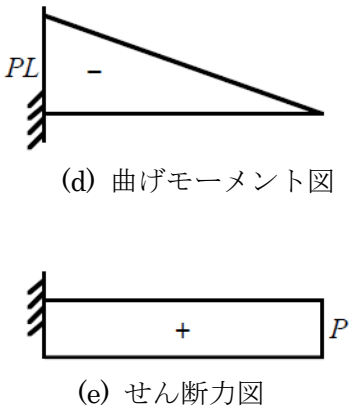


図 6-17 先端集中荷重を受ける片持ち梁

である c 点を中心に求める。

$$R_a x - M(x) - M_a = 0 \qquad \cdots\cdots(6.61)$$

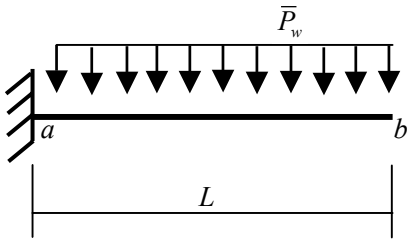
式(6.59)と(6.60)を $Q(x)$ と $M(x)$ について解くと、せん断力と曲げモーメントが得られる。

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= R_a = P \\ M(x) &= P(x-L) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.62)$$

上で得られたせん断力と曲げモーメント分布を図6-17(d)と(e)に描く。

例題6-2 等分布荷重を受ける片持ち梁の応力解析を実行し、曲げモーメント図とせん断力図を描け。

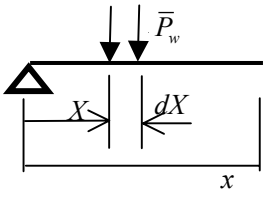
上下方向の力の釣合及び a 点でのモーメントの釣合から反力を求める。梁全体の力の釣合式は、右図を参考にして、



$$\left.\begin{aligned} -R_a + \int_0^L \bar{P}_w dx = 0; \quad -R_a + \bar{P}_w L = 0 \\ M_a + \int_0^L \bar{P}_w x dx = 0; \quad M_a + \bar{P}_w \frac{L^2}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.63)$$

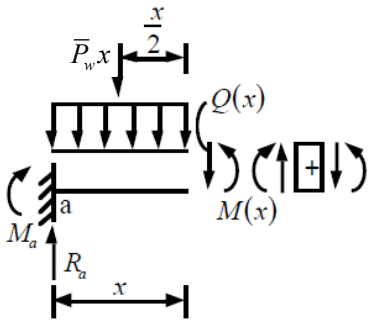
となる。従って、各反力は、

$$\left.\begin{aligned} R_a &= \bar{P}_w L \\ M_a &= -\frac{\bar{P}_w L^2}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.64)$$



$$dM = (x - X)\bar{P}_w dX$$

位置 x で梁を切断し、図に示すような閉曲線の中とその周辺での力の釣合を考える。まず、上下方向の力の釣合および切断点でのモーメントの釣合は、



$$\left.\begin{aligned} -R_a + \int_0^x \bar{P}_w dX + Q(x) = 0; \quad -R_a + \bar{P}_w x + Q(x) = 0 \\ -M(x) + M_a + R_a x - \int_0^x \bar{P}_w (x - X) dX = 0; \\ -M(x) + M_a + R_x x - \bar{P}_w \frac{L^2}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.65)$$

で与えられる。両式より、せん断力と曲げモーメントが以下のように得られる。

図 6-18 等分布荷重を受ける片持ち梁の釣合

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= R_a - \bar{P}_w x = \bar{P}_w (L - x) \\ M(x) &= M_a + R_a x - \bar{P}_w \frac{x^2}{2} = -\frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 - 2Lx + x^2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.66)$$

曲げモーメント及びせん断力の最大値は、梁端部の $x = 0$ 点で得られる。もちろん、この断面力は反力と釣り合うことになる。曲げモーメント図とせん断力図を下に示す。

