第２章　有限要素法による定式

ポイント：有限要素法による平面骨組の定式化
仮想仕事の原理を使用する

2.1 はじめに

本章では、有限要法で用いられる仮想仕事の原理により、平面骨組の釣合式を誘導する。得られた剛性行列は、前章で求めたたわみ角法の剛性行列と同一であることを示す。

キーワード

仮想仕事の原理　内力仕事と外力仕事の釣合

2.2 仮想仕事の原理による平面骨組の釣合式の誘導

軸力と曲げを受ける梁の断面内のひずみは、平面保持の仮定と法線保持の仮定より、次式で表される。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_0 + \varepsilon_b = \frac{du}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} y \\
\varepsilon_0 &= \frac{du}{dx} \\
\varepsilon_b &= -\frac{d^2 v}{dx^2} y
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdot(2.1)$$

ここで、ε_0 は軸方向ひずみであり、また、ε_b は曲げひずみを表す。次に、仮想仕事の原理を用いて平面骨組の部材釣合式を求めるわけであるが、ここで、仮想仕事の原理について簡単に説明しておこう。

仮想仕事の原理とは、「釣合った状態に、境界条件を満足する微小な仮想変位 $\delta(u)$ を任意に加えたとき、構造物内部の内力仕事と外力の成す外力仕事は等しい」ことを言う。この原理に従って、以下に梁部材に関する釣合式を示す。

$$\int_V \delta(\varepsilon_x)\sigma_x dV = \int_S \delta(u) P dS \qquad \cdots\cdots\cdot(2.2)$$

上の釣合式は、仮想仕事の原理より導かれるもので、ひとつの部材に関する釣合である。左辺は、仮想内力仕事であり、部材の応力に、微小な仮想変位 $\delta(u)$ から求められる仮想ひずみ $\delta(\varepsilon_x)$ を掛け、部材全体で積分して求める。同じく右辺は、外力の成す外力仕事であり、外力に微小な

仮想変位を掛け、外力が加わっている領域全体で積分して求める。

まず、変位場を次のように仮定する。軸方向変位 $u(x)$ は x に関する 1 次式で、また、法線方向の変位 $v(x)$ は 3 次式とする。

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.3)$$

仮定した変位場は、両端の変位を満たす必要がある。式(2.3)の上の式に、両端の変位を代入すると、軸方向変位は、

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= u_i = \alpha_1 \\ u(l) &= u_j = \alpha_1 + \alpha_2 l \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.4)$$

となる。上式を行列表示すると、

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \\ &= \left[A_u \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.5)$$

となり、未定係数 (α_1, α_2) について解くと、次式が得られる。

$$\left. \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = A_u^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad A_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{bmatrix} \right\} \cdots\cdots (2.6)$$

上の未定係数を用いると、部材内の軸方向変位 $u(x)$ と一階微分は次式で表されることになる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dfrac{du}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_u^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots (2.7)$$

続いて、法線方向の変位は、式(2.3)の下式とその 1 階微分を行列表示すると、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} v \\ \dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots (2.8)$$

後は、軸方向変位と同様に材端の法線方向変位と回転角を用いて、未定定数 $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ を決定すれば良い。式(2.8)に両端の変位と回転角

を代入すると、次式が与えられる。

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \left[A_v \right] \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

係数行列の逆行列によって、未定係数は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \left[A_v \right]^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

ここで、上式の逆行列は、

$$A_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{l^2} & -\dfrac{2}{l} & \dfrac{3}{l^2} & -\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{2}{l^3} & \dfrac{1}{l^2} & -\dfrac{2}{l^3} & \dfrac{1}{l^2} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

として与えられる。さらに、式(2.10)を(2.8)に代入すると、法線方向変位とその一階微分は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} v \\ \dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

次に、求めた変位よりひずみを計算する。ひずみの式(2.1)より、必要となる変位の微分項を求めておく。

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \{0 \quad 1\} A_u^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

