



第8章 梁の微分方程式

ポイント：ベルヌーイ・オイラー梁による梁の微分方程式

平面保持と法線保持の仮定

本章では、梁理論の基本となるベルヌーイ・オイラー梁に従い、3次元物体である梁を1次元の線材に置換し、その挙動を支配する梁の微分方程式を誘導する。このベルヌーイ・オイラー梁は、平面保持と法線保持の両仮定で成立しており、この2種の仮定を用いることで、梁内の応力やひずみを容易に求めることができる。さらに、梁の微分方程式を用いて、最も単純な構造物のたわみ曲線と最大たわみを求める。

次に、SPACE を用いて数値解析を実施し、理論と解析結果を比較・検討する。また、その過程で上記の関係を実感し、理解することになる。

キーワード

ベルヌーイ・オイラー梁、法線保持の仮定、平面保持の仮定、梁の微分方程式、単純梁のたわみ曲線と最大たわみ

8.1 はじめに

本節では、部材が曲げられて発生するひずみと変形の間関係を理解し、部材内に生じる応力と断面力との間関係を学ぶ。部材の変形は、図芯位置を x 方向につなげた直線が変形することによって表される。この x 軸方向の直線は材軸と呼ばれ、断面の図芯位置を貫く直線である。この直線の変形状態から断面内のひずみや応力を求める方法が梁理論と呼ばれる手法である。以下に、代表的な梁理論であるベルヌーイ・オイラー梁について説明しよう。

図8-1(a)には、梁が曲げ変形を生じる前の状態が示されており、最初に、原点より x の位置に微小な間隔 dx の両端に材軸に垂直な2つの平面を考える。これを法面と呼ぶ。次に、荷重を受け、材が曲がった後の変形状態を考え、断面内のひずみと応力を求める。その際、この2つの法面が「部材が変形した後も、材軸に垂直でしかも平面を保っている」というベルヌーイ・オイラーの仮定が用いられる。このベルヌーイ・オイラー仮定は2つの仮定より成り立っており、一つは、変形後の法面が材軸に対し常に垂直を保つということである。これは、梁内部のどの位置

8.2 曲げを受ける梁の変形

これまでは、断面力の釣合や、平面保持仮定から梁内部の応力の状態を学んできた。これからは、梁の変形状態を理解し、部材が曲げられたときの支配方程式を誘導する。この方程式を用いることで、梁の変形状態や最大たわみ量が求められることになる。

でも、せん断変形を生じていないことを意味する。他の一つは、法面が変形後も平面であることであり、この仮定は平面保持とも呼ばれており、これを用いると梁内の任意の位置で、ひずみが容易に求められることになる。既に、第3章において断面内のひずみの分布を一次式(3.3)としたが、実は、この平面保持の仮定に基づくものである。

