



第7章 2方向曲げ、軸力と曲げを同時に受ける部材の応力

ポイント：軸力と2軸の曲げを受ける梁の断面内応力分布  
断面内の応力とひずみ

本章では、前章に続き部材断面内における軸方向応力について学ぶ。ここでは、まず部材の軸力と2軸方向から荷重が加わり、断面に軸力と2軸の曲げモーメントが生じる場合について理論解析を行い、断面特性について学習する。次に、解析モデルを設定し、理論的解析結果とSPACEを用いて得た数値解析結果を比較・検討する。

7.1 はじめに

キーワード

応力と断面力の関係 断面特性（断面積、断面二次モーメント、断面係数）  
断面内の軸方向応力の分布 SPACE のモデラー

最初に、断面内の任意位置に座標原点を置き、その座標原点における断面力とひずみとの関係について復習しよう。断面には軸力と2軸の曲げモーメントが生じているものとする。平面保持の仮定が成立していると、断面内の軸方向ひずみ $\epsilon_x$ は第3章で仮定したように次の1次式で表すことができる。

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \kappa_z y + \kappa_y z \quad \dots\dots(7.1)$$

ここで、 $\epsilon_0$ は軸方向ひずみであり、 $\kappa_z, \kappa_y$ はz軸とy軸に関する曲率、同じく $\kappa_z y, \kappa_y z$ は曲げひずみを表す。無論、 $\epsilon_0, \kappa_z, \kappa_y$ はxの関数ではあるが、断面内におけるy,zに対しては定数となる。

応力とひずみの関係が線形であり、ヤング係数をEとすると、軸方向応力は次式となる。

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E(\epsilon_0 + \kappa_z y + \kappa_y z) \quad \dots\dots(7.2)$$

最初に、軸力Nは、上式の応力を断面内で積分すると、

$$N = \int_A \sigma_x dA = \epsilon_0 \int_A E dA + \kappa_z \int_A E y dA + \kappa_y \int_A E z dA \quad \dots\dots(7.3)$$

として得られる。また座標原点位置で応力のモーメントを積分すると、

7.2 2軸応力状態の梁

使用する座標系は常に右手・右ねじの規則を用いる

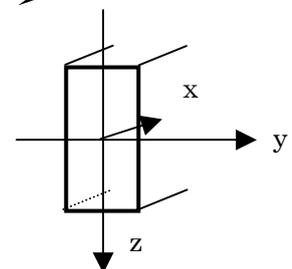


図 7-1 断面内の座標（右手・右ねじの規則）

2軸の曲げモーメントが次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_x y dA = \varepsilon_0 \int_A E y dA + \kappa_z \int_A E y^2 dA + \kappa_y \int_A E z y dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = \varepsilon_0 \int_A E z dA + \kappa_z \int_A E y z dA + \kappa_y \int_A E z^2 dA \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.4)$$

ここでは、 $E$ はRC構造のように断面内で一様でないとしている。

式(7.3)と式(7.4)を行列で表すと、

$$\left\{ \begin{matrix} N \\ M_z \\ M_y \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \int_A E dA & \int_A E y dA & \int_A E z dA \\ \int_A E y dA & \int_A E y^2 dA & \int_A E z y dA \\ \int_A E z dA & \int_A E y z dA & \int_A E z^2 dA \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{matrix} \right\} \dots\dots (7.5)$$

となり、断面でのひずみ・曲率( $\varepsilon_0, \kappa_z, \kappa_y$ )と断面力との関係を表す。上式の係数行列は対称であり、 $\varepsilon_0$ は部材の伸びひずみ、 $\kappa_z$ と $\kappa_y$ は各々 $z$ 軸と $y$ 軸に関する曲率である。また、行列内の各積分値は以下の意味を有する。

$$\left. \begin{aligned} \int_A E dA & \quad \text{軸方向剛性} \\ \int_A E y^2 dA, \int_A E z^2 dA & \quad \text{曲げ剛性} \\ \int_A E y dA, \int_A E z dA & \quad \text{軸と曲げの相関剛性} \\ \int_A E z y dA & \quad \text{2方向の曲げの相関剛性} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.6)$$

次に、部材が均質材で構成されており、しかも応力とひずみが比例範囲(線形関係)である場合について考えてみよう。この場合、ヤング係数 $E$ は断面内で一定であるため $E$ は積分外となる。その結果、式(7.6)で示される $E$ を除いた積分は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A dA && \text{断面積} \\ S_y &= \int_A z dA && y \text{ 軸に関する断面一次モーメント} \\ S_z &= \int_A y dA && z \text{ 軸に関する断面一次モーメント} \\ I_y &= \int_A z^2 dA && y \text{ 軸に関する断面二次モーメント} \\ I_z &= \int_A y^2 dA && z \text{ 軸に関する断面二次モーメント} \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_A z y dA && y \text{ } z \text{ 軸に関する断面相乗モーメント} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.7)$$

上式を利用すると、ひずみ・曲率と断面力との関係は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_z & S_y \\ S_z & I_z & I_{yz} \\ S_y & I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.8)$$

一般に、部材の座標系は、前節で示した座標原点のように任意位置に設定されるわけではない。実際は、式(7.8)の係数行列で非対角項がゼロとなるように設定する。では、どのような方法で設定するかについて考えてみよう。一般に非対角項  $S_y, S_z$  がゼロとなる座標原点を断面の**図芯位置**といい、また、 $I_{yz}$  がゼロとなる位置を**主軸位置**という。

まず、図芯位置を求める。この方法は既に第4章で学習したが、ここでもう一度復習してみよう。右図に示すように任意位置における断面内の座標系を  $(y, z)$  とし、図芯位置での断面座標系を  $(Y, Z)$  とする。断面内の任意位置の座標は、図 7-2 より次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.9)$$

次に、この関係を図芯での断面一次モーメントに代入する。

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A (z - z_0) dA = \int_A z dA - z_0 \int_A dA \\ \int_A (y - y_0) dA = \int_A y dA - y_0 \int_A dA \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.10)$$

上式が図芯位置での断面一次モーメントであることから、その値はゼロとなり、任意位置から図芯位置までの距離が得られる。

$$\begin{Bmatrix} S_y = 0 \\ S_z = 0 \end{Bmatrix} \text{ より } \begin{Bmatrix} z_0 = \frac{S_z}{A} \\ y_0 = \frac{S_y}{A} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.11)$$

ここで、 $S_z, S_y$  は任意位置での断面一次モーメントである。上式のように、任意位置から図芯位置までの距離は任意位置での断面1次モーメントを断面積で割ることによって得られる。