さらに、行列表示で整理すると、

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{d^2v}{dx^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_u^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [B]\left[A^{-1}\right]\{u\} \quad \cdots\cdots(2.14)$$

ここで、

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}; \quad \left[A^{-1}\right] \begin{bmatrix} A_u^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix}; \quad \{u\}^T = \{u_i \quad u_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\}$$

$$\cdots\cdots(2.15)$$

式(2. 14)を利用すると、ひずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \varepsilon_b = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2}y = \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}[B]\left[A^{-1}\right]\{\mathrm{u}\} \quad \cdots\cdots(2.16)$$

これで準備が整ったので、次に、内力仕事を求めることにする。まず、応力とひずみの関係が弾性であることから、

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \cdots\cdots(2.17)$$

行列 3 重積の転置は次式のように変換される。

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

となり、上式とひずみの式(2. 16)を用いると、内力仕事 δU は次式で与えられる。ただし、$()^T$ は転置を意味する。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \delta(\varepsilon_x)E(\varepsilon_x)dV \\ &= \int_0^l \int_A \delta(\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}[B]\left[A^{-1}\right]\{\mathrm{u}\})^T E(\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}[B]\left[A^{-1}\right]\{\mathrm{u}\})dA\,dx \\ &= \int_0^l \int_A \delta(\{\mathrm{u}\}^T \left[A^{-1}\right]^T [B]^T \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}^T)E(\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}[B]\left[A^{-1}\right]\{\mathrm{u}\})dA\,dx \quad \cdots\cdots(2.18) \end{aligned}$$

　上式を評価するために順序良く積分する。最初は、上式の中央部分の断面に関する積分を次のように実施する。

$$\begin{aligned} \int_A \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}^T)E(\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}dA &= \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ -y \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} dA \\ &= \int_A E \begin{bmatrix} 1 & -y \\ -y & y^2 \end{bmatrix} dA = E \begin{bmatrix} A & -S \\ -S & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(2.19) \end{aligned}$$

ここで、A, I, S は、以下のように、断面積、断面二次モーメント、断面一次モーメントを表す。ただし、断面の性能計算は図芯を用いるため、断面一次モーメントはゼロである。

$$\left.\begin{array}{l} A=\int_A dA \\ I_z=\int_A y^2 dA \\ S_z=\int_A y dA=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.20)$$

次に、材軸方向の積分を実施する。

$$\begin{aligned}&\int_0^l [B]^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} [B] dx \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} dx\end{aligned} \cdots\cdots (2.21)$$

上の積分を行う前に行列の積を計算し、その後、積分を実施する。

$$\begin{aligned}&\int_0^l [B]^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} [B] dx \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI & 6xEI \end{bmatrix} dx \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI & 12xEI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12xEI & 36x^2EI \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lEA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4lEI & 6l^2EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l^2EI & 12l^3EI \end{bmatrix}\end{aligned} \cdots\cdots (2.22)$$

上の積分を考慮して、実際の内力仕事は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta(\{\mathrm{u}\}^T \begin{bmatrix} A_u^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix}^T \int_0^l \int_A [B]^T \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}^T) E(\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} [B]) dA\, dx \begin{bmatrix} A_u^{-1} & 0 \\ 0 & A_v^{-1} \end{bmatrix} \{\mathrm{u}\} \\ &= \delta(\{\mathrm{u}\}^T) \begin{bmatrix} EA\begin{bmatrix} A_u^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_u^{-1} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & EI\begin{bmatrix} A_v^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_v^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \{\mathrm{u}\}\end{aligned} \cdots\cdots (2.23)$$

さらに、上式の内部における行列の積は、次のように計算される。

$$EA\left[A_u^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\left[A_u^{-1}\right]=EA\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{l}\\0&\frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{l}&\frac{1}{l}\end{bmatrix}=EA\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{l}&\frac{1}{l}\end{bmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

