第３章　骨組の形状と座標変換

ポイント：全体剛性行列の作成
座標変換行列を用いて部材座標系から全体座標系へ

3.1 はじめに

前章では、一つの部材における両端の変位と外力との釣合式を誘導した。その際、その部材に設定した座標系は、材軸を x 方向とした部材に固有の座標系であった。この座標系を部材座標系と呼び、材端の変位や外力もこの座標系に従っている。そのため、部材が連結している場合、互いの部材座標系が異なると、節点での変位の適合と力の釣合が評価できないことになる。そこで、骨組内の全ての部材を一つの座標系（全体座標系）に変換して表し、その座標系で節点変位の適合と力の釣合をとり、全体系の釣合式を作成する。本章では、剛性行列と変位、荷重、材端力に関する 2 つの座標系間の変換公式を誘導する。また、全体座標系における全体剛性行列の作成方法を示す。

キーワード

全体剛性行列　部材座標系と全体座標系　座標変換行列　節点における力の釣合と変位の適合

3.2 節点における変位の適合と力の釣合

骨組全体における釣合式は、節点での変位と材端力の釣合より求める。従って、結合している部材間では、同じ座標系で部材剛性や材端変位、材端力が表されていなければならない。ここでは、部材座標系と全体座標系間の変換について考えてみよう。

部材座標系とは、図 3-1 に示されるように、骨組内でどのような角度、位置に設置された部材でも、図 3-2 に示すように同じ座標系で表される。従って、部材が結合している節点では、異なる部材座標系で表された変位や荷重は、図 3-3 のように変位の適合や荷重の釣合が評価できないことになる。そこで、両部材の座標系を部材座標系から全体座標系に変換すると、各変位は同一方向となり、変位の適合が行われ、また、力の釣合も間違いなく評価されることになる。

まず、前章で求めた部材座標系で表された部材の釣合式を再度以下に示す。

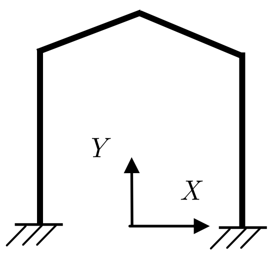

図 3-1 骨組を一つの座標系・全体座標系で表す

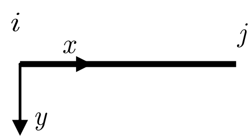

図 3-2 i 端を原点とする部材座標系

$$
\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
 & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
 & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
 & Sym & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
 & & & & & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \cdots\cdots(3.1)
$$

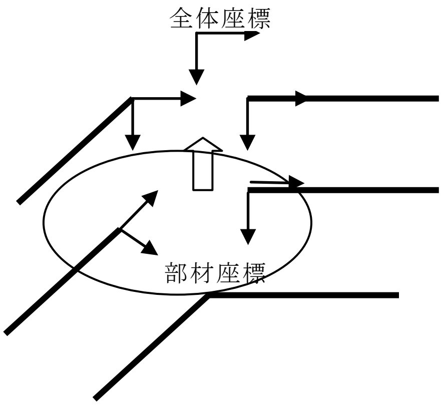

図 3-3 節点における変位の適合と力の釣合

上の釣合式を次のように行列を用いて表す。

$$
\left.\begin{aligned}
&\{p\} = [k]\{u\} \\
&\{u\}^T = \left\{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\right\}; \quad \{p\}^T = \left\{P_i \quad Q_i \quad M_i \quad P_j \quad Q_j \quad M_j\right\}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.2)
$$