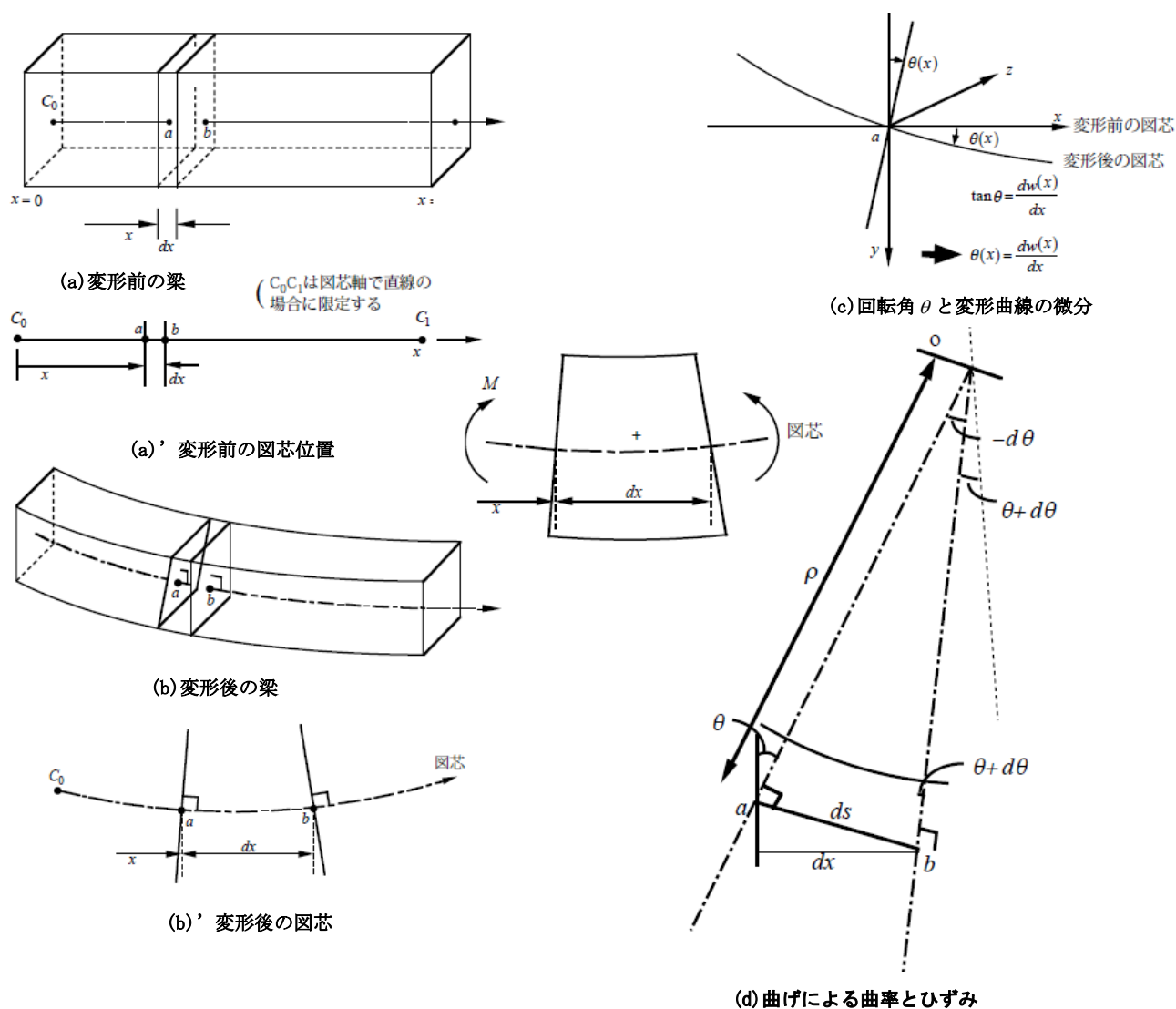


図 8-1 梁部材における曲げによる変形

それでは、具体的にこの仮定に基づいて、梁の曲げ変形とひずみの関係を求めてみよう。図 8-1(d) より、曲げ変形を受けると、微少部分の両端 a と b の法線は一点 o で交わることが分かる。この点を曲率中心と呼び、また、図中の ρ は曲率半径という。図芯上の a 点と b 点における回転角は $\theta(x)$ と $\theta(x) + d\theta$ であり、回転角は、法線が変形後も材軸に垂直

であることと、 $\theta(x)$ が微小であることから、図芯の変位 $w(x)$ を用いると次式で表される。

$$\frac{dw}{dx} = \theta \quad \dots\dots(8.1)$$

法線保持の仮定

また、 a 点と b 点の変形後における法線の回転角の差、つまり、回転角の増分量 $d\theta$ は、図8-1(d)で見られるように、 $\theta - (\theta + d\theta)$ より求められる。また変形後の a 点と b 点を直線で結んだ線分 ds は、角度がラジアン表示であることから、次式で表される。

$$-\rho d\theta = ds \quad \dots\dots(8.2)$$

部材が局所的に大きく曲げられることがない場合、つまり、 $d\theta$ が極端に大きくなると ds は dx にほぼ等しいとして良い。ただし、変形後の材軸 $a-b$ 間の長さは、曲げ変形のみを考えた場合、図芯位置でひずみがゼロであることから元の長さ dx に等しいとしている。従って、上式を書き換えると、

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\rho} \quad \dots\dots(8.3)$$

となり、式(8.1)と上式を考慮すると、最終的に、曲率半径分の1が、材軸の変位 $w(x)$ を2回微分した次式として得られる。

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{\rho} \quad \dots\dots(8.4)$$

次に、断面内のひずみを求めることにする。ひずみが計算しやすいように、変形後の微小断面を図8-2のように描き換える。もちろん、断面内のひずみは図8-1(d)と同一となることは理解できよう。まず、断面内でせい方向の位置 y における軸方向のひずみ ε_x を求める。曲げによって生じるひずみ ε_x は、ひずみの定義式(3.1)より、次のようになる。

$$\varepsilon_x = \frac{(dx + dl) - dx}{dx} = \frac{dl}{dx} \quad \dots\dots(8.5)$$

平面保持の仮定

図8-2より、 dl は法線が直線であることから幾何学的に $dl = -d\theta \cdot y$ で与えられる。これを式(8-5)に代入すると、ひずみは次式となる。

$$\varepsilon_x = -y \frac{d\theta}{dx} = y \frac{1}{\rho} = -y \frac{d^2w}{dx^2} \quad \dots\dots(8.6)$$

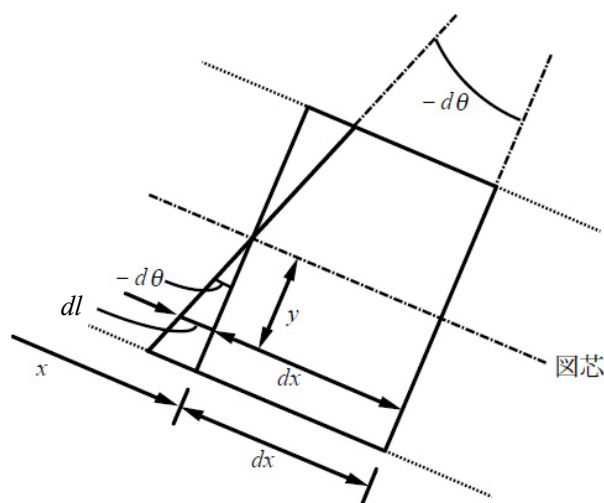


図 8-2 梁断面内の曲げによるひずみと応力

梁理論より得られた部材内のひずみと式(3.3)で仮定したひずみとを比較してみよう。両式から容易に分かるように、法線保持の仮定より得られたひずみは、 y に関する一次式であり、仮定したひずみの中の定数項 κ (曲率) は次式であったことが分かる。

$$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad \dots\dots(8.7)$$

定数項が分かれば、式(3.17)より、次式のように曲げモーメントと変形の関係が求められる。

$$EI_z \frac{d^2w}{dx^2} = -M \quad \dots\dots(8.8)$$

上式が、力の釣合式(6.40)と共に、梁理論で最も基本的であり、かつ重要な微分方程式となる。実は、梁の応力や変形を求めるということは、荷重と境界条件を与え、この2つの方程式を同時に解くことに他ならない。

2つの基本式は、「考えている部材での断面二次モーメントが変化しない」とき、曲げモーメント M は容易に消去され、1つの簡単な微分方程式となる。まず、式(8.8)の両辺を x で2回微分する。ただし、仮定より、断面二次モーメントは変数 x に関しては変化しないから、次式が得られる。

$$EI_z \frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} \quad \dots\dots(8.9)$$

上式と力の釣合式(6.40)より、曲げモーメント M を消去すると、次の

断面力と外力の
釣合式(6.40)

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x)$$

ように4階の微分方程式が得られ、この方程式が断面一様な梁の挙動を支配する。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w \quad \dots\dots(8.10)$$

8.3 梁の釣合から得られる情報

梁内の釣合を示す微分方程式から種々の情報が得られる。表8-1の中の左項をから、曲げモーメントの一階微分はせん断力であり、せん断力の一階微分は荷重に負符号を付けた値に等しいことが分かる。逆に、荷重が加わっていないときは、式(8.10)を積分すれば、せん断力は定数となり、式(6.40)より、曲げモーメントは直線でその傾きはせん断力の大きさに等しいことが分かる。さらに、せん断力は、曲げモーメントを微分して求められることから、せん断力がゼロの位置で、曲げモーメントが極値となる。これらの情報を表8-1にまとめる。