……(2.24)

$$EI\left[A_v^{-1}\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4l&6l^2\\0&0&6l^2&12l^3\end{bmatrix}\left[A_v^{-1}\right]=EI\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{l^2}&\frac{2}{l^3}\\0&1&-\frac{2}{l}&\frac{1}{l^2}\\0&0&\frac{3}{l^2}&-\frac{2}{l^3}\\0&0&-\frac{1}{l}&\frac{1}{l^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4l&6l^2\\0&0&6l^2&12l^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{l^2}&-\frac{2}{l}&\frac{3}{l^2}&-\frac{1}{l}\\\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}&-\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}\end{bmatrix}$$

$$=EI\begin{bmatrix}0&0&0&6\\0&0&-2&0\\0&0&0&-6\\0&0&2&\frac{6}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{l^2}&-\frac{2}{l}&\frac{3}{l^2}&-\frac{1}{l}\\\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}&-\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{12}{l^3}&\frac{6}{l^2}&-\frac{12}{l^3}&\frac{6}{l^2}\\\frac{6}{l^2}&\frac{4}{l}&-\frac{6}{l^2}&\frac{2}{l}\\-\frac{12}{l^3}&-\frac{6}{l^2}&\frac{12}{l^3}&-\frac{6}{l^2}\\\frac{6}{l^2}&\frac{2}{l}&-\frac{6}{l^2}&\frac{4}{l}\end{bmatrix}$$

……(2.25)

上式を考慮して、仮想変位による内力仕事を整理すると最終的に次式となる。

$$\delta U=\delta(\{\mathrm{u}\}^T)\begin{bmatrix}K_u&0\\0&K_v\end{bmatrix}\{\mathrm{u}\}$$

……(2.26)

ここで、剛性行列は、

$$\left[K_u\right]=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix};\quad\left[K_v\right]=EI\begin{bmatrix}\frac{12}{l^3}&\frac{6}{l^2}&-\frac{12}{l^3}&\frac{6}{l^2}\\\frac{6}{l^2}&\frac{4}{l}&-\frac{6}{l^2}&\frac{2}{l}\\-\frac{12}{l^3}&-\frac{6}{l^2}&\frac{12}{l^3}&-\frac{6}{l^2}\\\frac{6}{l^2}&\frac{2}{l}&-\frac{6}{l^2}&\frac{4}{l}\end{bmatrix}$$

……(2.27)

であり、また、変位ベクトルは次式である。

$$\{u\}^T=\left\{u_i\quad u_j\quad v_i\quad \theta_i\quad v_j\quad \theta_j\right\}$$

……(2.28)

次に、外力の成す仮想仕事δVは、仮想変位によって、

$$\delta V = \int_S \delta(u) P dS \qquad \cdots\cdots(2.29)$$

で与えられるが、ここでは、材端外力のみ働くとしていることから、

$$\delta V = \delta(u)\{P\};\quad \{P\}^T = \left\{P_i \quad P_j \quad Q_i \quad M_i \quad Q_j \quad M_j\right\} \qquad \cdots\cdots(2.30)$$

となる。また、仮想変位として、ひずみを計算した際の材端変位を用いると、式(2.30)の外力による仮想仕事は次式で表される。

$$\delta V = \delta\left(\left\{u_i \quad u_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\right\}\right)\{P\} \qquad \cdots\cdots(2.31)$$

これで、仮想変位に対する内力仕事と外力仕事が得られたので、整理して次のように表す。

$$\delta U = \delta V$$

$$\delta\{u\}^T \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \{\mathrm{u}\} = \delta\{u\}^T\{P\} \qquad \cdots\cdots(2.32)$$

ここで、上式が常等的に成立するためには、仮想変位として与えた材端の変位が任意であることから、各材端変位に関する係数はゼロでなくてはならない。従って、次の方程式が得られることになる。

$$\begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \{\mathrm{u}\} = \{P\} \qquad \cdots\cdots(2.33)$$

$$\left.\begin{aligned} \{P\}^T &= \left\{P_i \quad P_j \quad Q_i \quad M_i \quad Q_j \quad M_j\right\} \\ \{u\}^T &= \left\{u_i \quad u_j \quad v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.34)$$