ここでは、上のように小文字で表された節点荷重、変位、及び部材剛性行列は部材座標系で表されているとする。

次に、図 3-4 を参考に部材座標系と全体座標系の両座標系における変位を考えてみよう。全体座標系(X, Y)における変位を(U,V)とし、また、部材座標系(x, y)における変位を(u,v)とする。同図より、全体座標系と部材座標系の関係が次のように得られる。

$$
\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cdots\cdots(3.3)
$$

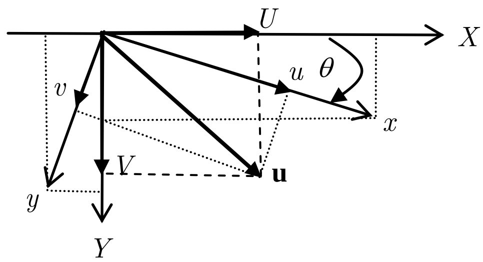

図 3-4 i 点を原点にθ回転した両座標系間の変換と変位ベクトルの変換

次に、変位ベクトル u を次のように両座標系で表わす。無論、両者は同じベクトルを表わすことから等しい。

$$
\mathrm{u} = (u,v)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (U,V)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdots\cdots(3.4)
$$

上式の右辺に、式(3.3)を代入すると

$$
(u,v)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (U,V)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots\cdots(3.5)
$$

となり、上式の両辺は部材座標系における変位である。上式が成立するためには、各座標の係数が等しくなくてはならないことから、次式が得られる。

$$(u,v)=(U,V)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

上式の両辺で転置を取ると、次式のように 2 つの座標系における変位の変換公式が得られる。

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U\\ V\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

式(3. 7)右辺の係数行列は特殊な行列であり、次のようにこの行列の列をベクトルとすると、自分自身との内積は 1 となり、他との内積はゼロとなる。

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\\ (\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\\ \cos\theta\cdot\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta=0\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

上の特徴を有する行列は直交行列であり、逆行列はその行列の転置で得られる。従って、式(3. 7 の)両辺に左から転置行列を掛けることで、次式のように変位の逆変換が得られることになる。

$$\begin{Bmatrix}U\\ V\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

ここで、式(3. 7)を次のように行列で表すと、

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=[R_z]\begin{Bmatrix}U\\ V\end{Bmatrix};\quad [R_z]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

部材両端の変位と外力は、式(3. 2)を参考にすると、次のように表すことができる。

$$\left.\begin{array}{l}\{p\}=[R]\{P\}\\ \{u\}=[R]\{U\}\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

ここで、変換行列$[R]$は、式(3. 7)より次式となる。

$$[R]=\begin{bmatrix}[R_z] & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & [R_z] & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

式(3.12)を利用して、式(3.2)の部材座標系の釣合式を全体座標系の釣合式に変換する。まず、式(3.11)を式(3.2)の上に代入する。

$$[R]\{P\}=[k][R]\{U\} \quad \cdots\cdots(3.13)$$

さらに、上式の両辺左より、変換行列$[R]$の逆行列、つまり転置行列を掛け、整理すると次式が得られる。

$$[R]^T[R]\{P\}=[R]^T[k][R]\{U\}$$
$$\{P\}=[K]\{U\};\quad [K]=[R]^T[k][R] \quad \cdots\cdots(3.14)$$

以上のように、全体座標系による部材の釣合式が得られた。上式中の剛性行列$[K]$は全体座標系で表された剛性行列であり、変換行列を部材剛性行列の前後から掛けることによって変換される。ただし、前からは変換行列の転置を使用する。

3.3 全体座標系と部材座標系

骨組を解析する場合、部材座標系と全体座標系を利用しており、前節ではこの２つの座標間の変換式を導いた。本節では、さらに、両座標系に置ける役割とその間の関係をまとめておこう。