次に、断面の主軸位置を求めてみよう。まず、任意座標系  $(y, z)$  から主軸位置まで座標系を回転し、両座標系間の関係を次式で表す。

$$\begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7.12)$$

### 7.3 座標変換によって図芯と主軸を求める

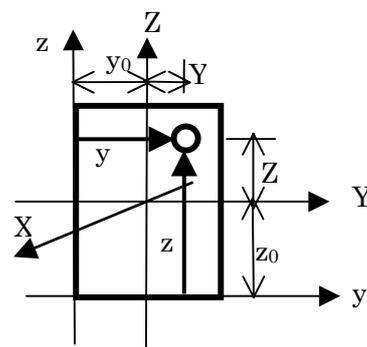


図 7-2 断面内の図芯位置

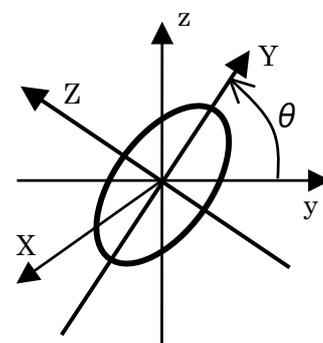


図 7-3 断面内の主軸位置

上式をYとZ軸に関する断面相乗モーメントに代入し、ゼロと置くことによって、回転角θを求める。

$$\begin{aligned}
 I_{YZ} &= \int_A ZY dA = \int_A (y \cos \theta + z \sin \theta)(-y \sin \theta + z \cos \theta) dA \\
 &= \int_A \{(z^2 - y^2) \sin \theta \cos \theta + zy(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} dA \\
 &= \frac{\int_A z^2 dA - \int_A y^2 dA}{2} \sin 2\theta + \int_A zy dA \cos 2\theta \\
 &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\theta + I_{yz} \cos 2\theta \quad \dots\dots(7.13)
 \end{aligned}$$

ここで、次式を用いる。  
 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$   
 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

上式の $I_y, I_z, I_{yz}$ は既に座標を平行移動した図芯位置での断面二次モーメント及び断面相乗モーメントである。ここで、 $I_{YZ}$ が主軸位置での値であることからゼロであり、式(7.13)より次式が得られる。

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad \dots\dots(7.14)$$

上式から得られるθが、任意の座標系からの回転角であり、この座標系が主軸となる。ただし、円形断面のように、 $I_y$ と $I_z$ が同じ値の場合は、任意位置が主軸となる。

主軸位置の断面二次モーメントは、図芯での任意回転方向座標系における断面特性を用い、式(7.13)を参考にすると次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 I_Y &= I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2\theta + I_z \sin^2 \theta \\
 I_Z &= I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2\theta + I_z \cos^2 \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.15)$$

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \int_A Y^2 dA \\
 &= \int_A (-y \sin \theta + z \cos \theta)^2 dA \\
 &= \sin^2 \theta \int_A (-y)^2 dA \\
 &\quad - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A (yz) dA \\
 &\quad + \cos^2 \theta \int_A (z)^2 dA \\
 &= I_z \sin^2 \theta \\
 &\quad - 2I_{yz} \sin \theta \cos \theta \\
 &\quad + I_y \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

上式から分かるように、主軸は互いに直交し、この断面二次モーメントは最大値と最小値となる。

図芯及び主軸位置での断面力とひずみの関係は、式(7.8)より次式となる。

$$\left\{ \begin{matrix} N \\ M_Z \\ M_Y \end{matrix} \right\} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_Z & 0 \\ 0 & 0 & I_Y \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_Z \\ \kappa_Y \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots(7.16)$$

上式を用いると各ひずみは、容易に次のように求められる。

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA}; \quad \kappa_Z = \frac{M_Z}{EI_Z}; \quad \kappa_Y = \frac{M_Y}{EI_Y} \quad \dots\dots(7.17)$$

最終的に、断面内の軸方向応力は式(7.17)を式(7.2)に代入すると、

次式のように得られる。

$$\sigma_x(Y,Z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{M_y}{I_y} Z \quad \dots\dots(7.18)$$

圧縮軸力と曲げモーメントが同時に断面に生じるとき、応力分布は一樣圧縮と曲げ応力の和となる。その際、圧縮力の作用点が断面内のある領域内にあれば、断面内には引張応力を生じない。この領域を**断面の核**という。本節では、この断面の核を求める。

図 7-4a に示す圧縮力  $P$  が図芯を通らなると、断面内に曲げモーメントを生じる。図芯と軸力作用点までの距離を偏心 ( $y', z'$ ) とすると、断面内に生じる軸力と2軸の曲げモーメントは同図 b と c を参考に次式となる。

$$\left. \begin{aligned} N &= -P \\ M_y &= -Pz' \\ M_z &= Py' \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.19)$$

断面内の応力は、式(7.18)に式(7.19)を代入すると、

$$\sigma_x(Y,Z) = -\frac{P}{A} \left( 1 + \frac{Ay'}{I_z} Y + \frac{Az'}{I_y} Z \right) \quad \dots\dots(7.20)$$

となる。ここで、断面内の任意点 ( $Y, Z$ ) で、応力  $\sigma_x$  が引張とならない領域が核である。

具体的な例で断面の核を求めてみよう。まず、幅  $B$  でせい  $D$  の長方形断面についてその核を求める。荷重  $P$  が第1象限にあるとすると、応力が最も小さくなるのは第3象限の角である。この部分の応力は、その位置座標が  $(-D/2, -B/2)$  であることから、式(7.20)より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_x(Y,Z) &= -\frac{P}{BD} \left( 1 - \frac{Ay'}{DB^2} - \frac{Az'}{BD^2} \right) \\ &= -\frac{P}{BD} \left( 1 - \frac{6y'}{B} - \frac{6z'}{D} \right) \quad \dots\dots(7.21) \end{aligned}$$

ここで、応力が常に圧縮であるためには次式が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} 1 - \frac{6y'}{B} - \frac{6z'}{D} &\geq 0 \quad (y' \geq 0; z' \geq 0) \\ \frac{y'}{B} + \frac{z'}{D} &\leq \frac{1}{6} \quad \dots\dots(3.22) \end{aligned}$$

### 7.4 断面の核

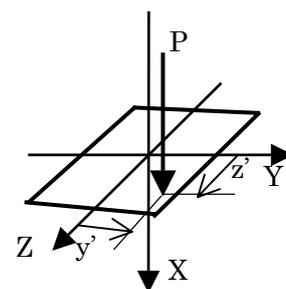


図 7-4a 断面に働く軸力

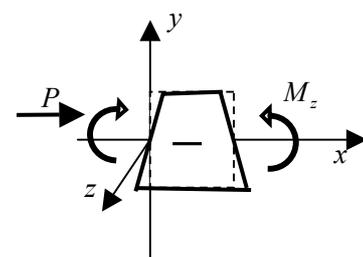


図 7-4b 図芯からずれた軸力によって生じる曲げモーメント

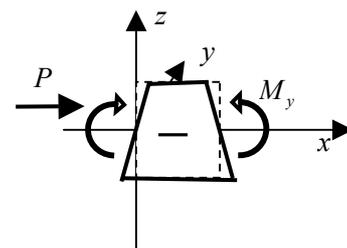


図 7-4c 図芯からずれた軸力によって生じる曲げモーメント

他の象限でも同様であり、長方形断面の核は右図に示すようになる。

次に、半径  $R$  の丸棒について考察しよう。丸棒は軸対称であるため、その核も円形となる。核半径を求めてみよう。丸棒の  $Z$ 、 $Y$  軸の断面二次モーメントは同じであり、断面積と共に以下の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ I_Y = I_Z &= \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.23)$$