表 8-1 荷重とせん断力、曲げモーメント及びたわみ

荷重の状態	荷重がない部分	集中荷重	等分布荷重
せん断力	定数	荷重位置で荷重と同じ大きさの不連続が生じる	一次式 (直線)
曲げモーメント	一次式 (直線)	荷重位置で折れ曲がる	放物線
回転角	放物線	二次式	三次式
たわみ曲線	三次式	三次式	四次式

8.4 単純梁のたわみ

本節では、梁の微分方程式(8.8)を用いて、等分布荷重 \bar{P}_w を受ける単純梁のたわみ形状を求めてみよう。単純梁は静定構造物であるため、断面力による力の釣合から曲げモーメントやせん断力分布が得られる。ここでは、この求められた曲げモーメントを用いて、単純梁のたわみを求めることにする。

曲げモーメントは既に例題 6.1 で求められており、以下に示す。

$$M(x) = \frac{\bar{P}_w x}{2}(L-x) \quad \dots\dots(8.11)$$

上式を用いると梁の釣合式は式(8.8)より、

$$EI_x \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w x}{2}(L-x) \quad \dots\dots(8.12)$$

さらに、両辺を2回積分すると、

$$EI_z \frac{dw}{dx} = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1 \quad \dots\dots(8.13)$$

$$EI_z w = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2 \quad \dots\dots(8.14)$$

となり、梁のたわみの一般解が得られる。

次に、一端ピン支持、他端ローラー支持という境界条件を与え、一般解における2つの積分定数を求める。ここでは、梁両端のたわみがゼロであると条件より、次式が得られる。

$$EI_z w(0) = C_2 = 0 \quad \dots\dots(8.15)$$

$$EI_z w(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{L^3}{6} - \frac{L^4}{12} \right) + C_1 L + C_2 = 0 \quad \dots\dots(8.16)$$

上式より、残りの積分定数 C_1 が以下のように得られる。

$$C_1 = \frac{\bar{P}_w L^3}{24} \quad \dots\dots(8.17)$$

得られた積分定数をたわみの式(8.14)に代入すると

$$w(x) = \frac{\bar{P}_w}{24EI_z} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \quad \dots\dots(8.18)$$

となり、梁の変形(たわみ)が得られる。最大たわみは、構造及び荷重が対称であることから中央位置 $L/2$ に生じる。また、最大たわみは、極値をとることから、上式を微分し、ゼロと置くことから求めることもできる。すなわち、たわみの一階微分は回転角を表すことから、回転角がゼロとなる位置で最大たわみになるともいえる。

式(8.13)及び(8.17)より、回転角をゼロと置くと、

$$EI_z \frac{dw}{dx} = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{\bar{P}_w L^3}{24} = 0 \quad \dots\dots(8.19)$$

となり、 $x = L/2$ が上式を満足する。

たわみの式(8.18)に $x=L/2$ を代入すると、最大たわみが以下のように求められる。

$$\begin{aligned} w_{\max} = w(L/2) &= \frac{\bar{P}_w}{24EI_z} \left(\frac{L^4}{16} - 2L \frac{L^3}{8} + L^3 \frac{L}{2} \right) \\ &= \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z} \end{aligned} \quad \dots\dots(8.20)$$

梁が荷重を受けると、梁はたわみ、その際、梁の内部にはひずみと応力が生じて内力と外力が釣り合った状態となる。前章の梁理論では、この釣合状態を曲げモーメント、せん断力そして軸力という断面力を用いて表現した。この釣合式から得られた断面力と内部に生じているひずみや応力の関係を、梁理論からさらに詳しく理解しよう。ただし、ここでは曲げモーメントのみで軸力は生じていないものとする。

平面保持の仮定（オイラー・ベルヌーイ仮定）に基づくと、断面内のひずみ分布は、軸力が加わらない場合、式(8.6)のように、変数 y に関する1次式で表される。もちろん、断面内の座標は図芯位置を原点にとっている。

$$\varepsilon_x = \kappa y = -y \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \dots\dots(8.21)$$

部材が曲げられて生じるひずみは、上式で決定され、その大きさは、変位 w の2階微分に比例する。梁では、変位 $w(x)$ が表す変形状態を一般にたわみと呼ぶ。このテキストでは、たわみという言葉も併用している。梁理論で挙動が表される範囲では、たわみがどのような分布状態でも、またどのような大きさでも、あるいは、鉄筋コンクリートのようにヤング係数が異なる材料によって構成されている断面においても、断面内のひずみの分布は、 y の1次式で表されていることを覚えておこう。

次に、ひずみが徐々に大きくなる時、断面内部の応力はどのような分布状態になるかを考えてみよう。第2章で、鋼やコンクリートに関する応力とひずみの関係を学んだ。実験から得たこれらの関係をそのまま、計算に使用することは、理論をより複雑にしてしまう。そこで、ここでは、使用する部材の応力とひずみの関係を図8-3に示すような2つの直線で表し、応力とひずみの関係を簡単にする。これをバイリニア型と呼ぶ。特に、塑性状態を表す第二直線の剛性がゼロとなる材料は完全弾塑性体と呼ばれる。計算と理解が容易となるため、ここではこの材料特性を用

8.5 曲げモーメント による断面内の 応力

いることにする。また、理論を容易にするため、断面形状は上下方向対称とする。断面内で最大ひずみとなる位置は、断面の縁であり、このひずみを引張縁ひずみ ε_t と圧縮縁ひずみ ε_c で表す。

最初に、断面内の最大ひずみが図8-4に示される降伏ひずみ ε_y より小さい場合、つまり、断面内が全て弾性状態である場合について考える。断面全体が弾性であるため、応力度とひずみ度の関係が線形で表され、ひずみ分布と同様に、応力分布も、次のように y に関する1次式で表される。

$$\sigma_x = E\kappa y = -yE \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \dots\dots(8.22)$$