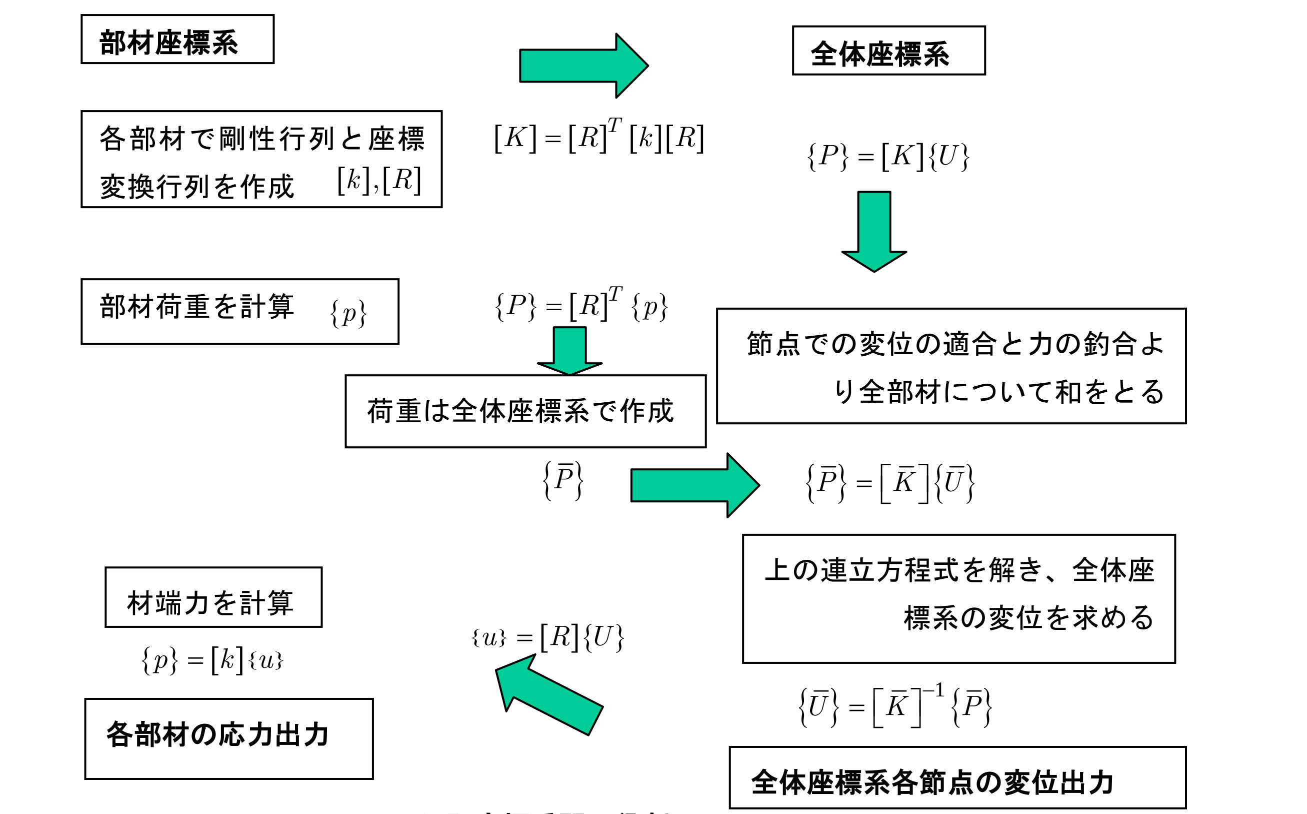

図 3-5 座標系間の役割

図 3-5 を参考にすると、まず各部材について部材座標系で剛性行列と骨組の形状から座標変換行列を求める。さらに、その座標変換行列によって剛性行列を部材座標系から全体座標系に変換する。全体座標系の剛性行列は節点における変位の適合と力の釣合より、骨組全体の全体剛性行列に組み込まれる。次に得られた骨組全体の剛性行列を LDU 分解する。

一方、部材座標系で部材に直接加わる部材荷重がある場合、基本応力と呼ばれる材端外力を計算し、さらに、座標変換行列を用いて部材座標系から全体座標系に変換する。全体座標系に変換された節点荷重を、節点における力の釣合より骨組全体の荷重ベクトルに組み込む。