第1象限に荷重があるとするとき、応力が最も小さくなる位置は、荷重と断面中心位置を伸ばした第3象限の縁である。上式を式(7.20)に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_x(Y,Z) &= -\frac{P}{\pi R^2} \left( 1 + \frac{\pi R^2 y'}{\pi R^4} Y + \frac{\pi R^2 z'}{\pi R^4} Z \right) \\ &= -\frac{P}{\pi R^2} \left( 1 + \frac{4y'Y + 4z'Z}{R^2} \right) \end{aligned} \dots\dots(7.24)$$

となる。ここで、図 7-5b を参考に、荷重位置と応力位置の関係が、

$$\left. \begin{aligned} y' &= -\alpha Y \\ z' &= -\alpha Z \\ Y^2 + Z^2 &= R^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.25)$$

となり、式(7.25)を式(7.24)に代入する。応力が常に圧縮であるためには、次式が成立しなければならない。

$$1 - \frac{4\alpha(Y^2 + Z^2)}{R^2} \geq 0; \quad \alpha \leq \frac{1}{4} \dots\dots(7.26)$$

ここで、 $\alpha$  は丸棒半径に対する割合を示し、 $\alpha R$  が断面の核半径を示す。

厚さ  $t$  の薄肉のパイプでは、断面積と断面二次モーメントは、

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\pi R t \\ I_Y = I_Z &= \pi R^3 t \end{aligned} \right\} \dots\dots(7.27)$$

であり (第 4.3 節参照)、上式を式(7.20)に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_x(Y,Z) &= -\frac{P}{2\pi R t} \left( 1 + \frac{2\pi R t y'}{\pi R^3 t} Y + \frac{2\pi R t z'}{\pi R^3 t} Z \right) \\ &= -\frac{P}{2\pi R t} \left( 1 + \frac{2y'Y + 2z'Z}{R^2} \right) \end{aligned} \dots\dots(7.28)$$

となる。第1象限に荷重があるとするとき、応力が最も小さくなる位置は、

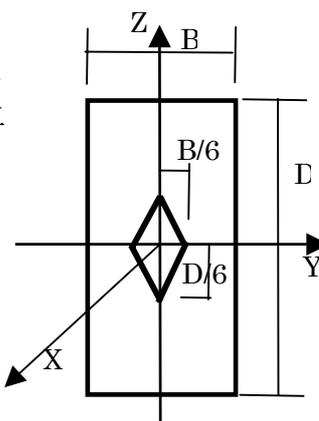


図 7-5a 長方形断面の核

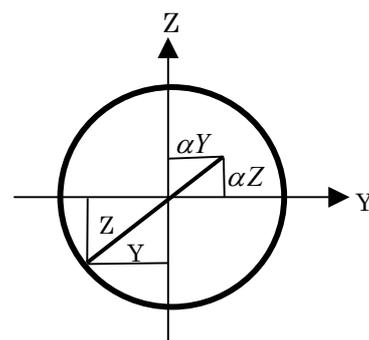


図 7-5b 荷重と応力位置の関係

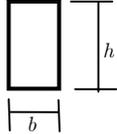
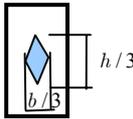
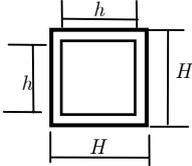
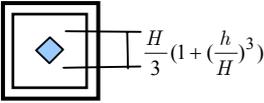
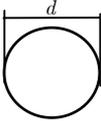
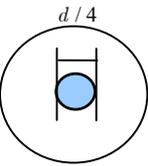
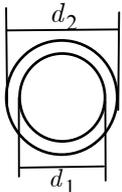
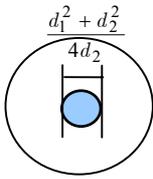
荷重と断面中心位置を伸ばした第3象限の縁であり、荷重位置と応力位置の関係は式(7.25)より与えられる。また、応力が常に圧縮であるためには、次式が成立しなければならず、求めた $\alpha$ はパイプ半径に対する割合で、 $\alpha R$ が断面の核半径を示す。

$$1 - \frac{2\alpha(Y^2 + Z^2)}{R^2} \geq 0$$

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots(7.29)$$

なお、代表的な断面の核が表7-1に示されている。

表7-1 断面の核

断面形状	核
	
	
	
	

本節では、断面内に生じる応力分布について、図を用いて復習しよう。最初に、下図のように単純梁に荷重を加えたときの断面内の応力状態、つまり、曲げモーメントのみが生じる場合について考える。断面は図のように長方形断面とする。また、応力とひずみの関係は線形とする。

7.5 断面内の応力状態

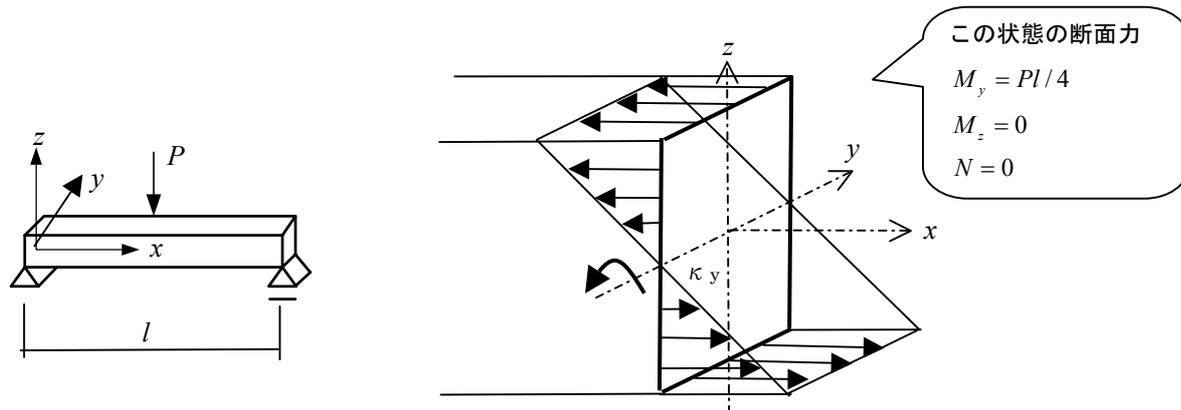


図 7-6 曲げモーメントによる断面内応力

この荷重状態は、軸力が発生しない純曲げ状態であり、式(7.1)で示される軸方向ひずみは、曲率 $\kappa_y$ によってのみ発生する。平面保持の仮定から、図芯 ( $x$  軸) に対する法面は、変形後も平面を保つとしている。そのため、断面内の軸方向応力は、 $y$  軸が応力の生じない中立軸となり、その上側は圧縮、下側は引張となる。

次に同じ単純梁に水平方向に荷重を加えたとき、断面内に生じる応力状態を考える。図のように  $z$  軸が中立軸となり、軸方向応力は手前側が圧縮となり奥側が引張となる。