図8-4に、この場合の応力とひずみの分布状態が示されている。弾性状態における曲げモーメントと応力分布は、式(3.20)より以下のようなものである。

$$\sigma_x = \sigma_b = \frac{M}{I_z} y \quad \dots\dots(8.23)$$

梁部材の曲げモーメントが分かると断面内の軸方向の応力分布状態は式(8.23)を用いると容易に求められることが理解できる。

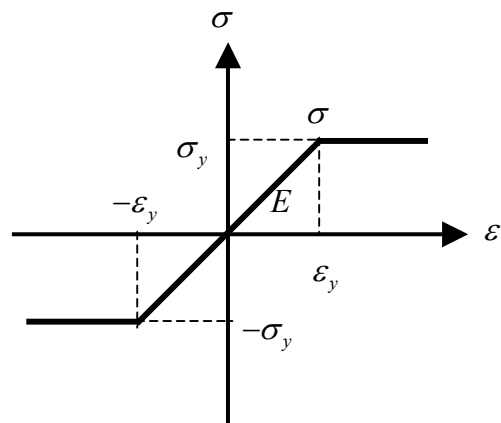


図 8-3 完全弾塑性体の応力とひずみの関係

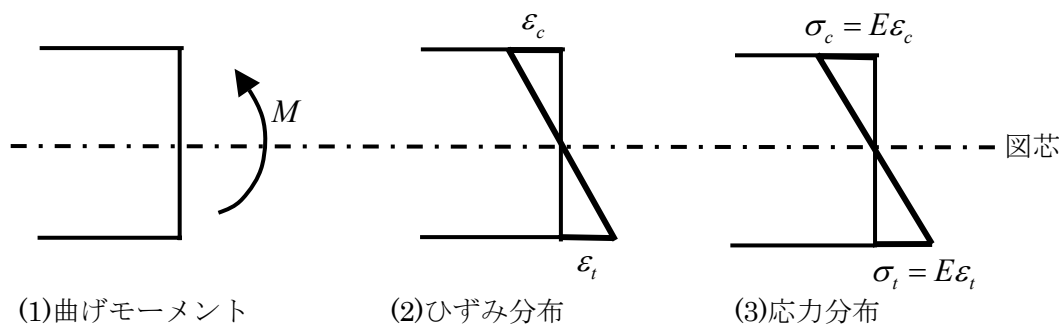


図 8-4 曲げによる弾性状態での応力とひずみ分布

次に、弾性範囲内における曲げモーメント M と曲げひずみ κ との関係求めてみよう。式(8.22)に y を掛け、断面全体について積分すると、左辺は定義より断面の曲げモーメントとなり、右辺は次式となる。

$$M = \int_A \sigma_x y dA = E\kappa \int_A y^2 dA = EI_z \kappa \quad \dots\dots(8.24)$$

上式のように曲げモーメントと曲げひずみとの関係は線形関係となり、係数である曲げ剛性は EI_z で表される。

断面内のひずみが大きくなり、圧縮側か引張側のどちらか、もしくは両方の縁ひずみが降伏ひずみ ε_y に到達した時点での曲げモーメントを求めてみよう。このときの曲げモーメントを降伏モーメント M_y と呼ぶ。降伏モーメントは、式(8.23)において、 σ_x を降伏応力 σ_y とし、また、 y には、断面の縁までの距離 y_c を代入することによって次のように得られる。

$$M_y = \frac{\sigma_y I_z}{y_c} = \sigma_y Z_c; \quad Z_c = \frac{I_z}{y_c} \quad \dots\dots(8.25)$$

式(8.25)では、圧縮側が先に降伏ひずみに達するとして降伏モーメントが求められている。また、 Z_c は、断面係数で、式(8.25)で与えられている。当然、断面の圧縮側と引張側の両端において、最初に降伏ひずみに達した時点の曲げモーメントが降伏モーメントとなる。

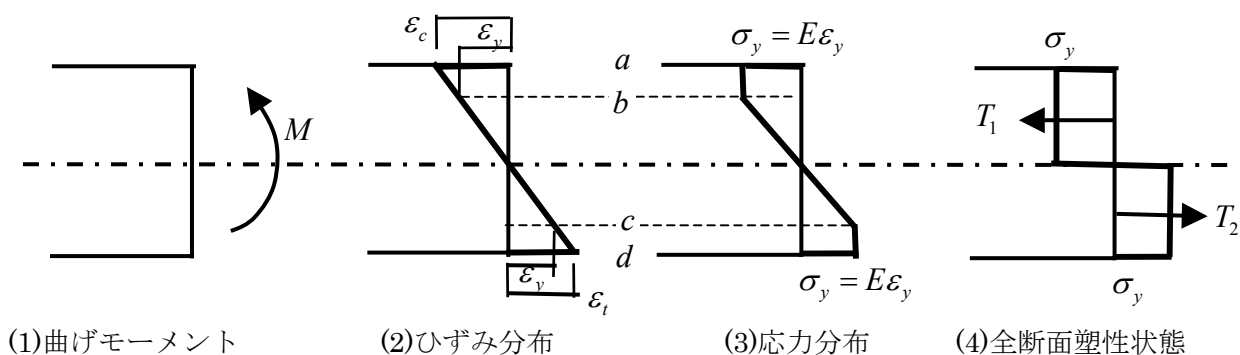


図8-5 曲げによる弾塑性状態での応力とひずみ分布

断面内のひずみがさらに大きくなった状態を考えよう。ただし、ここからは、力学初学者にとっては、かなり難しいので、ここを飛ばして次の節に移っても良い。断面の縁に生じる最大ひずみ ε_c と ε_t が、図8-5に示すように降伏ひずみを越えた場合について、断面内部の応力状態を考えてみよう。ひずみの分布状態は、ひずみが降伏ひずみを越えたとしても、梁理論に従う範囲であれば、全断面が弾性状態であったときと同様に1次式となる。断面内部で、図8-5(2)のa-b とc-d で示される降伏ひずみを越える部分では、応力とひずみの関係(図8-3)が完全弾塑性としたことから、降伏応力 σ_y を越えることがなく、この領域は全て σ_y となる。また、弾性範囲であるb-cの範囲では、ひずみの分布状態に比例した分布を示す。この状態を図8-5(3)に示す。