全体座標系で表され、LDU 分解された剛性行列と荷重ベクトルを用いて、骨組全体の釣合式を解く。得られた変位を、境界条件を参照しながら各節点変位に整理し、出力する。さらに部材両端の変位を取り出し、全体座標系から部材座標系に変換する。この部材座標系で表された部材両端の節点変位と部材剛性行列を掛け算して両端の材端力を計算し、その外力に釣合う断面力と部材荷重による断面力を加えて、部材内部の断面力を求める。この部材断面力を各部材毎に整理して出力する。このように、全体座標系での処理と部材座標系での処理が混在している。

3.4 全体剛性行列と座標変換行列

前節の説明で、骨組の応力解析処理の流れを概略理解できたと思う。本節から、この流れの中で重要な部分から順次、詳細に説明する。これまでに、部材座標系における部材の釣合式、剛性行列、また、全体座標系に変換するための変換行列、全体座標系で表された剛性行列の作成法を学んだ。本節では、平面骨組解析のプログラムで最も重要である全体剛性行列の構築部分を説明する。最初に、以下の部材座標系の剛性行列を作成する。

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & Sym & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdots\cdots(3.15)$$

上の部材座標系における剛性行列を計算するために、以下の情報が必要となる。

1．部材長さ（l）
2．ヤング係数（E）
3．断面積（A）
4．断面二次モーメント（I）

上記の中で部材長さ以外は、要素データとして入力される。部材長さは、予備計算の中で、部材両端の節点座標から次式のように計算される。

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad \cdots\cdots(3.16)$$

座標変換行列は、部材両端の座標関係より、式(3.9)より次式で表される。この変換行列も、部材両端の座標から計算される $\cos\theta, \sin\theta$ の値から容易に作り出すことができる。このプログラムでは、$\cos\theta, \sin\theta$ の値を予備計算で求め、この値を部材毎に保存する。

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_z] & 0 \\ 0 & [R_z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots(3.17)$$

全体座標系で表された部材剛性行列は、部材座標系の剛性行列から、次の行列 3 重積で求められる。

$$[K] = [R]^T [k][R] \quad \cdots\cdots(3.18)$$

さらに、計算コストを考えると、次式のように分割して 3 重積を計算することも考えられる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ sym & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^T & 0 \\ 0 & R_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_z & 0 \\ 0 & R_z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_z^T k_{11} R_z & R_z^T k_{12} R_z \\ sym & R_z^T k_{22} R_z \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(3.19)$$

上式の使用は、計算コード開発に掛かるコストと解析対象の大きさに関

連して決めることになる。

次に、全体剛性行列の作成について考えよう。まず、全体剛性をどのような形式で保存するかについて決めておく必要がある。計算スピードとメモリーコストを考えると全体剛性行列の特性を利用しなければならない。ここで、利用できる特性とは、全体剛性行列は実対称であり、また、ゼロ以外の値は対角項近辺に集まる傾向がある。そこで、保存用行列として、

１．対称行列
２．帯行列
３．スカイライン行列

などが考えられる。

いずれの形式を採用するにしても、全体剛性行列を作成するためには、特殊な表が必要となる。この表は予備計算で作成される。

3.5 予備計算

本節では、全体剛性行列や荷重ベクトルを作成するために必要となる特別な表、未知番号表の作成方法やその使用方法について説明する。また、部材の長さやその部材の全体座標系における角度についても、計算方法を示す。これらは、応力解析を実施する前の予備計算として、全体剛性行列を計算する前に処理されるルーチンである。

ここでは、最も単純な対称行列を用いて、全体剛性行列の作成方法を理解する。境界条件を表す節点拘束表が先に作成され、この表を元に未知番号表を同じ保存場所に作り直すことになる。この未知番号表の作成で必要となる情報は以下のようである。なお、この処理は予備計算で行われる。

１）節点拘束表：P_rest(3,np) np:骨組の節点数
２）部材の結合節点番号表： M_point(3,nm)
　　(入力　1;i 節点番号　2:j 節点番号 3:要素番号)
３）節点座標： Point(2,np)(入力) 1:x 座標　2:y 座標
４）境界条件：Kyokai(4,np)(入力) 1:節点番号 2-4 境界条件