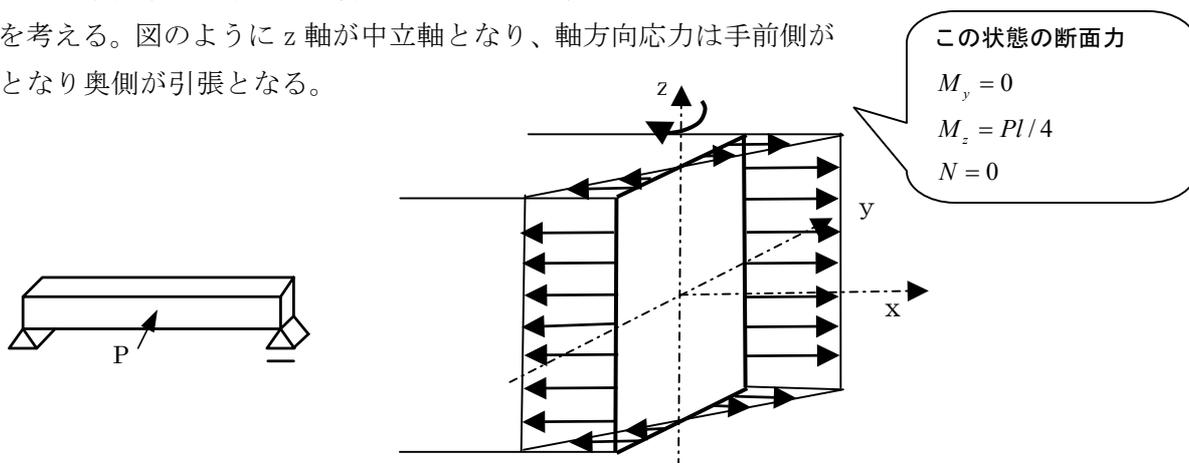


図 7-7 弱軸方向の曲げモーメントによる断面内応力

先の2つの単純梁はどちらも1軸応力状態であった。この2つの状態を足すと中立軸が回転し、下図のような状態となって2軸応力場となる。

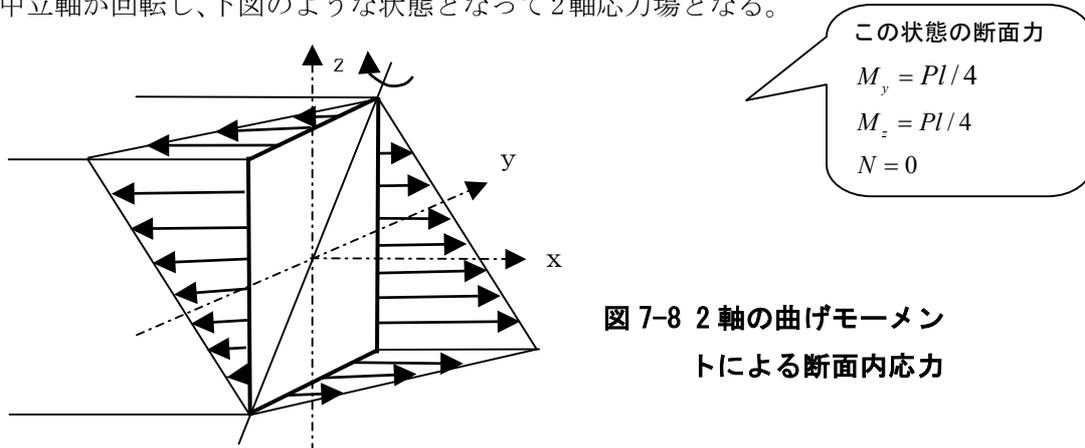


図 7-8 2軸の曲げモーメントによる断面内応力

さらに、単純梁に下図のような荷重を加えると、次の応力場に図 7-8 の応力が足し合わされ、3 軸応力状態となり図 7-10 のようになる。

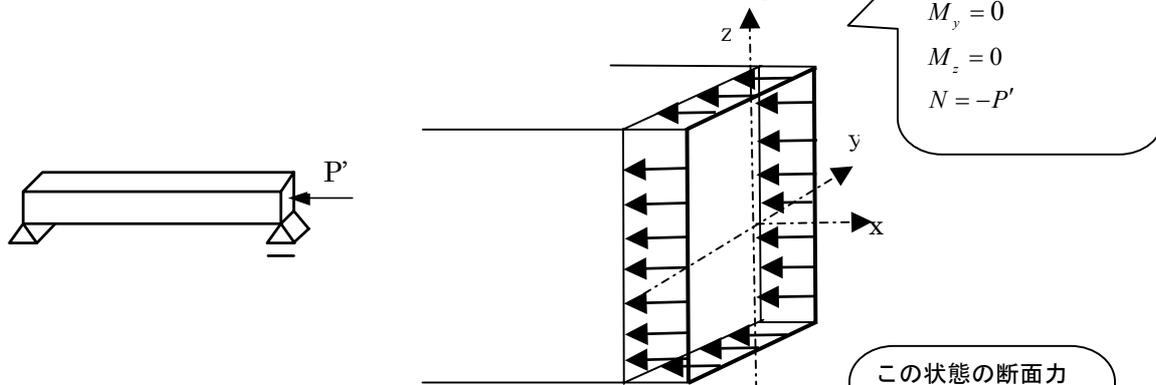


図 7-9 軸力による断面内応力

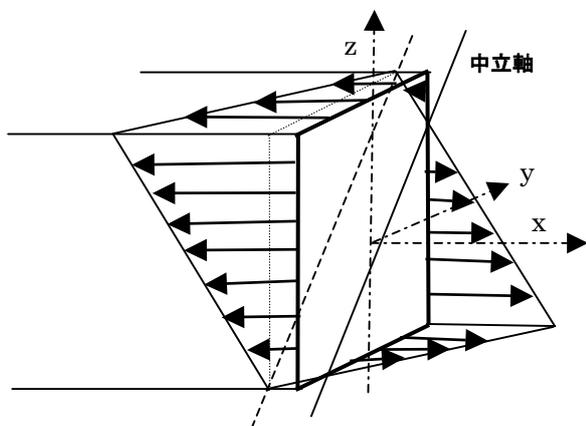
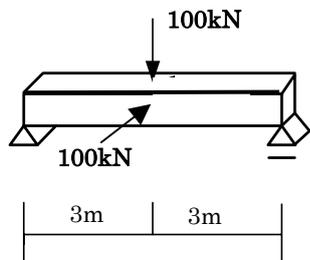


図 7-10 軸力と 2 次の曲げモーメントによる断面内応力

本章で使用する解析モデルは、下図に示す単純梁である。荷重は、次の 2 形式とする。課題 1 は部材の中央位置に鉛直・水平 2 方向を受けるモデルであり、課題 2 は、軸方向と鉛直・水平 2 方向の集中荷重を受けるモデルである。このモデルでは、先に示された 2 軸、3 軸応力状態が得られる。

7.6 多軸応力状態における解析モデル

課題：1



課題：2

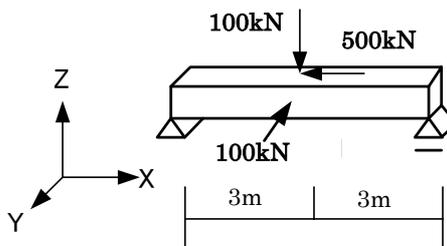


図 7-11 解析モデル

7.7 数値解析結果  
の分析

部材の断面は第3章で用いたものと同様の角型鋼管とする。SPACE のモデラーを用いて、フォルダ「第7章」-「課題1」に上記の2つの解析モデルを作成する。作成方法の詳細は第3章を参照されたい。