この状態における曲げひずみと曲げモーメントの関係を求めてみよう。曲げモーメントの定義式(3.9)を再度、確認しよう。

$$M = \int_A \sigma_x y dA \quad \dots\dots(8.26)$$

上式中の右辺の軸方向応力 σ_x は、図8-5(3)に示すように、折れ線で表されており、次式で示すように分割して積分する必要がある。

$$M = \int_a^b \int_a^b \sigma_y y dy dz + E \int_b^c \int_b^c \kappa y^2 dy dz + \int_c^d \int_c^d \sigma_y y dy dz \quad \dots\dots(8.27)$$

また、次式で示すように前節で求めた式(8.24)の曲げモーメントから、図中の2つの三角形部分の積分値を引くことによっても求められる。

$$M = (\kappa EI_y - \int_a^b (E\kappa y + \sigma_y) y dy dz - \int_c^d (E\kappa y - \sigma_y) y dy dz) \quad \dots\dots(8.28)$$

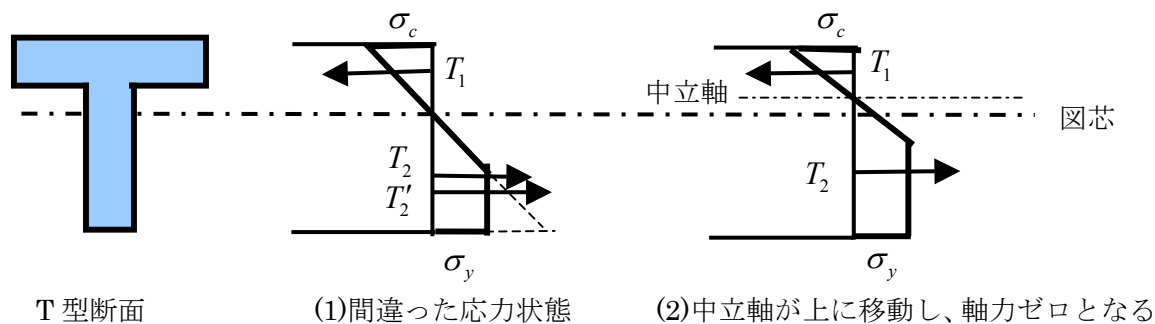


図8-6 非対称断面の弾塑性状態での応力とひずみ分布

図8-6(1)は、T型梁のように図芯を中心にして上下で断面が対称でない場合の弾塑性応力状態を表す。今、軸力をゼロとしていることから、圧縮側と引張側の合応力 T_1 と T_2 は等しく釣り合っていない。しかし、中立軸を図芯位置とした図8-6(1)では、点線の三角形を含んだ引張側の合応力 T'_2 と圧縮側の合応力 T_1 が等しくなり、正しい応力状態を示していない。つまり、引張側の合応力が大きい状態を表している。そこで、中立軸位置を少し上にずらした図8-6(2)の状態を考えると圧縮側の合応力 T_2 と引張側の合応力 T_1 は等しくなり、軸方向の釣り合いが保たれることになる。このように、上下で対称断面でない場合、弾塑性状態になると、中立軸が移動し、図芯位置と一致しなくなる現象が発生する。このことを良く覚えておこう。

応力の状態が、図8-5(4)に示すような特別な状態を考える。このときは断面全体が塑性状態となっており、断面の曲げ剛性はゼロとなる。この状態を塑性ヒンジが出現した状態といい、このときの曲げモーメント M_p を全塑性モーメントという。

全塑性モーメント M_p は、図8-5(4)の応力状態を参考に、次式で表される。

$$M_p = \int \int_a^0 \sigma_y y dy dz + \int \int_0^d \sigma_y y dy dz \quad \dots\dots(8.29)$$

前述したように、軸力ゼロと仮定したことから、合応力 T_1 と T_2 は等しくなくてはならない。従って、合応力 T_1 と T_2 は、

$$T_1 = T_2 = \frac{A}{2} \sigma_y \quad \dots\dots(8.30)$$

で与えられる。ここで、 A は断面積である。上式を用いると全塑性モーメントは、

$$M_p = T_1 \bar{y} = \frac{A}{2} \sigma_y \bar{y} \quad \dots\dots(8.31)$$

となり、 \bar{y} は圧縮側と引張側の断面中心間距離である。全塑性モーメントを降伏モーメントと同様に表現すると、

$$\left. \begin{aligned} M_p &= Z_p \sigma_y \\ Z_p &= \frac{A}{2} \bar{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.32)$$

ここで、 Z_p は塑性断面係数と呼ぶ。

次式で示す全塑性モーメントと降伏モーメントの比率 f は形状係数と呼び、断面固有の値をとる。

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z_p \sigma_y}{Z \sigma_y} = \frac{Z_p}{Z} \quad \dots\dots(8.33)$$

図8-7には、曲げモーメント M と回転角 θ の関係を示しており、曲げモーメントが M_y に達し、断面の縁応力が塑性となった後、その位置の曲げ剛性が次第に低下し、最終的に M_p に漸近する様子が示される。図から分かるように、形状係数 f は、断面の一部が塑性状態になった後、断面全体が塑性状態となり、ヒンジと同様な状態となるまでの余力を示す値である。例えば、長方形断面では形状係数は1.5 となり、従って、全塑性モーメントは、降伏モーメントの1.5 倍となることが分かる。