上の材端荷重ベクトルと材端変位ベクトルの並びを、次のように少し変更すると、

$$\left.\begin{aligned} \{P\}^T &= \left\{P_i \quad Q_i \quad M_i \quad P_j \quad Q_j \quad M_j\right\} \\ \{u\}^T &= \left\{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.35)$$

釣合式は次のようになる。有限要素法で求めて釣合式の係数行列である

剛性行列は、たわみ角法で求めた式(1.16)の係数行列と同一であることが分かる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & Sym & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(2.36)$$

2.3 部材荷重の評価

部材荷重を評価して材端力に置換する方法として、たわみ角法では、両端固定梁の材端モーメントとせん断力を用いる。ここでは、有限要素法の手法に従って、部材に直接加わる法線方向分布荷重から材端荷重を求めてみよう。まず、外力の成す仮想仕事は、

$$\delta V = \int_S \delta(u) P(x) dS \quad \cdots\cdots(2.37)$$

であり、ここでは、等分布荷重 $\overline{P}_v$ を用いる。梁の法線方向変位場は、材端の変位を用いると、式(2.12)より、

$$v = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} A_v^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(2.38)$$

で与えられ、同式を式(2.37)に代入すると、外力の仮想仕事が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_S \delta(u) \overline{P}_v dS \\ &= \delta((v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j)\left[A_v^{-1}\right]^T \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix}^T \overline{P}_v dx \end{aligned} \quad \cdots\cdots(2.39)$$

上式では、まず、荷重と変位場を掛け、材軸方向に積分する。さらに、その結果と行列 $\left[A_v^{-1}\right]^T$ との掛け算を実施して、次のように評価される。

$$\delta V=\delta((v_i\quad\theta_i\quad v_j\quad\theta_j))\left[A_v^{-1}\right]^T\int_0^l\left\{1\quad x\quad x^2\quad x^3\right\}^T\overline{P}_v dx$$

$$=\delta((v_i\quad\theta_i\quad v_j\quad\theta_j))\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{l^2}&\frac{2}{l^3}\\0&1&-\frac{2}{l}&\frac{1}{l^2}\\0&0&\frac{3}{l^2}&-\frac{2}{l^3}\\0&0&-\frac{1}{l}&\frac{1}{l^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\\frac{l^2}{2}\\\frac{l^3}{3}\\\frac{l^4}{4}\end{Bmatrix}\overline{P}_v$$

$$=\delta((v_i\quad\theta_i\quad v_j\quad\theta_j)\overline{P}_v\begin{Bmatrix}\frac{l}{2}\\\frac{l^2}{12}\\\frac{l}{2}\\-\frac{l^2}{12}\end{Bmatrix}\qquad\cdots\cdots(2.40)$$

外力項は、変位ベクトルの並びを式(2.34)のように変更すると、仮想仕事の原理より次式となる。

$$\{P\}^T=\left\{P_i\quad Q_i\quad M_i\quad P_j\quad Q_j\quad M_j\right\}=\left\{0\quad\frac{\overline{P}_v l}{2}\quad\frac{\overline{P}_v l^2}{12}\quad 0\quad\frac{\overline{P}_v l}{2}\quad-\frac{\overline{P}_v l^2}{12}\right\}\qquad\cdots\cdots(2.41)$$

2.4 部材剛性行列を作成するサブルーチン

前節までで学んだ部材座標系における剛性行列（式(2.36)）の作成サブルーチン「Cal_k」と部材荷重(式(2.41))を作成する「Set_load_M」を、Excel の VBA でコード化してみよう。サブルーチン「Cal_k」の引数は次のようである。また、剛性行列は対称であることから、上半分をゼロクリアした後、各要素を計算し、最後に下半分にコピーしている。以下で、具体的な部材剛性行列と部材荷重を計算するプログラムを見てみよう。