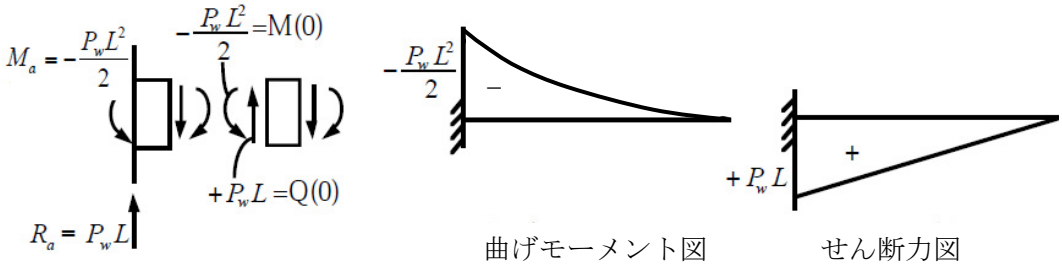


図 6-19 等分布荷重を受ける片持ち梁の曲げモーメント図とせん断力図

例題6-3 図のような長方形断面の単純梁に等分布荷重 $\bar{P}_w = 20kN/m$ が加わっているとき、部材内に生じる最大応力及び最大せん断応力を求めよ。またその位置はどこか検討せよ。さらに、最大せん断応力から生じる軸方向応力はいくらになるか計算せよ。

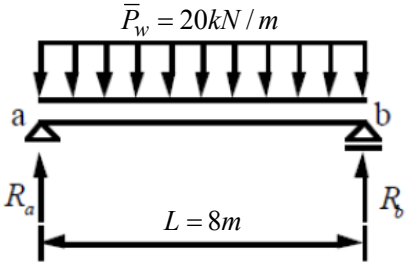


図 6-20 等分布荷重を受ける単純梁

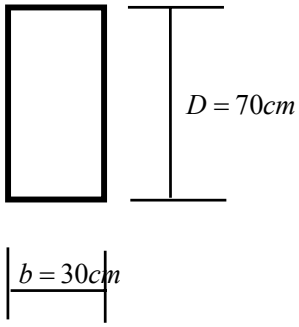


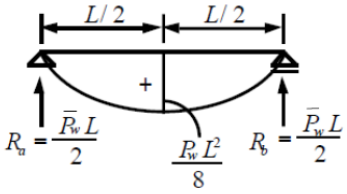
図 6-21 単純梁の断面

このモデルの曲げモーメント分布とせん断力分布は、既に例題6-1で求められている。その結果を次式に示すと、

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= \frac{\bar{P}_w x}{2}(L - x) \\ Q(x) &= \frac{\bar{P}_w}{2}(L - 2x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6.67)$$

となり、図6-22に示す。最大曲げモーメントと最大せん断力は、

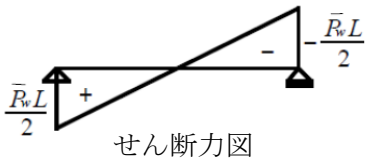
$$M(\frac{L}{2}) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8} = \frac{20 \cdot 8^2}{8} = 160kNm$$
$$Q(0) = \frac{\bar{P}_w L}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80kN \quad \cdots\cdots(6.68)$$



曲げモーメント図

断面特性は次のようである。

$$A = 30 \cdot 70 = 2100cm^2$$
$$I_z = \frac{bD^3}{12} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} = 160000cm^4 \quad \cdots\cdots(6.69)$$
$$Z_c = Z_t = \frac{160000}{35} = 4571.4cm^3$$



せん断力図

図 6-22 等分布荷重を受ける単純梁の曲げモーメント図とせん断力図

曲げモーメントによる最大軸方向応力 $\sigma_{\max}$ は、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z_c} = \frac{160 \cdot 100}{4571.4} = 3.5kN/cm^2 \quad \cdots\cdots(6.70)$$

となり、部材中央の断面の上端に最大圧縮応力が、また、下端に最大引張応力が発生する。

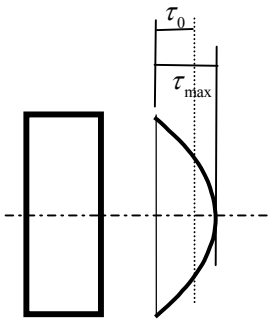


図 6-23 矩形断面内のせん断応力

最大せん断応力は、せん断力図より部材両端で、せん断応力の分布状態から断面中央に生じる。その値は式(6. 14)より、

$$\tau_{\max} = k\frac{Q}{A} = 1.5\frac{80}{2100} = 0.057kN/cm^2 \quad \cdots\cdots(6.71)$$