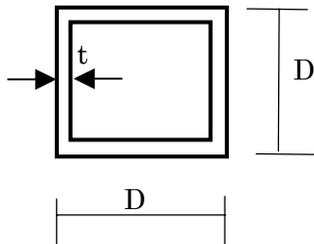


図 7-12 部材断面

角型鋼管の断面特性を以下に示す

$$D = 40\text{cm}; \quad t = 1.2\text{cm}$$

$$A = 186.24\text{cm}^2$$

$$I_y = 0.4677 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{0.4677 \times 10^5}{20} = 2339\text{cm}^3$$

解析モデルは単純梁であり、課題1は部材の中央位置に鉛直・水平2方向を受けるモデル、課題2は軸方向と鉛直・水平2方向の集中荷重を受けるモデルである。2つのモデルについて、静的ソルバーを用いて解析する。せん断変形を考慮しないように設定した後、解析種別として、線形解析を用いる。

次に、プレゼンターを利用して断面内の応力状態を観察しよう。課題1のモデルでは、部材中央に2方向の荷重が加えられ、2軸方向に曲げモーメントが生じている。図7-13には、その様子が得られている。

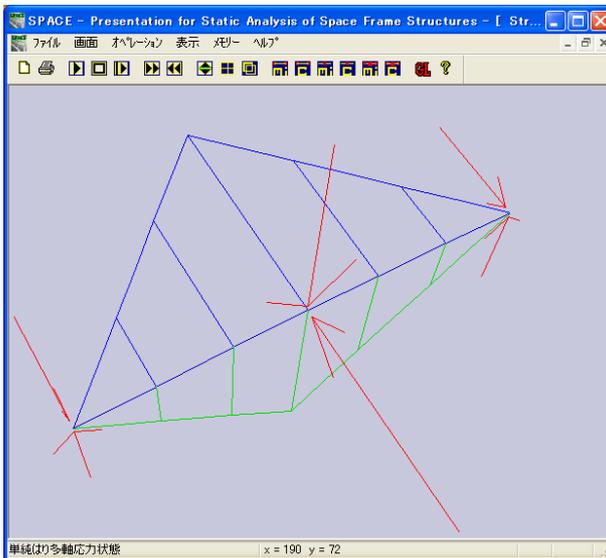


図 7-13 課題1における荷重と曲げモーメント

荷重ファイルは、

鉛直・水平荷重データファイル: load1.dat →s1  
軸方向荷重データファイル :load2.dat →s2

であり、荷重状態は、次の通りである。

	s1	s2
ステップ数		
課題1 :	20	0.05
課題2 :	20	0.05
	20	0
		0.05

このモデルの最大曲げモーメントは、両軸共に、部材中央で、

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = \frac{100 \cdot 600}{4} = 15000\text{kNcm}$$

である。

部材中央における断面内2軸応力状態を次の図7-14に示す。同図は中央部で切断した断面で、上図骨組の向う側からこちら側を見た図である。

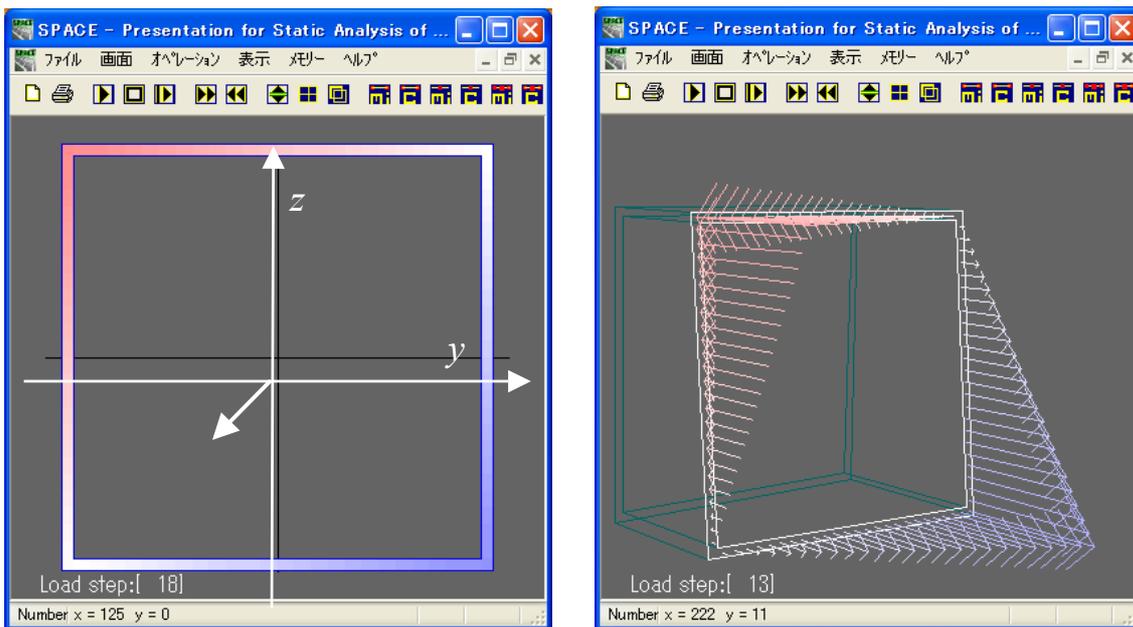


図 7-14 課題 1 における部材中央の断面応力分布

断面左上が最大圧縮応力、右下が最大引張応力状態となっている。同図より中立軸が断面右上角から左下角部分に現れていることが良く理解できる。

断面右下のファイバー位置における応力とひずみの関係が、図 7-15 に示される。精度良く応力とひずみを検索したい場合は、図 7-15 の図形上でマウスを右クリックし、表示されたプルダウンメニューより、「データ出力」→「波形データ出力」を選択し、ファイルにデータを出力する。出力されたファイルの内容の一部を以下に示す。

ステップ番号	ひずみ	応力
17	0.00051368	10.53035545
18	0.00054389	11.14978790
19	0.00057411	11.76922131
20	0.00060432	12.38865376

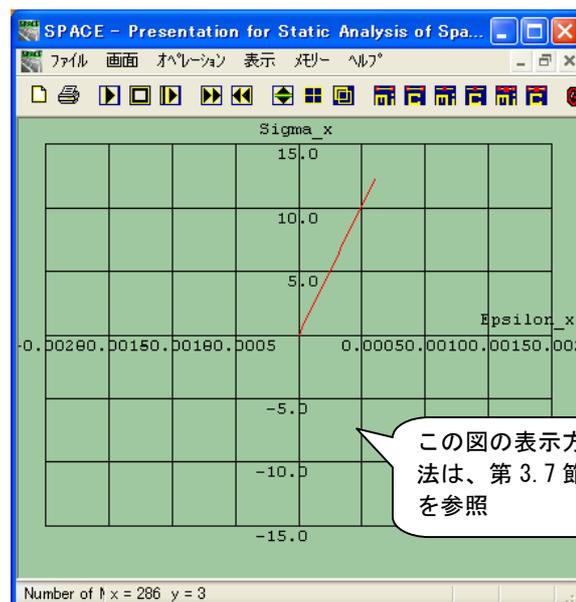


図 7-15 断面内ファイバーの応力とひずみ

断面角のファイバー応力を理論式で計算すると、圧縮・引張共に

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_z} z + \frac{M_z}{I_y} y = \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4 + \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4$$

$$\sigma_{x_t} = 12.38 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_{x_c} = -12.38 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots\dots(7.30)$$

