第１章　梁理論の復習とマトリックス法

ポイント：たわみ角法の基本式より剛性行列を求める
梁理論の復習を行う

1.1 はじめに

本章では、マトリックス法と一般に言われている行列記法を用いた骨組の解析方法について学ぶ。既に学んだたわみ角法も行列とベクトルを用いて釣合式を表現したが、ここで学ぶマトリックス法は、有限要素法の手法を用いて定式化される。ただし、本章で説明するように梁・柱のような線材では、たわみ角法を少し拡張することで、有限要素法的手法で求めた釣合式と同じとなり、この範囲の解析では両手法の境界は曖昧となる。

２つの手法の違いは、たわみ角法では節点の変位は部材角で表し、部材の伸縮を無視するのに対し、有限要素法では考慮する。平面骨組の解析を手計算で行う場合、部材角を用いた表現は非常に効率的で、たわみ角法が断然有利な手法といえる。ただし、骨組を整形ラーメンと異形ラーメンとに分けて解析を行う必要があり、また、軸力も解析結果より直接求めることができないという欠点も有する。一方、後者は、節点変位を直接用いるため、部材の伸縮を考慮することができ、そのため、整形・異形の区別を必要とせず、また、軸力分布も釣合式を解くことで直接求めることができる。ただし、節点における変位の適合や力の釣合は、座標変換を必要とし、多くの行列の掛け算を行うことになる。このことは、手計算では間違いの原因となり、基本的には、このマトリックス法は、コンピュータを前提とした手法となる。

このテキストでは、マトリックス法の基本原理を学び、実際に、EXCEL の VBA を利用して、平面骨組のプログラムを作成する。プログラムそのものは、添付した EXCEL ファイルに入っているが、最初は読者自身で作ってみよう。ここで作成するプログラムは非常にシンプルで、理論式を可能な限り忠実にコード化したシステムである。そのため理解し易く、また、プログラムを自ら作成する過程で、SPACE や市販のソフトが、どのような仕組みで動作しているかが、おおよそ理解できることになる。

本章では、まず、既に学んできた梁理論の基本を復習し、次章の有限要素法による剛性行列と荷重ベクトルの作成に備える。また、たわみ角法の基本式を少し拡張して剛性行列や荷重ベクトルを求める。

キーワード

たわみ角法の基本式の拡張　梁理論の復習

1.2 梁理論の復習

本節では、梁理論の復習を行う。梁理論で最も大切な、応力とひずみの関係とひずみと変位の関係を以下に示す。ここでは、ベルヌーイ・オイラー仮定といわれる平面保持と法線保持の仮定が用いられている。なお、本編で使用する記号は、第１編、第２編で用いたものと同じである。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma = E\varepsilon\\&\varepsilon = \frac{du}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2}y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1)$$

ここで、σ, ε は軸方向応力であり、軸方向ひずみである。また、$u(x), v(x)$ は材軸の軸方向変位であり、法線方向変位である。次に、曲げに対する断面力と外力との釣合、及びベルヌーイ・オイラー梁における釣合式は、

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2 M}{dx^2} = -P_v\\&EI\frac{d^2 v}{dx^2} = -M\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.2)$$

として与えられる。ここで、$M(x)$ は曲げモーメントであり、E, I はヤング系数と断面二次モーメントを表す。また、$P_v(x)$ は法線方向分布荷重である。

1.3 軸方向外力と軸方向変位の関係

軸方向の応力 σ_0 は、軸方向のひずみ ε_0 と変位とひずみの関係より

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 = E\frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots(1.3a)$$

となり、断面全体で積分すると、軸力 N が次のように得られる。

$$N = \int_A \sigma_0 dA = EA\frac{du}{dx}$$

$$EA\frac{du}{dx} = N \qquad \cdots\cdots(1.3b)$$

上式で、軸方向の分布荷重がない場合は、軸力は一定となり、従って、

軸方向変位は、両辺を積分することで次式となる。

$$EAu = Nx + C \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

ここで、C は積分定数である。上式に梁の両端の変位を代入すると、次式のように積分定数が決定され、

$$\left.\begin{aligned} EAu_i &= C \\ EAu_j &= Nl + C \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1.5)$$

さらに、上式を整理すると、両端変位と軸力との関係が次のように得られる。

$$\frac{EA}{l}(u_j - u_i) = N \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