となる。また、モールの応力円を利用すると、準せん断の状態では、図6-24 のようになり、45 度の方向にせん断応力と同じ値の引張応力と圧縮応力が生じる。

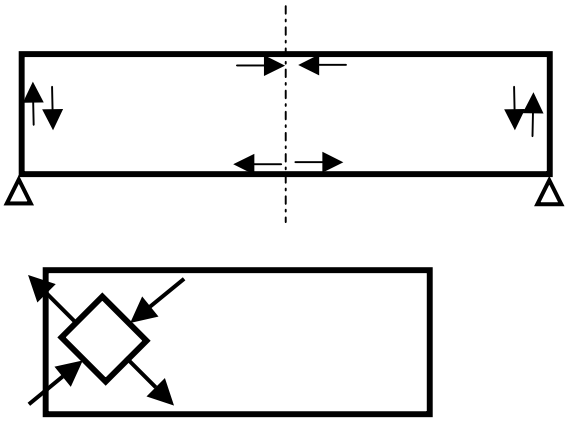


図 6-25 最大応力の発生場所とせん断応力による軸方向応力

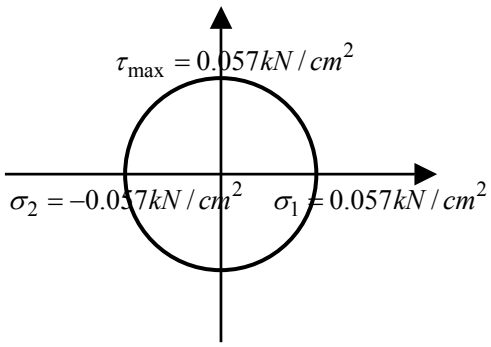


図 6-24 準せん断時におけるモールの応力円

6.7　梁理論における仮定

梁理論は 3 次元物体である梁や柱を、1 次元の線材として扱うための理論である。この理論によって複雑な骨組内の応力や変形状態が容易に知ることができ、非常に有用である。

梁理論の基本は、「平面保持の仮定」と「法線保持の仮定」であり、この仮定に基づいて構築された梁理論は、ベルヌーイ・オイラー梁と呼ばれている。ベルヌーイ・オイラー梁では、断面内の応力は材軸に沿った軸方向応力とせん断応力の 2 種のみであり、また、対応するひずみは材軸方向の軸方向ひずみのみである。ここではせん断ひずみやせい方向のひずみは考慮されておらず、そのため、軸方向ヤング係数以外のせん断弾性係数やせい方向の弾性係数は無限大としていることと同じとなっている。

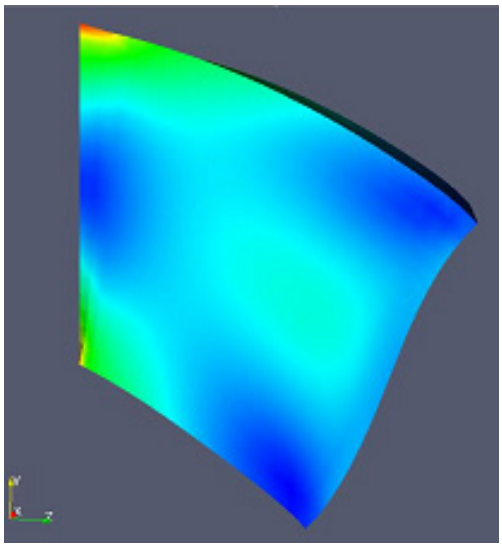


図 6-26 片持ち梁のせん断変形（FEM による数値解析解）

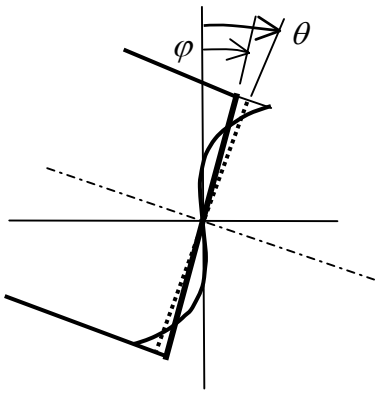


図 6-27 せん断変形を許す断面の変形状態

曲げモーメントが生じている梁には、既に学んだように、せん断応力が発生する。従って、実際には、せん断応力によって断面にはせん断ひずみが生じ、結果、断面は平面を保てなくなり、図 6-26 のようにＳ字上に変形する事になる。ただし、せん断変形の大きさは、梁の長さ l と断面のせい D の比率 D/l に依存し、建築で使用する程度の比率 $D/l<1/10$ ではほとんど無視して良いといえる。