部材剛性行列の引数の仕様は、以下のようである。ここで(in)はデータを与え、(out)はこのサブルーチンの出力である。

```
ii   部材番号(in)
ak   剛性行列を保存するワーク領域(out)
al   部材長さが保存されている配列(in)
mx   要素番号(in)
Element 要素データが保存されている配列(in)
```

```
'-----------------------------------------------------
'       部材座標系での剛性行列の計算
'-----------------------------------------------------
Private Sub Cal_k(ii, ak, al, mx, Element)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim al1 As Double
Dim al2 As Double
Dim al3 As Double
Dim E As Double
Dim a As Double
Dim IZ As Double
Dim ak1 As Double
'-------------------------------------  部材剛性行列のゼロクリア
For i = 1 To 5
 For j = i + 1 To 6
  ak(i, j) = 0#
 Next
Next
'-------------------------------------  ii:部材番号  mx:要素番号
al1 = al(ii)        '部材長さ
al2 = al1 * al1
al3 = al2 * al1
E = Element(1, mx)  '部材ヤング係数
a = Element(2, mx)  '部材の断面積
IZ = Element(3, mx) '部材の断面二次モーメント
ak(1, 1) = E * a / al1
ak(1, 4) = -ak(1, 1)
ak(4, 4) = ak(1, 1)
ak(2, 2) = 12# * E * IZ / al3
ak(2, 3) = 6# * E * IZ / al2
ak(2, 5) = -ak(2, 2)
ak(2, 6) = ak(2, 3)
ak(3, 3) = 4# * E * IZ / al1
ak(3, 5) = -ak(2, 3)
ak(3, 6) = 0.5 * ak(3, 3)
ak(5, 5) = ak(2, 2)
ak(5, 6) = -ak(2, 3)
ak(6, 6) = ak(3, 3)
'-------------------------------------  剛性行列の下半分にコピー
For i = 2 To 6
 For j = 1 To i
  ak(i, j) = ak(j, i)
 Next
Next
End Sub
```

サブルーチン「Set_Load_M」は、部材荷重より基本応力を計算し、さらに、全体座標系に変換した後、節点の拘束条件を参照して荷重ベクトルを計算するプログラムである。

以下に、このサブルーチンの引数の説明を行う。

pload	荷重ベクトル（配列）既にゼロクリアされていること(out)
n_M_load	部材荷重が加わっている部材数(in)
Load_M	部材荷重の情報（in)入力データ
C_M_Q	部材の基本応力保存場所（配列）(out)
al	部材の長さ（配列）(in)
Member	部材の情報（配列）(in)入力データ
F_rest	節点の未知番号表（配列）(in)
sin_cos	部材の傾きの sin・cos の値（配列）(in)

```
'-----------------------------------------------------
'       部材荷重の設定
'-----------------------------------------------------
Private Sub Set_load_M(pload, n_M_load, Load_M, C_M_Q, al, Member, F_rest, sin_cos)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim i1 As Integer
Dim j1 As Integer
Dim j2 As Integer
Dim Pw As Double
Dim alx As Double
Dim f(6) As Double
Dim ff(6) As Double
Dim R(6, 6) As Double
'----------------------------------------------- 部材両端の荷重ベクトル計算
For i = 1 To n_M_load   '部材荷重の数分計算
i1 = Load_M(1, i)  '部材番号
Pw = Load_M(2, i)  '等分布荷重の値
alx = al(i1)       '部材長さ
f(1) = 0#
f(2) = Pw * alx * 0.5
f(3) = Pw * alx ^ 2 / 12#
f(4) = 0#
f(5) = f(2)
f(6) = -f(3)
'-----------------------------------------------  基本応力の保存とセルへの出力
C_M_Q(1, i1) = f(3)       '固定端モーメント
C_M_Q(2, i1) = f(3) * 0.5 '中央の曲げモーメント
C_M_Q(3, i1) = f(2)       '端部せん断力
'F_cel = "N23"
'Range(F_cel).Offset(i, 0).Value = i1
'Range(F_cel).Offset(i, 2).Value = C_M_Q(1, i1)
'Range(F_cel).Offset(i, 3).Value = C_M_Q(2, i1)
'Range(F_cel).Offset(i, 4).Value = C_M_Q(3, i1)
'Range(F_cel).Offset(i, 5).Value = alx
'Range(F_cel).Offset(i, 6).Value = Pw
'-----------------------------------------------全体座標系に変換
   Call Cal_rot(i1, R, sin_cos)    ' 変換行列の計算
   Call Cal_Trotate(R, f, ff)      ' 全体座標系への変換処理
'-----------------------------------------------荷重ベクトルに組み込む（i 端）
 j1 = Member(1, i1)
```

```
 For j = 1 To 3
  j2 = F_rest(j, j1)
  If (j2 > 0) Then pload(j2) = ff(j) + pload(j2)
 Next
'-----------------------------------------------荷重ベクトルに組み込む（j端）
 j1 = Member(2, i1)
  For j = 1 To 3
  j2 = F_rest(j, j1)
  If (j2 > 0) Then pload(j2) = ff(j + 3) + pload(j2)
 Next
Next
End Sub
```