ここで、軸力と両端の軸方向外力との釣合は、

$$P_i = -N; \quad P_j = N \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

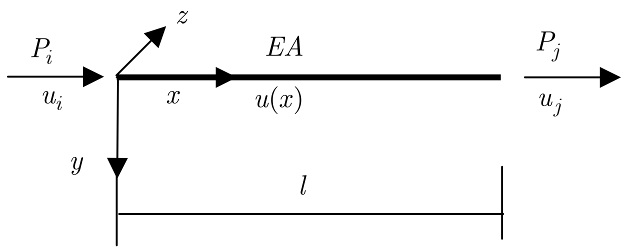

図 1-1 材端軸方向変位と軸方向外力

であり、従って、梁両端の軸方向外力と、変位の関係が次式のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

1.4 たわみ角法による剛性行列

本節では、たわみ角法の基本式を用いて、マトリックス法と同等の剛性行列を導いてみよう。まず、たわみ角法の基本式は次式で表される。

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) \\ M_j &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1.9)$$

ここで、図 1-2(a)に示されるように、M_i, M_j は両端の材端モーメントであり、θ_i, θ_j は両端の回転角、また、R は部材角を示す。また、材長は l で表す。

次に、上式の部材角表示の替わりに、梁両端の法線方向変位を用いて部材角を表す。

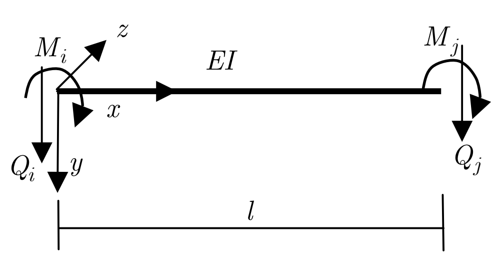

図 1-2(a) 材端外力

$$R = (v_j - v_i)/l \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

上式を式(1.9)に代入し、

$$
\left.
\begin{aligned}
M_j &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3\frac{v_j - v_i}{l}) \\
M_j &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3\frac{v_j - v_i}{l})
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots(1.11)
$$

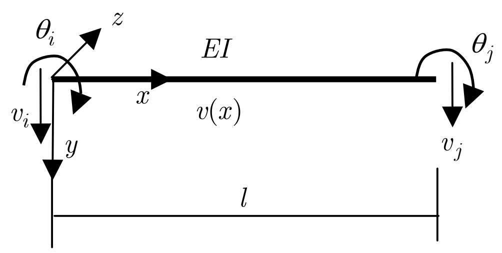

図 1-2(b)　材端変位

求めた上式を整理し、行列記法で表すと次式となる。

$$
\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(1.12)
$$

さらに、材端荷重Q_i, Q_jとせん断力とのの釣合は、部材荷重がない場合、次式で表される。

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_i &= (M_i + M_j)/l = \frac{2EI}{l^2}(3\theta_i + 3\theta_j - 6\frac{v_j - v_i}{l}) \\
Q_j &= -(M_i + M_j)/l = -\frac{2EI}{l^2}(3\theta_i + 3\theta_j - 6\frac{v_j - v_i}{l})
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots(1.13)
$$

上式を行列記法で表すと次式となる。

$$
\left.
\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}
\right\}\cdots\cdots(1.14)
$$

式(1. 12)と(1. 14)をまとめると、

$$
\left.
\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}
\right\}\cdots\cdots(1.15)
$$

さらに、上式に式(1. 8)を加えると、材端力と材端変位との関係が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & Sym & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \cdots\cdots(1.16)$$

上式が、部材座標系で表された釣合式となる。上の平面骨組における釣合式は、次章で学ぶ有限要素法から誘導した式と一致する。

1.5 部材荷重

部材に直接加わる部材荷重、例えば、等分布荷重などは、両端固定支持における反力と反対の力を節点荷重として用いる。たわみ角法では、これを基本応力と呼び、この場合と同様に、基本応力をまず求めることになる。実際に部材荷重が加わった梁の応力状態や変形状態は、この節点荷重による応力や変形状態に、両端固定の応力や変形状態を重ね合わせることで求められる。これも、たわみ角法と同様の手法である。

1.6 課題

本章以降では、有限要素法によるマトリックス法を学ぶ。マトリックス法は、演算操作が多く、手計算で解析するには不向きの手法といえる。そこで、この手法をコンピュータ用プログラムとしてコード化し、実際に計算を実施する。プログラム言語として、比較的扱い易い Excel の VBA を用いることにする。本章の課題として、まず、Excel の VBA 開発環境を設定し、VBA の文法を勉強されたい。今後、VBA の文法などは学習済みとして理論やプログラムコードの説明を行う。

1.7 まとめ

本章では、たわみ角法の基本式及び軸方向の釣合式を用いて、マトリックス法の釣合式を導いた。この手法によれは、マトリックス法の釣合式は容易に与えられる。また、この章以降で行われるコンピュータプログラムの演習では、Excel の VBA を用いることになる。