せん断変形を考慮する梁理論は、チェモシェンコ梁と呼ばれる。図 6-26 のようなせん断応力に比例するせん断ひずみを考慮すると平面保持の仮定が満たされなくなる。そこで、チェモシェンコ梁では、図 6-27 に示されるように、せん断変形を考慮するが、実際の変形ではなく、平均的なせん断変形で、しかも変形後も平面を保つとしている。結果的にチェモシェンコ梁理論では、平面保持の仮定は満たすが、法線は保持されず、せん断変形を許す事のなる。現在でも、この 2 種の梁理論が使用されている。

6.8　課題

本章の課題は、梁部材に生じるせん断変形の大きさがどの程度となる

かを理解することにある。梁長さに比較して梁せいが大きい場合、せん断変形が大きくなることを学ぶ。ここでは、SPACE を用いて数値計算し、影響の程度を理解する。本章で用いる解析モデルは、下に示す片持ち梁であり、D/l が 0.1,0.25,0.5 の 3 種類とする。断面は木造の長方形断面で、幅 $20cm$ で、せいは $50cm$ とする。木種はべいまつ、特急とし、木材のヤング係数は $1176kN/cm^2$ で、せん断弾性係数は $78.4kN/cm^2$ とする。

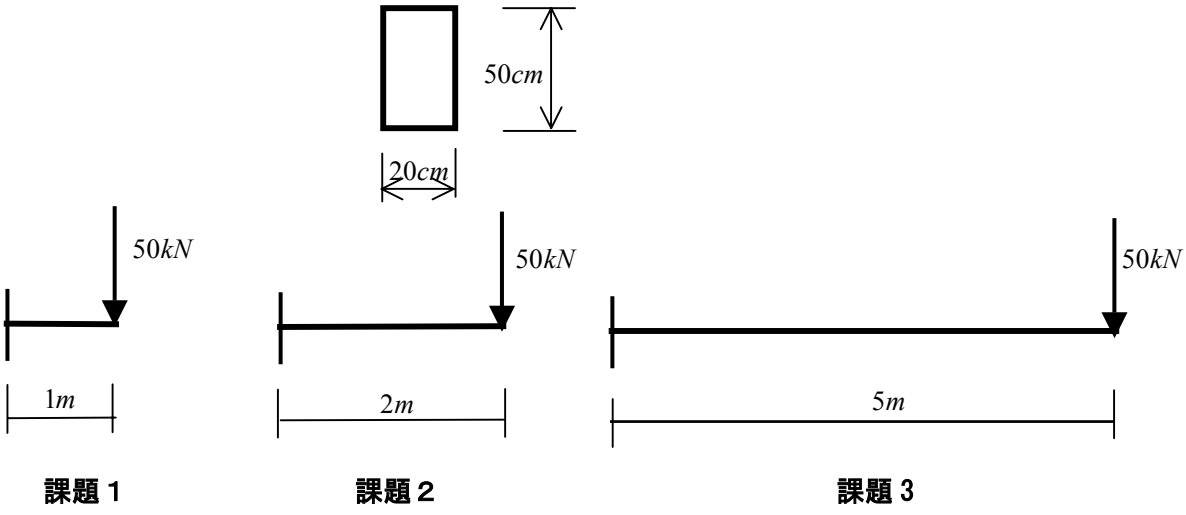


図 6-28 課題の解析モデル（長さの異なる片持ち梁）

未だ片持ち梁のたわみを求める方法は学習していない。ここでは、せん断変形によるたわみを検討するために、ベルヌーイ・オイラー梁による梁片持ち先端のたわみ δ_0 とチェモシェンコ梁によるせん断変形によるたわみ δ_S を次式で与える。下式で、κ はせん断変形の係数と呼ばれ、長方形断面では 1.2 となる。

$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{3EI}; \qquad \delta_S = \kappa\frac{Pl}{GA} + \frac{Pl^3}{3EI} \qquad \cdots\cdots(6.72)$$