本節で、先ずこの未知番号表の作成方法を、簡単な例題を用いて説明する。例題の骨組は図 3-5 に示す山形ラーメンである。この骨組の境界条件は、節点１と５を固定支持とする。まず、入力情報として以下のような境界条件が設定される。ここで、第１項は節点番号、2 から４は各々、x、y 方向、回転方向の自由度であり、記号０は拘束、１は自由としてい

る。また、入力データとして、部材の結合節点番号表と節点座標が与えられているものとする。2つの表の入力仕様は、次章で詳細に示される。

部材番号順に
ｉ端節点番号
ｊ端節点番号
要素番号

境界条件　Kyokai(4,*)
(入力)
1,0,0,0
5,0,0,0

全体座標系で、
x 座標(cm)
y 座標(cm)

部材の結合節点番号
M_point
(*,1)： 1,2,1
(*,2)： 2,3,2
(*,3)： 3,4,2
(*,4)： 4,5,1

節点座標　Point
(*,1)： -300.,450.
(*,2)： -300.,150.
(*,3)： 0.， 0.
(*,4)： 300.,150.
(*,5)： 300.,450.

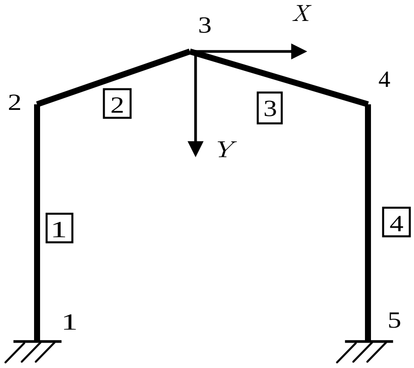

図 3-6 未知番号表作成用骨組

節点拘束表を作成するに当たって、最初に、次のように全節点について拘束表の自由度を 1 にセットする。

節点拘束表　P_rest
(*,1)： 1,1,1
(*,2)： 1,1,1
(*,3)： 1,1,1
(*,4)： 1,1,1
(*,5)： 1,1,1

⇨

節点拘束表　P_rest
(*,1)： 0,0,0
(*,2)： 1,1,1
(*,3)： 1,1,1
(*,4)： 1,1,1
(*,5)： 0,0,0

さらに、境界条件を保存している配列 Kyokai を使用して、上の図のように、節点拘束表を変換する。ここでは、全節点の自由度に関して、拘束(0)か、あるいは自由(1)に設定されている。

次に、節点拘束表を未知番号表に変換する。ここでは、最も単純な方法を採用する。この変換に工夫を加えることで、計算コストが飛躍的に小さくなる場合があるが、ここでは、最も単純な節点番号順に未知番号を付ける方法を説明する。まず、未知番号を割り振る変数 i_free をゼロに初期セット、強制変位を示す番号変数 j_free もゼロセットする。ただし、このテキストでは骨組に強制変位を与え、骨組の応力解析を実施するようにはなっていないが、この表では、設定可能なように処理される。なお、強制変位を与える節点自由度は、境界条件で-1 を与える

ことになる。次に各節点の自由度を順次検査し、0 の場合は拘束なのでなにもせず、1 の場合は、i_free に 1 を足し、その値を検査している拘束表にセットする。また、−1 の場合は強制変位の変数 j_free に 1 を足し、同じく拘束表にその値をセットする。ただし、未知番号と区別するため強制自由度番号は負の値とする。以上の処理の流れを図 3-7 に示す。