両端ファイバーモデルは、部材長の 0.03 倍がファイバー要素の長さであり、応力評価位置は、その中央となる。ここでは、部材長は 100cm で、評価位置は、1.5cm となる。従って、その位置の曲げモーメントは、 $150 \times 298.5 / 300$  となる。

となり、計算結果と良い一致を示す。ただし、最大引張縁応力あるいは最大圧縮縁応力は、式(7.18)より、

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_z} z + \frac{M_z}{I_y} y = \frac{15000}{46770} 20 + \frac{15000}{46770} 20$$

$$\sigma_{x_t} = 12.83 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_{x_c} = -12.83 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots\dots(7.31)$$

となり、応力が 3.5% 異なることになる。この差異は、ファイバーから得られる応力やひずみが、断面の縁応力でもないし、部材中央の応力でもない事による。存在するファイバーの要素中央位置における応力とひずみを表すということが理解できる。

次に、課題2を用いて、3軸応力状態を観察しよう。課題2のモデルでは、部材中央に軸方向荷重と鉛直、水平2方向の集中荷重が加えられ、軸力と2軸方向に曲げモーメントが生じている。図7-16には、その様子が得られている。ここでは、鉛直、水平2方向の集中荷重によって、2軸の曲げモーメントが生じ、また、軸方向荷重によって、同図の手前半分に圧縮軸力が生じている。

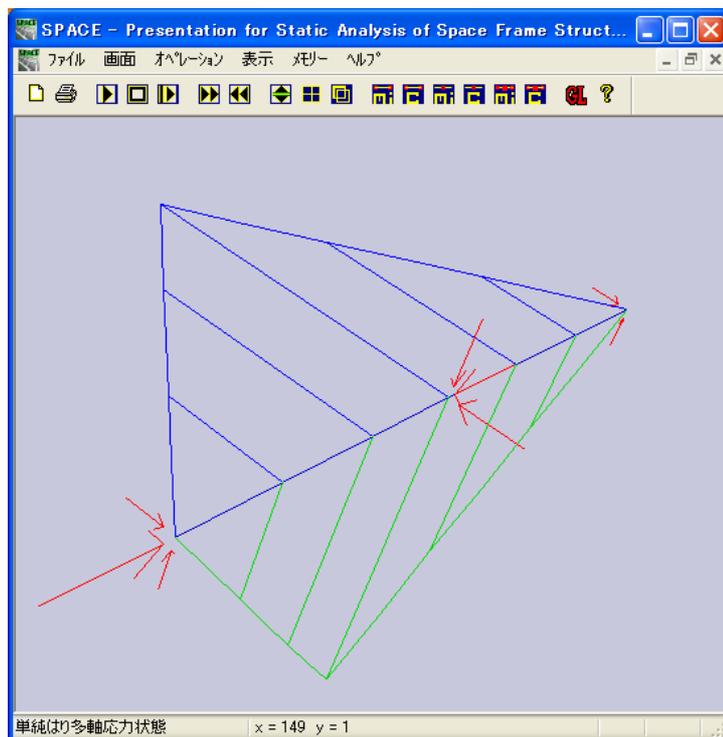


図 7-16 課題2の荷重と曲げモーメント

部材中央における断面内2軸応力状態を次の図7-17に示す。同図は中央部で切断した断面で、上図骨組の向う側からこちら側を見た図である。

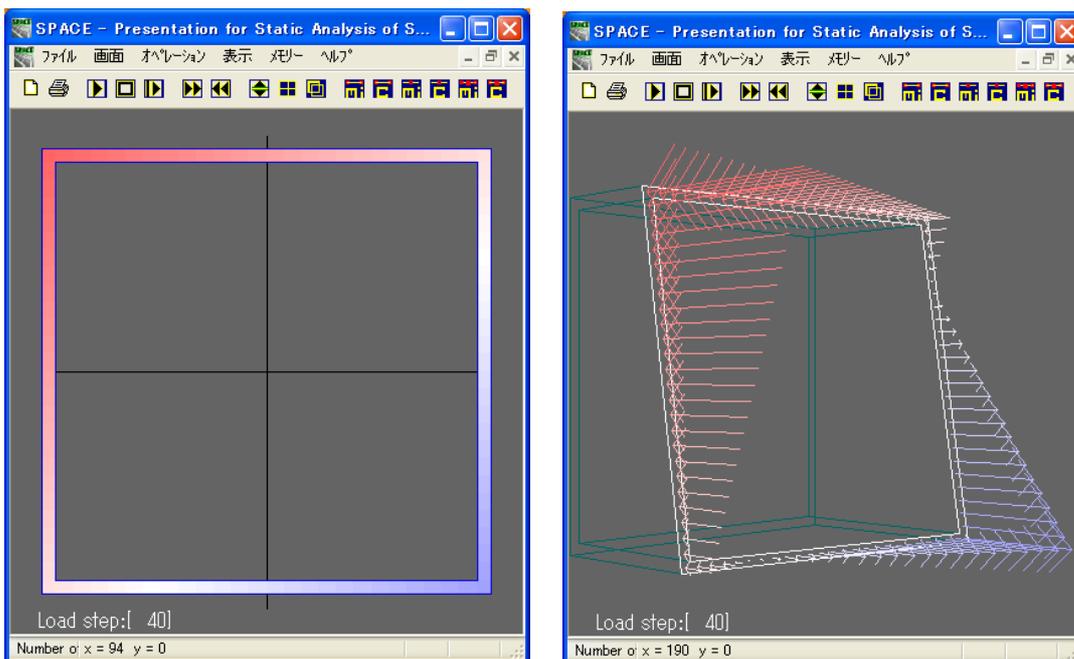


図 7-17 課題 2 における部材中央の断面応力分布

断面左上が最大圧縮応力、右下が最大引張応力状態となっている。同図より中立軸が断面右上から左下部分に現れているが、課題 1 とは異なり、中立軸は角部分より少し下がった位置に生じている。

断面内に生じる最大圧縮応力と最大引張応力が生じるファイバー位置での応力とひずみの関係が、図 7-18 に示される。左の図が最大引張応力であり、右の図が最大圧縮応力を表す。さらに精度良く応力とひずみを検索したい場合は、前節と同様の操作を行い、ファイルに出力する。



図 7-18 断面内の最大引張応力・最大圧縮応力とひずみの関係

最大引張応力とひずみの関係、最大圧縮応力とひずみの関係を次に示す。

最大引張応力		
ステップ数	ひずみ	応力
38	0.00048646	9.97241688
39	0.00047991	9.83818150
40	0.00047336	9.70394611

最大圧縮応力		
ステップ数	ひずみ	応力
38	-0.00072219	-14.80489063
39	-0.00072874	-14.93912601
40	-0.00073529	-15.07336140

ファイバー位置の応力を理論式で計算する。引張応力が最大となるファイバーは断面右下であり、その応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_{x-t} &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_z} z + \frac{M_z}{I_y} y \\ &= -\frac{500}{186.24} + \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4 + \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4 \\ &= 9.70 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots\dots(7.32)\end{aligned}$$

また、圧縮応力が最大となるファイバーは断面左上であり、その応力は

$$\begin{aligned}\sigma_{x-c} &= \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_z} z - \frac{M_z}{I_y} y \\ &= -\frac{500}{186.24} - \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4 - \frac{15000}{46770} \frac{298.5}{300} 19.4 \\ &= -15.06 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots\dots(7.33)\end{aligned}$$