課題で用いた梁の断面性能は、

$$\left.\begin{aligned} A &= 20\cdot 50 = 1000cm^2 \\ I &= \frac{20\cdot 50^3}{12} = 208333cm^4 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.73)$$

３つの課題のたわみは、式(6.72)より、各々、次ように計算される。

$$\left.\begin{aligned} \delta_{01} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50\cdot 100^3}{3\cdot 1176\cdot 208333} = 0.0680cm & \delta_{S1} &= \kappa\frac{Pl}{GA} = 1.2\frac{50\cdot 100}{78.4\cdot 1000} = 0.0765cm \\ \delta_{02} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50\cdot 200^3}{3\cdot 1176\cdot 208333} = 0.5442cm & \delta_{S2} &= \kappa\frac{Pl}{GA} = 1.2\frac{50\cdot 200}{78.4\cdot 1000} = 0.1531cm \\ \delta_{03} &= \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{50\cdot 500^3}{3\cdot 1176\cdot 208333} = 8.503cm & \delta_{S3} &= \kappa\frac{Pl}{GA} = 1.2\frac{50\cdot 500}{78.4\cdot 1000} = 0.3825cm \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6.74)$$

３ つの課題に対する解析モデルを、「演習解析モデル」-「第６章」フォルダ内の「課題１」、課題２」、「課題３」フォルダ中に各々作成する。解析モデルの作成は、第３章を参照して各自で行われたい。ここでは、各課題共通の断面作成部分をダイアログで示す。

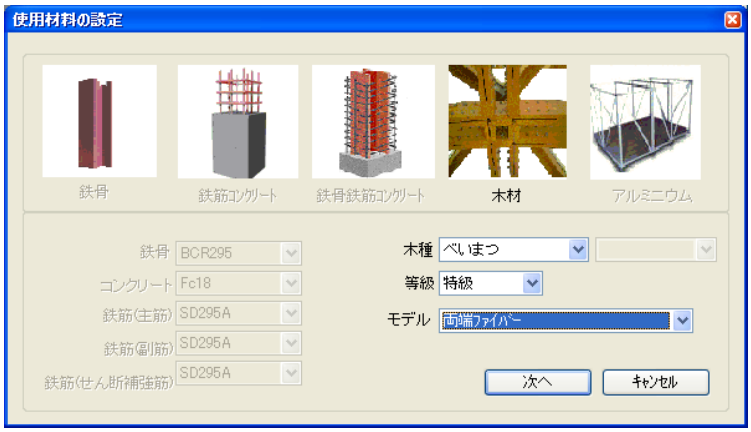


図 6-29 使用材料の設定

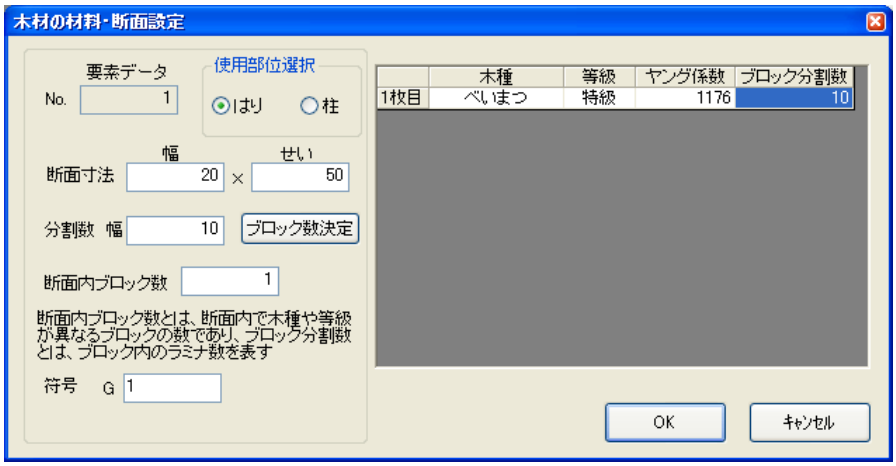


図 6-30 集成材用の木造断面の設定

木材の断面は、図 6-29 のように両端ファイバーモデルを利用して作成する。図 6-30 では、断面の寸法とファイバー用の断面分割数を設定する。ここでは、10x10 に分割した。この断面の材料定数は図 6-31 に示されており、軸線方向の弾性係数は、$E=1176kN/cm^2$ である。