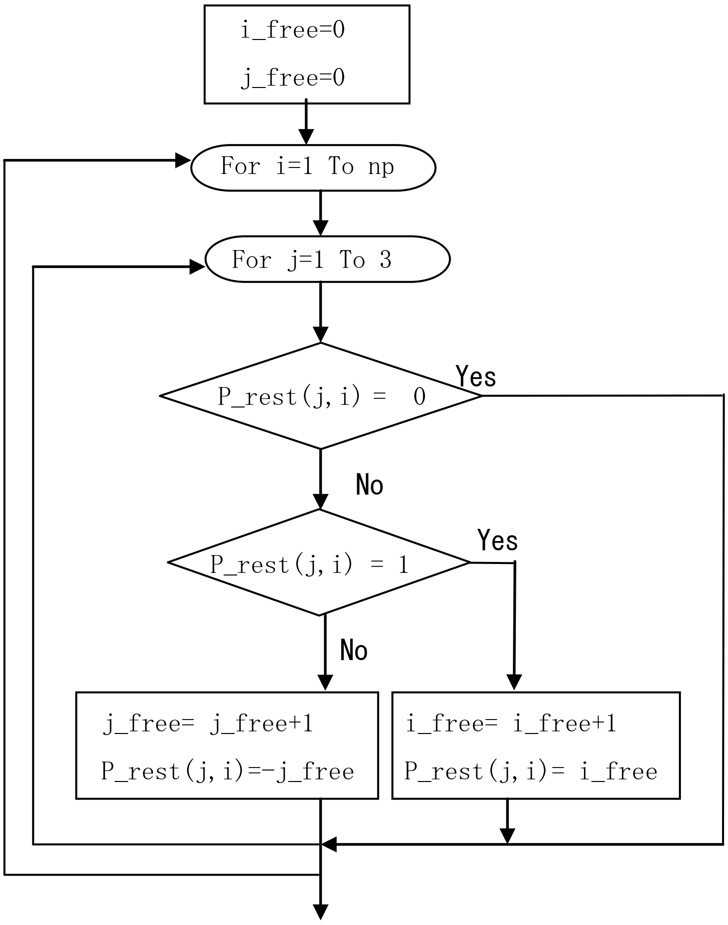

図 3-7 未知番号表作成フローチャート

以上の処理によって作成された例題の未知番号表を以下に示す。ここで、最後の未知番号が釣合式の次数となる。

未知番号表　P_rest
(*,1)： 0,0,0
(*,2)： 1,2,3
(*,3)： 4,5,6
(*,4)： 7,8,9
(*,5)： 0,0,0

以上の処理は、予備計算 1 で行われ、サブルーチン Cal_Yobi()で実施される。以下に、そのサブルーチンを示す。

```
'----------------------------------------------------
'       予備計算その１(節点拘束表から未知番号表に変更)
'----------------------------------------------------
Private Sub Cal_Yobi(F_rest, n_point, n_kyokai, Kyokai, n_free)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim i_free As Integer
Dim j_free As Integer
Dim k As Integer
Dim F_cel
'----------------------------------  拘束表に１をセット
 For i = 1 To n_point
 For j = 1 To 3
 F_rest(j, i) = 1
 Next
 Next
 '----------------------------------  境界条件セット
 For i = 1 To n_kyokai
 k = Kyokai(1, i)
 For j = 1 To 3
 F_rest(j, k) = Kyokai(j + 1, i)
 Next
 Next
'----------------------------------  拘束表を未知数番号表に変換
 i_free = 0
 j_free = 0
 For i = 1 To n_point
 For j = 1 To 3
 If (F_rest(j, i) = 1) Then
   i_free = i_free + 1
   F_rest(j, i) = i_free
 ElseIf (F_rest(j, i) < 0) Then
   j_free = j_free + 1
    F_rest(j, i) = -j_free
 End If
 Next
 Next
 n_free = i_free    '全自由度をセット
End Sub
```