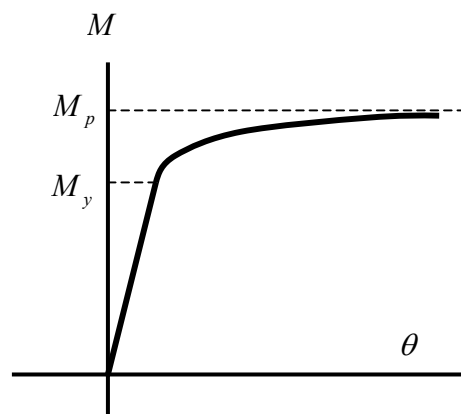


図 8-7 断面内の M と θ の関係

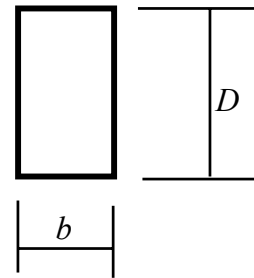
例題 8-1 次に示す長方形断面の形状係数を求めよ。

長方形断面の断面係数は、

$$Z_t = \frac{I_z}{y_c} = \frac{\frac{bD^3}{12}}{\frac{D}{2}} = \frac{bD^2}{6} \quad \dots\dots(8.34)$$

従って、降伏モーメントは、

$$M_y = Z_t \sigma_y = \frac{bD^2}{6} \sigma_y \quad \dots\dots(8.35)$$



となる。次に全塑性モーメントは、式(8.31)と(8.32)より、

$$\left. \begin{aligned} M_p &= Z_p \sigma_y \\ Z_p &= \frac{bD}{2} \frac{D}{2} = \frac{bD^2}{4} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.36)$$

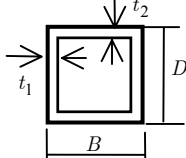
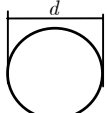
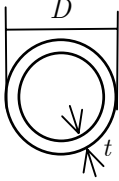
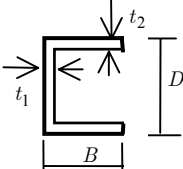
となる。従って、形状係数は、以下のように与えられる。

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z_p}{Z_t} = \frac{\frac{bD^2}{4}}{\frac{bD^2}{6}} = 1.5 \quad \dots\dots(8.37)$$

以下に、良く使用する断面の塑性断面係数と形状係数を表 8-2 としてまとめる。

表 8-2 断面形の塑性断面係数と形状係数

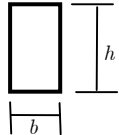
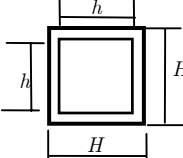
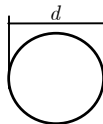
断面形	塑性断面係数	形状係数
<p>A diagram of a rectangular cross-section with width 'b' and height 'h'.</p>	$\frac{bh^2}{6}$	1.5
<p>A diagram of an I-beam cross-section. The flange thickness is 't_f', the web thickness is 't_w', the total height is 'H', and the total width is 'B'.</p>	$Bt_f(D-t_f) + \frac{1}{4}t_w(D-2t_f)^2$	約1.10 ~ 1.17

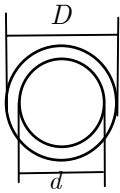
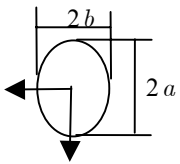
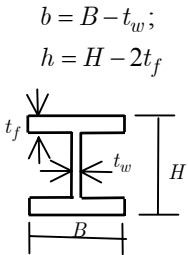
	$Bt_2(D-t_2) + \frac{1}{2}t_1(D-2t_2)^2$	約1.15
	$\frac{d^3}{6}$	1.7
	$\frac{D^3}{6} \{1 - (1 - \frac{2t}{D})^3\}$	約1.27 ~ 1.40
	$Bt_f(D-t_f) + \frac{1}{2}t_w(D-2t_f)^2$	約1.17

本節では、力学で良く使用する断面に関する諸量をまとめ、以下の表 8.2 として示す。

8.6 代表的な断面の諸量

表 8-3 代表的な形状の断面特性

断面名	断面形状	断面積	重心位置	断面二次モーメント	断面係数	断面二次半径	断面二次極モーメント
長方形		bh	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$	$\frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$
角型鋼管		$H^2 - h^2$	$\frac{H}{2}$	$\frac{H^4 - h^4}{12}$	$\frac{(H^4 - h^4)}{6H}$	$\sqrt{\frac{H^2 - h^2}{12}}$	$\frac{1}{6}(H^4 - h^4)$
円形		$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{\pi d^4}{32}$

鋼管		$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4)$	$\frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$
楕円形		πab	a	$\frac{\pi ba^3}{4}$	$\frac{\pi ba^2}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$
H形		$BH - bh$	πab	$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$\sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$	$I_y + I_z$

8.7 課題

本章の課題は、例題で示した等分布荷重を受ける単純梁のたわみ曲線と最大たわみを検証することである。SPACEでは、節点荷重のみで、分布荷重を使用することができない。ここでは、梁の分割を多くして、節点荷重を等分布荷重に近似できるかを考える。

解析モデルは図8-8に示す等分布荷重を受ける単純梁を用いる。また、断面は以下の示すH型断面とし、このH型断面は、SS400のH-400x200x8x13とする。

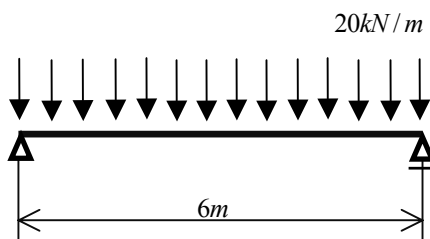


図 8-8 課題の骨組

最初に、部材中央に生じる最大曲げモーメントを求めておこう。

$$M_{\max} = \frac{\bar{P}_w L^2}{4} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90 \text{ kN} \cdot \text{m} = 9000 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad \dots\dots (8.38)$$

H型断面の断面性能：

$$A = 20 \cdot 40 - (20 - 0.8)(40 - 2 \cdot 1.3) = 81.9 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{20 \cdot 40^3 - (20 - 0.8)(40 - 2 \cdot 1.3)^3}{12} = 22964.9 \text{ cm}^4$$

$$Z = \frac{22964.9}{20} = 1148.2 \text{ cm}^3$$

$$E = 20500 \text{ kN/cm}^2$$

従って、両断面内に生じる最大応力と最大変位は、以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M}{Z} = \frac{9000}{1148.2} = 7.84 \text{ kN/cm}^2 \\ w_{\max} &= \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z} = \frac{5 \cdot 0.2 \cdot 600^4}{384 \cdot 20500 \cdot 22964.9} = 0.717 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.39)$$