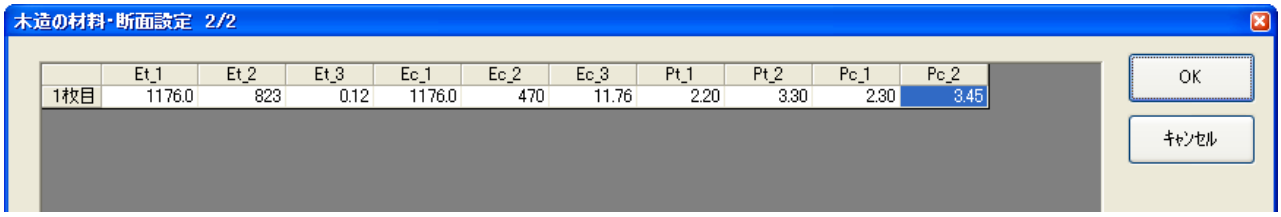


図 6-31 断面の材料定数

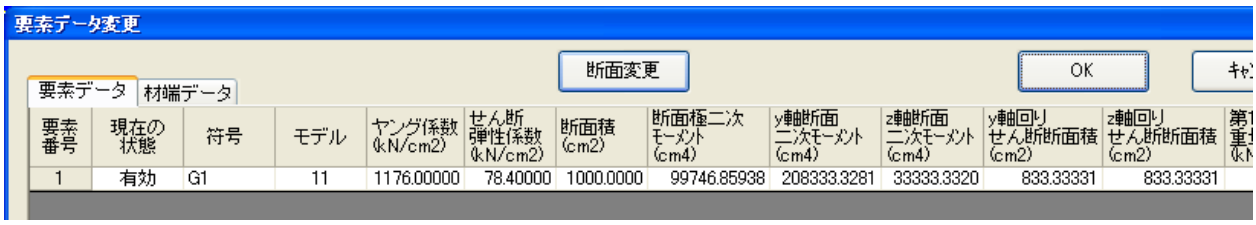


図 6-32 使用部材の断面特性

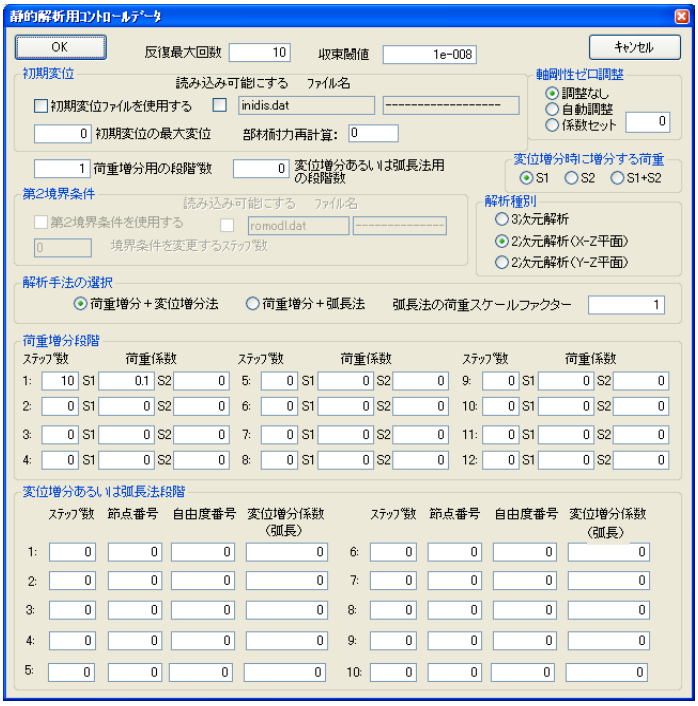


図 6-33 「静的解析用コントロールデータ」ダイアログ

解析モデルが完成した後、数値解析を行って、せん断変形を考慮する場合と、しない場合の最大たわみ量を比較する。静的解析用パラメータは、図 6-33 の「静的解析用コントロール」ダイアログで行う。ここでは、線形解析であるがプレゼンターでアニメーションを行って分析する都合上、荷重を 10 に分割し、荷重増分法を使用して荷重を 0.1 づつ増加させる。