予備計算で行う処理で、部材長さと当該部材の傾きを計算するルーチンを示す。ここでは、先に示した部材の結合節点番号と節点座標を使用する。プログラムは非常に単純なので、ソースコードのみ以下に示す。

```
'----------------------------------------------------
'       部材長さと傾きの計算
'----------------------------------------------------
```

```
Private Sub Al_member(n_Member, Member, Point, al, sin_cos)
Dim i As Integer
Dim i1 As Integer
Dim i2 As Integer
'----------------------------------
For i = 1 To n_Member
 i1 = Member(1, i)
 i2 = Member(2, i)
 al(i) = Sqr((Point(1, i2) - Point(1, i1)) ^ 2 + (Point(2, i2) - Point(2, i1)) ^ 2)
 sin_cos(2, i) = (Point(1, i2) - Point(1, i1)) / al(i)
 sin_cos(1, i) = (Point(2, i2) - Point(2, i1)) / al(i)
Next
End Sub
```

上記のプログラムの中で、n_Member,n_point,n_kyokai は、各々、解析骨組の部材数、節点数、境界節点数を表し、入力データとしてセルより既に入力されているものとする。

3.6 全体剛性行列の作成

本節では、全体剛性行列を作成する手続きについて説明する。全体剛性行列は、図 3-8 に示すように、まず、部材座標系で部材剛性行列を計算し、また、その部材の座標変換行列を作成する。次に、この座標変換行列を使用して、行列の 3 重積を行い、全体座標系における部材剛性行列を作成する。続いて、先の未知番号表を用いて、この部材剛性行列を全体剛性行列に組み込むことになる。

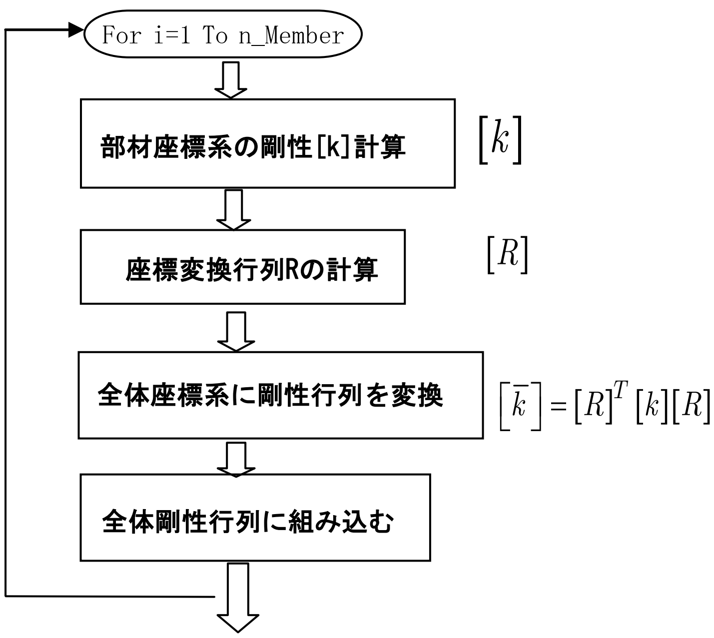

図 3-8 全体剛性行列作成フローチャート

上記のフローチャートの中で、部材の座標変換行列（回転行列）と全体座標系に変換する行列３重積に関するサブルーチンを示す。これらは、単純なプログラムであり、理解するのは容易であろう。

```
'-----------------------------------------------------
'       部材回転行列の計算
'-----------------------------------------------------
Private Sub Cal_rot(ii, R, sin_cos)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
'-----------------------------------
For i = 1 To 6
 For j = 1 To 6
  R(i, j) = 0
 Next
  R(i, i) = 1
Next
 R(1, 1) = sin_cos(2, ii)
 R(2, 2) = sin_cos(2, ii)
 R(4, 4) = sin_cos(2, ii)
 R(5, 5) = sin_cos(2, ii)
 R(1, 2) = sin_cos(1, ii)
 R(2, 1) = -sin_cos(1, ii)
 R(4, 5) = sin_cos(1, ii)
 R(5, 4) = -sin_cos(1, ii)
End Sub
```

```
'-----------------------------------------------------
'       部材座標系から全体座標系に剛性行列の変換
'-----------------------------------------------------
Private Sub Cal_all_rot(ak, akk, R)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim s As Double
Dim RR(6, 6) As Double
'-------------------------------------------
For i = 1 To 6
 For j = 1 To 6
  s = 0#
  For k = 1 To 6
   s = s + R(k, i) * ak(k, j)
  Next
  RR(i, j) = s
 Next
Next
'-------------------------------------------
For i = 1 To 6
 For j = 1 To 6
  s = 0#
  For k = 1 To 6
   s = s + RR(i, k) * R(k, j)
```

```
    Next
    akk(i, j) = s
   Next
  Next
  End Sub
```