下記のサブルーチンは、上で説明した部材荷重から荷重ベクトルを作成するサブルーチンの中で、両端の部材座標系で表された基本応力を全体座標系に変換する。サブルーチンの引数は、次の通りである。

R	当該部材の座標変換行列（配列）(in)
f	部材座標系で計算された両端の基本応力（配列）(in)
ff	全体座標系に変換された基本応力（配列）(out)

```
 '-----------------------------------------------------
'       部材両端外力を部材座標系から全体座標系に変換
'-----------------------------------------------------
Private Sub Cal_Trotate(R, f, ff)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim s As Double
'----------------------------------------------
For i = 1 To 6
s = 0#
 For j = 1 To 6
  s = s + R(j, i) * f(j)
 Next
ff(i) = s
Next
End Sub
```

サブルーチン「Cal_rot」は当該部材の座標変換行列を作成するルーチンであるが、それについては次章で説明する。

2.5 課題

本章では、Excel のシート上に図 2-1 の入力用の画面を設定し、Excel の VBA を使用して、解析用プログラムを作成する準備を行う。この入力画面には、「解析開始」ボタンを設定し、ボタンのクリックによって解

析プロシジャーが起動するようにセットする。

次に、このプロシジャー以外に、上の 3 つの関数を作成しておこう。ここでは、この関数の動作確認はできないが、後の章で行う事になる。

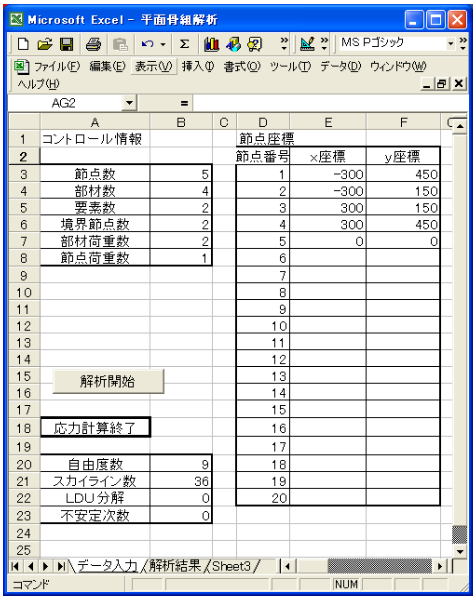

図 2-1 平面骨組の入力仕様

2.6 まとめ

本章では、仮想仕事の原理を用いて、平面骨組の部材剛性行列を求めた。また、得られた剛性行列が、前章のたわみ角法で求めた剛性行列と同一であることを確認した。さらに、この部材剛性行列を作成するプログラムを、Excel の VBA でコード化し、その内容を理解した。課題として、ここで説明された 3 つの関数を実際に作成した。