次に、出力と解析制御をコントロールするダイアログを表示させ、せん断変形を考慮するか、あるいはしないかを設定する。図 6-34 の○で示した部分をチェックすることで、解析を実施するとせん断変形を考慮しない解が得られることになる。

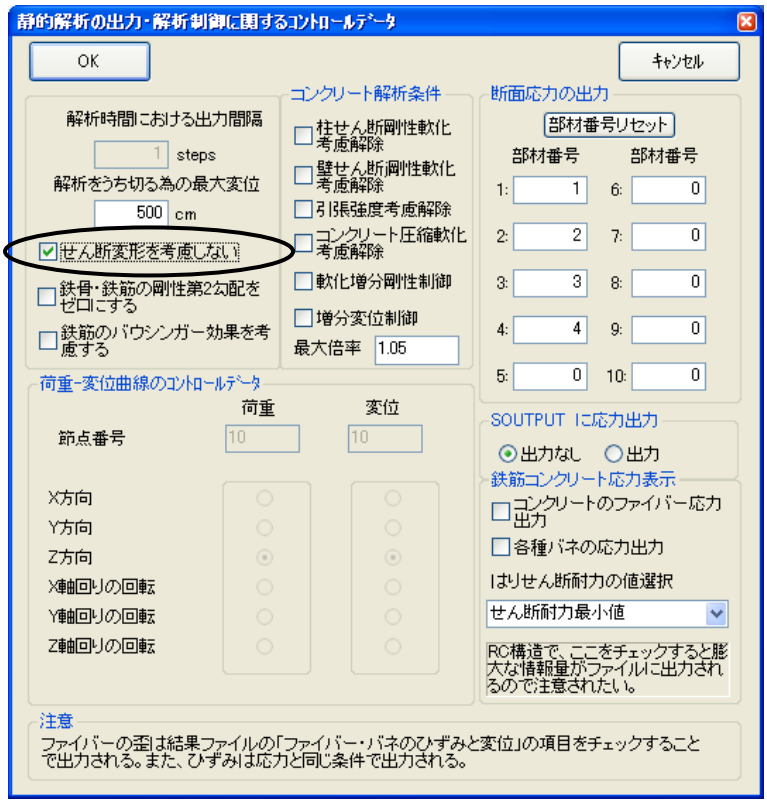


図 6-34 「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログ

静的解析を実施した後、プレゼンターを起動して、解析結果を分析する。図 6-35 には、変形状態と共に曲げモーメント図が表示されている。アニメーションを実施して、変形状態と曲げモーメントの分布、断面内の応力をより深く理解されたい。

節点変位は、図 6-35 の解析モデルで、調べたい節点上にマウスを移動させ、Ctrl キイを押しながら、マウス右ボタンを押す。この操作で、

図 6-36 の節点情報が得られる。ここには、この節点の境界条件や解析ステップ時の変位、あるいは、最大変位が示される。ちなみに、Sift キイを押しながら、マウス右ボタンを押すと、マウス位置の部材に関する情報が得られる。

表 6-1 には、解析結果がまとめられている。括弧内の値は、式(6.74)で求めた解析結果が示されており、その上の SPACE で計算された値と比較すると非常に良い一致を示している。