SPACE のモデラーを用いて、上記の解析モデルをコンピュータ内に作成する。解析モデルは、既に何度も作成しているので、注意深く操作すれば、それほど難しくはない。ここでは、梁を4、6、8に分割した解析モデルを作成するため、この3つの課題に対する解析モデルを、「演習解析モデル」-「第8章」フォルダ内の「課題1」、課題2、「課題3」フォルダ中に各々作成する。

モデラーを起動し、要素データの設定ツールチップを押し、次のダイアログを標示させる。鉄骨断面を使用するため、材料はSS400とし、また、両端ファイバーモデルを使用する。解析に使用する断面は、H型断面でH-400x200x8x13とする。解析モデルの作成方法は、第3章を参照し、練習として自ら作成されたい。

8.8 モデラーで解析モデルを作成する

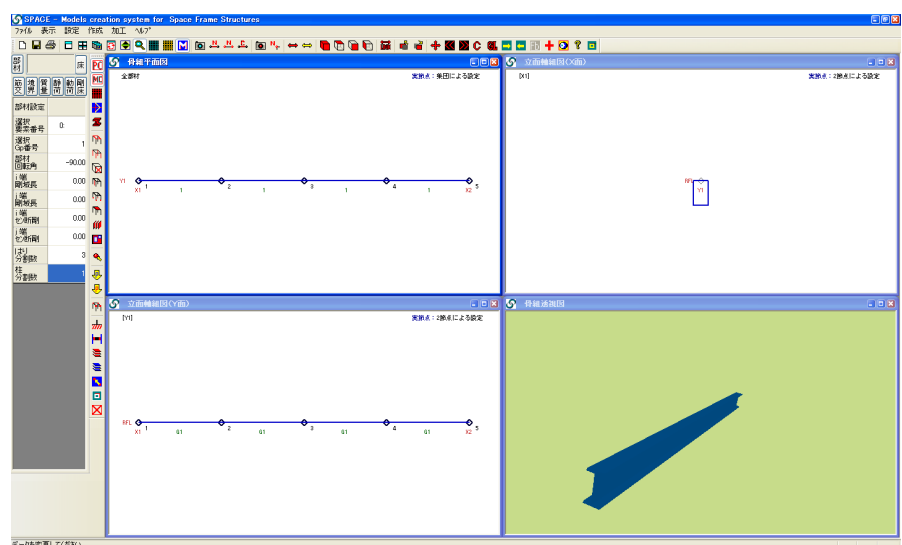


図 8-9 課題1の骨組で梁は4分割している

モデラーで作成した課題1の4分割の解析モデルが、図8-9に示されている。また、使用したH型断面の断面性能は、図8-10に示されており、先に計算した値と同じになっている。

要素データ変更													
要素データ		材端データ		断面変更								OK	キャンセル
要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm ²)	せん断弾性係数 (kN/cm ²)	断面積 (cm ²)	断面極二次モーメント (cm ⁴)	y軸断面二次モーメント (cm ⁴)	z軸断面二次モーメント (cm ⁴)	y軸回りせん断断面積 (cm ²)	z軸回りせん断断面積 (cm ²)		
1	有効	G1	11	20500.0000	7900.0000	81.92000	35.67627	22964.86914	1734.92908	29.97549	17.97132		

図8-10 課題で使用している梁の断面特性

等分布荷重を節点集中荷重とするため、梁の分割数によって、次のように1節点当たりの値を変えて使用する。この節点荷重は、当該節点の支配面積より計算される。

表8-4 1節点当たりの荷重 ($\bar{P}_w = 20kN/m$)

	課題1	課題2	課題3
梁分割数	4	6	8
節点荷重	30kN	20kN	15N

上記の節点荷重から計算した合力と、等分布荷重の合力とでは、両端節点の支配面積分の荷重が異なることになる。この課題のように両端が支持されている場合は、解析結果に影響を与えないが、骨組のように柱に軸力として伝わる場合は、異なった結果となる。このような場合、梁の両端の節点にも節点荷重を付加する必要があることを覚えてほしい。

課題3つの線形解析を行い、断面力とたわみの結果を比較してみよう。ここでは、せん断変形を無視した解析を行うので、図8-5の「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログで、丸で示したように「せん断変形を考慮しない」にチェックマークを入れる。

解析結果を検証してみよう。メニューの「表示」→「静的解析の途中経過の表示」を選択すると、図8-12のように、解析経過が表示される。断面力は、図8-11の丸で示した「SOUTPUT」にし応力出力の項で、「出