となり、計算結果と良い一致を示す。ただし、実際の縁応力は、先に示した理由により、両者共にファイバーの応力と 2.9% 異なる

断面の核について、第 7.4 節で学んだ。ここでは、数値解析を用いて断面の核を求めてみよう。解析モデルは次に示すように、片持ち梁の先端に軸方向荷重とモーメントが加わったモデルとする。

## 7.8 断面の核を求める解析モデル

課題3

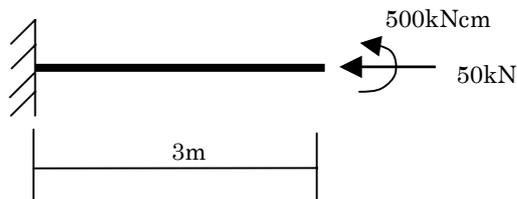


図 7-19 解析モデル

使用する断面は、次に示す薄肉鋼管である。

薄肉鋼管の断面特性を以下に示す  
 $D = 40cm$ ;  $t = 0.2cm$

薄肉鋼管の断面核は式(7.29)より、半径の1/2であり、使用する断面では、10cmとなる。従って、モーメント荷重が500kNcm加わったとき、縁に中立軸が表れることになる。

荷重ファイルは、

軸方向荷重データファイル : sload1.dat →s1  
 モーメント荷重データファイル : sload2.dat →s2

であり、荷重状態は次の通りである。

	ステップ数	s1	s2
課題3 :	20	0.05	0
	120	0	0.01



解析モデルを、「第7章」—「課題3」フォルダに作成し、コントロールファイル名は「課題3」とする。このモデルでは、薄肉鋼管を使用するため、図7-20に示すように形状で鋼管を選択し、「ビルドアップ断面」ボタンをクリックしてダイアログを表示させる。図7-21に示すダイアログで断面を設定する。

図 7-20 断面設定

7.9 断面核モデルの数値解析結果の分析



図 7-21 ビルドアップ断面設定で使用断面を設定する

次の、ダイアログで特殊断面を設定する。断面分割数は「24」とする。

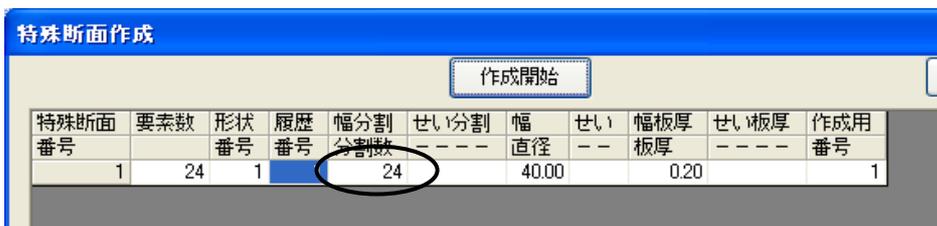


図 7-22 特殊断面作成ダイアログで断面設定

次に示すモデラー画面を用いて、解析モデルを作成する。まず、部材を設定し、次に境界条件、最後に荷重を設定する。

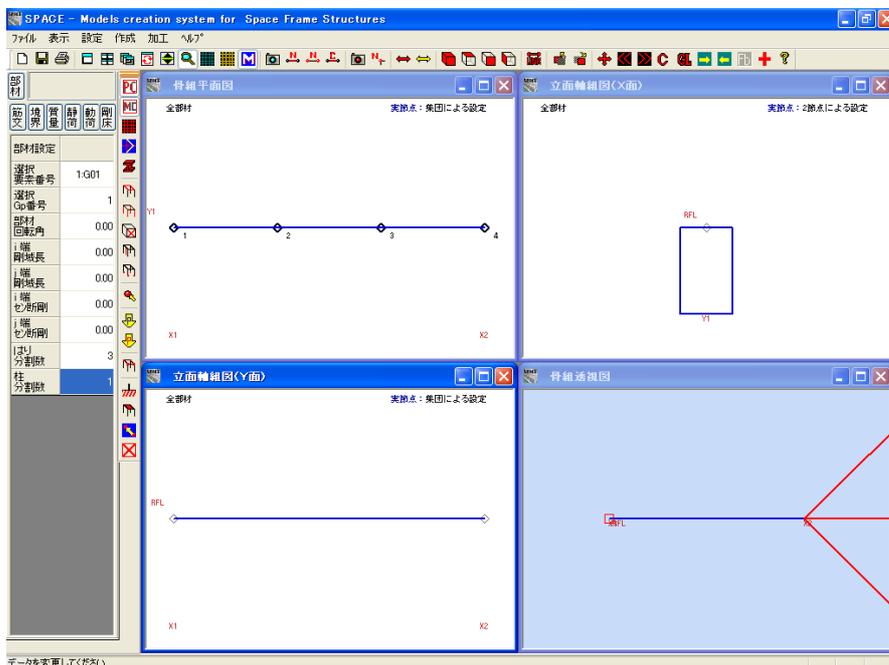


図 7-23 モデラーの画面を用いて解析モデルを作成する

設定が終了した後、次の節点情報を表示させ、設定項目を確認しよう。

図 7-24a モデルの座標

座標	局所座標系	境界条件・剛床	静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	x座標	y座標	z座標	不整x座標	不整y座標	不整z座標		
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
2	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
3	200.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
4	300.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		

図 7-24b モデルの境界

座標	局所座標系	境界条件・剛床	静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	変位u(x)	変位v(y)	変位w(z)	回転θx	回転θy	回転θz	剛床番号	
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	

図 7-24c 軸方向静的荷重

座標	局所座標系	境界条件・剛床	静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	Px	Py	Pz	Mx	My	Mz		
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
4	-50.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		

図 7-24d モーメント静的荷重

座標	局所座標系	境界条件・剛床	静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	Px	Py	Pz	Mx	My	Mz		
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
4	0.00	0.00	0.00	0.00	-500.00	0.00		

確認が終わると、図 7-25 に示すダイアログを用いて、設定したデータをファイルに出力する。これで、解析モデルの設定は全て終了であり、後は、静的ソルバーを起動して、数値解析を行う。解析種別は、「線形解析」を選択する。