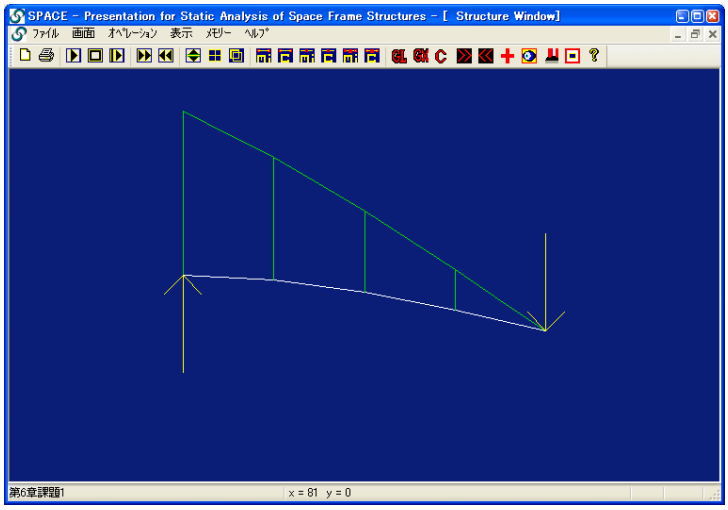


図 6-35 解析モデルの変位と曲げモーメント図

図 6-36 節点情報によって得た最大変位

表 6-1 せん断変形を考慮した場合としない場合の片持ち梁先端たわみの比較

D/l	0.5	0.25	0.1
せん断変形なし δ_0 (cm)	0.0680 (0.0680)	0.5446 (0.5442)	8.509 (8.503)
せん断変形あり δ_S (cm)	0.1446 (0.1445)	0.6976 (0.6973)	8.891 (8.886)
$(\delta_S-\delta_0)/\delta_0$	112.6%	28.1%	4.5%

上式より、パラメータ D/l が大きくなるほど、せん断変形の影響が大きくなり、曲げ変形よりもせん断変形が卓越していくことが理解できる。

6.9　まとめ

部材が曲げられ、曲げモーメントが生じる際、せん断力も発生する。この曲げモーメントによって生じる断面内のせん断応力分布を曲げに

よる軸方向応力との釣合より求めた。長方形断面では、断面の上端と下端でゼロとなり、中央位置で最大となる放物線になる。この最大せん断応力は、平均せん断応力の 1.5 倍となることを示した。薄肉で構成された断面では、せん断流れ理論によってせん断応力を求めること、また、非対称断面におけるせん断応力とせん断中心についても言及した。

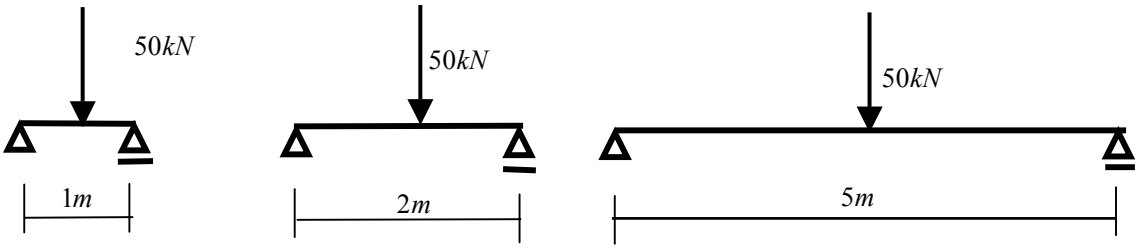
梁断面内の応力は、材軸方向に垂直の面における軸方向応力とせん断応力を考えているが、任意の方向の応力をモールの応力円より求める方法について述べた。最後に、断面内の合応力である断面力による力の釣合式を導き、その釣合式によって静的構造物の応力解析を行った。

6.10　問題

問 6-1　次に示す中央集中荷重を受ける単純梁について、SPACE を用いて静的応力解析（線形解析）を実行しなさい。解析結果を用いて、せん断変形がある場合と、ない場合を比較し、D/l によってどのように影響を受けるかについてレポートしなさい。断面は木造の長方形断面で、幅 $20cm$ で、せいは $40cm$ とする。断面は長方形断面で、幅 $20cm$ で、せい $50cm$ とする。木種はべいまつ、特急とし、木材のヤング係数は $1176kN/cm^2$ で、せん断弾性係数は $78.4kN/cm^2$ とする。

中央集中荷重を受ける単純梁の中央のたわみ δ_0 とせん断変形を許すたわみ δ_S は、次式で与えられる。

$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{48EI};\quad \delta_S = \frac{Pl^3}{48EI} + \kappa\frac{Pl}{4GA} \qquad \cdots\cdots(6.75)$$



問 6-1 の解析モデル（長さの異なる単純梁）

ヒント：

$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{50\cdot 100^3}{48\cdot 1176\cdot 208333} = 0.00425$$
$$\delta_S = \kappa\frac{Pl}{4GA} = 1.2\frac{50\cdot 100}{4\cdot 78.4\cdot 1000} = 0.01913$$
$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{50\cdot 200^3}{48\cdot 1176\cdot 208333} = 0.03401$$
$$\delta_S = \kappa\frac{Pl}{4GA} = 1.2\frac{50\cdot 200}{4\cdot 78.4\cdot 1000} = 0.03827$$