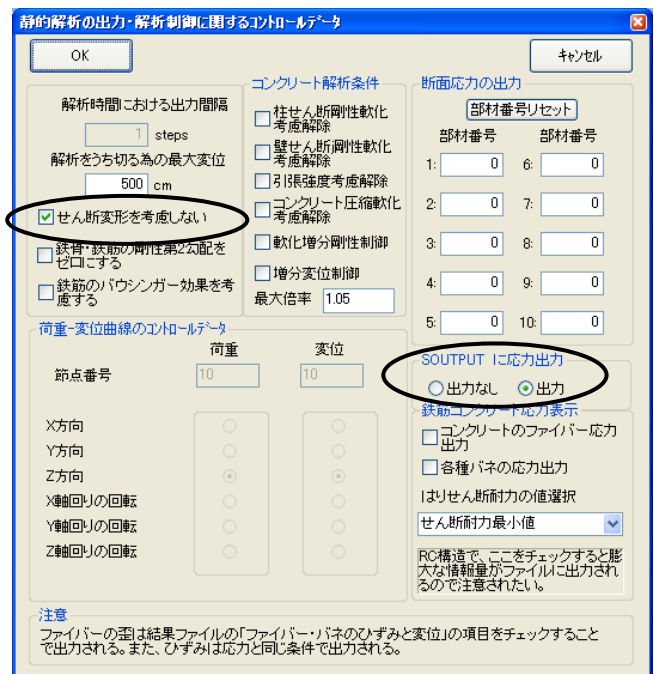


図8-11 せん断変形を考慮しない解析

力」にチェックを入れることで出力される。このファイルの最後に、10ステップ目の断面力が表示されており、部材の中央では、曲げモーメントが90000kNcmとなっており、解析解である式(8.38)の値と同じとなっている。断面力の最大値は、等分布荷重から、4分割での節点荷重に変換しても良い値となっている。

```

Analysis start      1      10      10

Divided step number: 10 -----
Unstable number: 0
部材番号 部材モデル      Nx      Qy      Qz      Mx      My      Mz
  1      11      0.0000  0.0000  -45.0000  0.0000  0.0000  0.0000
           0.0000  0.0000  -45.0000  0.0000 -8750.0001  0.0000

  2      11      0.0000  0.0000  -15.0000  0.0000 -8750.0001  0.0000
           0.0000  0.0000  -15.0000  0.0000 -9000.0001  0.0000

  3      11      0.0000  0.0000   15.0000  0.0000 -9000.0001  0.0000
           0.0000  0.0000   15.0000  0.0000 -8750.0001  0.0000

  4      11      0.0000  0.0000   45.0000  0.0000 -8750.0001  0.0000
           0.0000  0.0000   45.0000  0.0000  0.0000  0.0000

Step number : 10 ////  Load S1      1.000  Load S2      0.000  Max. disp.(No. node: 3 ) : 0.6811
    
```

図 8-12 課題 1 の断面力の表示

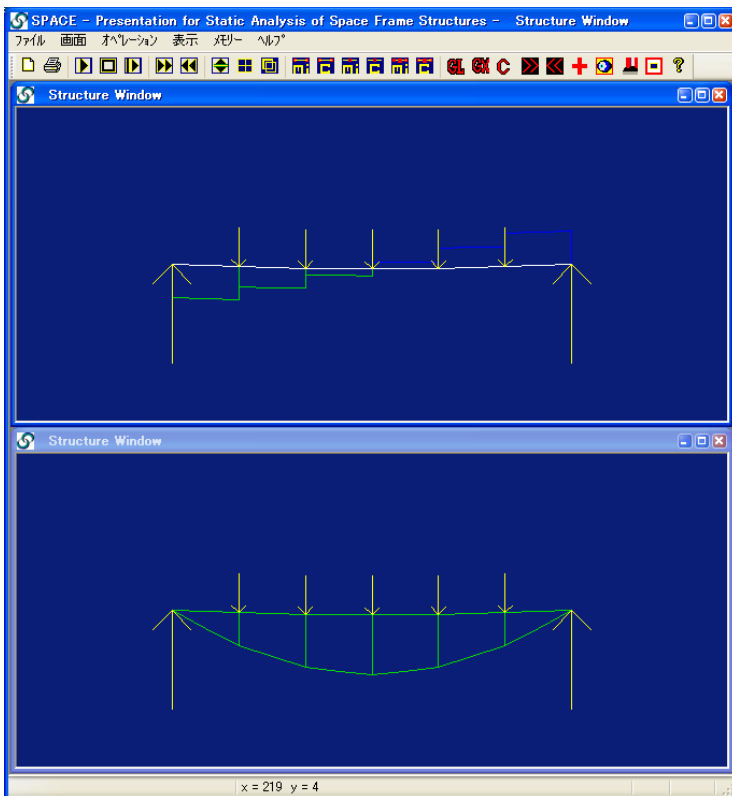


図 8-13 課題 2 のせん断力図と曲げモーメント図

図 8-13 は、課題 2 の 6 分割で、解析した結果であり、上がせん断力図、下が曲げモーメント図を表す。両図とも直線で描かれているため、等分布荷重とは当然異なるが、その形状はほぼ同じとなっており、また、曲げモーメントも等分布で求めた値と同じとなっている。

3つの課題の解析を行い、梁中央の最大変位を表8-5にまとめる。

表 8-5 最大変位 (解析値 : 0.717cm)

	課題 1	課題 2	課題 3
梁分割数	4	6	8
最大変位	0.6811cm	0.7010cm	0.7080cm

表から分かるように、分割数が多いほど等分布荷重による最大変位に近似するが、4分割であっても、最大たわみの誤差は5%程度であり、解析目的にもよるが精度はかなり良いといえる。

8.9 まとめ

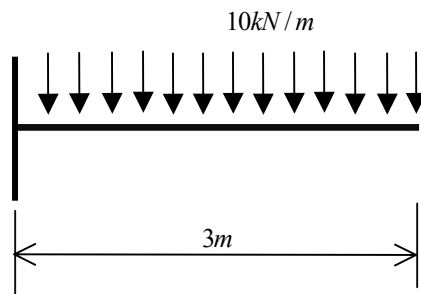
本章では、梁理論の基本となるベルヌーイ・オイラー梁に従い、3次元物体である梁を1次元の線材に置換し、その挙動を支配する梁の微分方程式を誘導した。このベルヌーイ・オイラー梁は、平面保持と法線保持の両仮定で成立しており、この2種の仮定を用いることで、梁内の応力やひずみを容易に求めることができる。さらに、梁の微分方程式を用いて、最も単純な等分布荷重を受ける単純梁のたわみ曲線と最大たわみを求めた。

また、SPACEでは、等分布荷重を適用できないため、節点荷重に置換して解析を行うが、梁の分割数を変化させてその精度が、解析解と比較することで検証された。

8.10 問題

問 8-1 次に示す等分布荷重を受ける片持ち梁について、SPACE を用いて静的応力解析（線形解析）を実行しなさい。片持ち梁の解析は次章で行うが、ここでは、最大変位の解を与える。SPACE では、等分布荷重を与えて解析することはできない。そこで、梁を適切に分割し、等分布荷重を節点荷重に変換して解析を実施せよ。分割数と断面力と最大たわみを解析解と比較し、その精度などをレポートしなさい。使用する断面は、H 型断面とし、SS400 の H-250x125x6x9 とする。

等分布荷重を受ける片持ち梁先端のたわみは、 $\delta_{\max} = \frac{\bar{P}_w L^4}{8EI}$



問 8-1