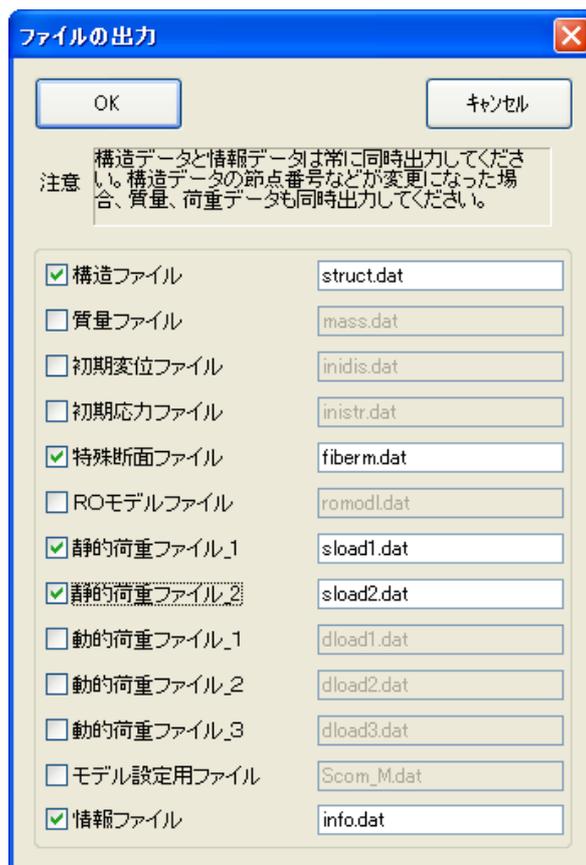


図 7-25 ファイル出力ダイアログ

静的プレゼンターを用いて、解析結果を分析しよう。静的プレゼンターを起動し、子ウインドウに解析モデル表示させる。アニメーションを用いると、最初の 20 ステップは軸力が増加し、次の 120 ステップで、図 7-26 に示すように部材に一樣な曲げモーメントが徐々に増加していく様子が観察される。

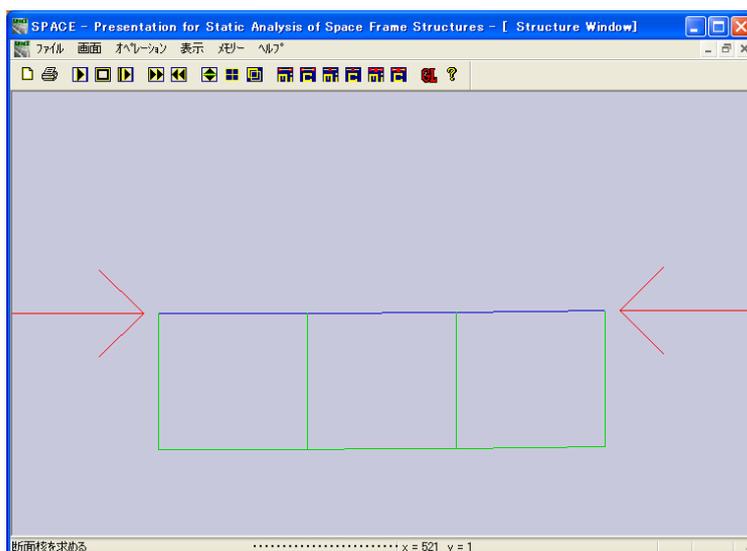


図 7-26 荷重と曲げモーメント

先に示したように、モーメント荷重が 500kNcm 加わったとき、断面下部

の縁に中立軸が現れることになる。モーメント荷重が100ステップでモーメント荷重が500kNmとなるため、軸方向荷重ステップ20を加えて、120ステップ目に断面下部の縁に中立軸が現れる。

図7-27aには、ステップ100での断面内応力分布が示される。ここでは、断面内全てで圧縮応力となっている。また、図7-27bには、ステップ140での断面内応力分布が示される。断面下部に引張応力が見られ、中立軸が既に断面内に入っていることが分かる。

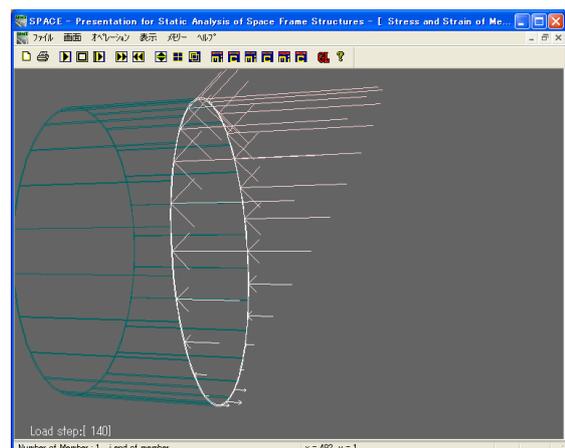
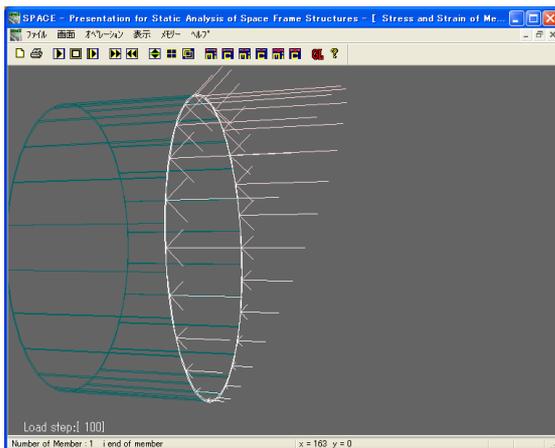


図7-27a ステップ100での断面内応力分布      図7-27b ステップ140での断面内応力分布

図7-27cには、ステップ120での断面内応力分布が示されている。図に見られるように、断面の最下部で応力がゼロとなっており、この荷重状態が断面核の境界であることを示している。

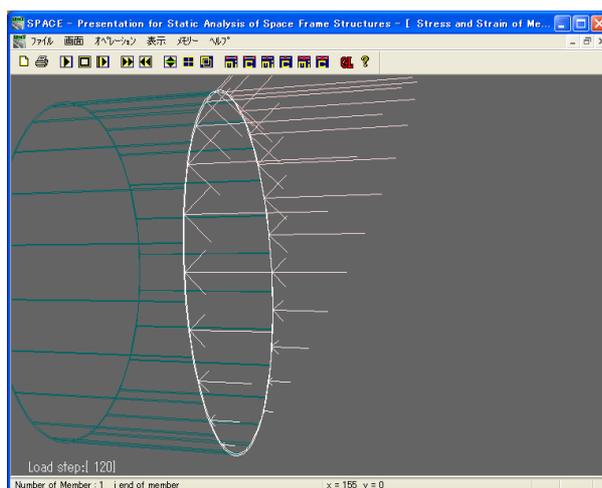


図7-27c ステップ120での断面内応力分布

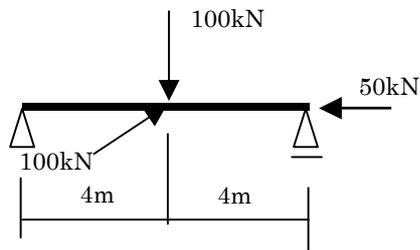
## 7.10 まとめ

本章では、最も単純な骨組である単純梁を用いて、2軸の曲げモーメントと軸力が存在するときの断面内における軸方向の応力分布を解析

した。また、SPACE を用いて数値解析し、その結果と理論解とを比較・検討した。数値解析を分析することで、断面内の応力分布と軸力や曲げモーメントの関係がより詳しく理解できることになる。

7.11 問題

**問 7-1** 次に示す静的構造物について、SPACE を用いて応力解析を実行しなさい。また、実際に手を使って解析し、両者の断面内の最大応力値を比較しなさい。なお、部材断面は、H-350x175x7x11 を使用するものとする。



両問題の断面とも両端ファイバーモデルを用い、断面設定では、図 7-21 で示したビルドアップ断面を用いて設定しなさい。

**問 7-2** 次に示す静的構造物を用いて、断面核を実証しなさい。断面は、□-300x300x6r15 の矩形とする。荷重 P と M は適切に設定せよ。