最後に、例題の骨組を用いて、部材剛性行列を全体剛性行列に組み込む方法について説明する。ここでは、理解を容易にするため、通常の対称行列を用いることにする。

まず、全体剛性行列をゼロクリアする。既に、釣合式の次数は、未知番号表から得られているので、その値を用いて組み込む全体剛性行列の配列要素をゼロにする。次に、順次、部材剛性行列をこの全体剛性行列に足しこむことになる。

まず、未知番号表を元に、第１部材の全体座標系に変換された剛性行列は、節点での変位の適合と力の釣合より、次のように全体剛性行列に足しこまれる。

未知番号表　P_rest
(∗, 1)： 0, 0, 0
(∗, 2)： 1, 2, 3
(∗, 3)： 4, 5, 6
(∗, 4)： 7, 8, 9
(∗, 5)： 0, 0, 0

$$
[K_1]=\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & * & * & * \\ \# & \# & \# & * & * & * \\ \# & \# & \# & * & * & * \end{bmatrix}
\Rightarrow
[\bar{K}]=\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & & & & & & \\ * & * & * & & & & & & \\ 0 & & & 0 & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

図 3-9 部材１の剛性を全体剛性行列に足しこむ処理を示す

部材剛性行列より全体剛性行列を作成する際、各剛性要素は、未知番号表を参照し、全体剛性行列の適切な位置に足しこまれる。部材１では、未知番号表から分かるように、節点１の３つの自由度はいずれも拘束し

ているため、部材剛性行列のマーク#の剛性要素は足しこまれず、無視される。また、節点２における自由度はいずれも自由であるため、図のようのマーク*の要素が、未知番号表から求めた全体剛性行列の適切な位置に、足しこまれる。

$$[K_2]=\begin{bmatrix} * & * & * & \# & \# & \# \\ * & * & * & \# & \# & \# \\ * & * & * & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & * & * & * \\ \# & \# & \# & * & * & * \\ \# & \# & \# & * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow [\bar{K}]=\begin{bmatrix} *+* & *+* & *+* & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 \\ *+* & *+* & *+* & \# & \# & \# & & & \\ *+* & *+* & *+* & \# & \# & \# & & & \\ \# & \# & \# & * & * & * & & & \\ \# & \# & \# & * & * & * & & & \\ \# & \# & \# & * & * & * & & & \\ 0 & & & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

図 3-10 部材 2 の剛性を全体剛性行列に足しこむ処理を示す

続いて、部材 2 では、両端とも全変位は自由であるため、マーク*の剛性と、マーク#の練成項も図3-10のように適切な位置に足しこまれる。特に、未知番号 1,2,3 では、部材 1 と 2 の剛性の和となっていることに注意されたい。これらは変位の適合と力の釣合から得られることになる。

上記の操作を全部材について行うと、最終的に、骨組全体の剛性行列が得られることになる。上記の手法が、図 3-11 の流れ図として示されている。ここで、配列 ak(i, j)は部材剛性行列であり、同じく配列 smk(i, j)は、全体剛性行列を表す。ここでの処理は、全体剛性行列が、正方行列を使用しているため、非常に単純であり、理解し易い。ただし、このフローチャートでは、先に示した強制変位の解析には対応しておらず、境界は単純な節点を拘束する場合のみである。

このテキストでは、全体剛性行列として、1 次元配列のスカイライン行列を使用している

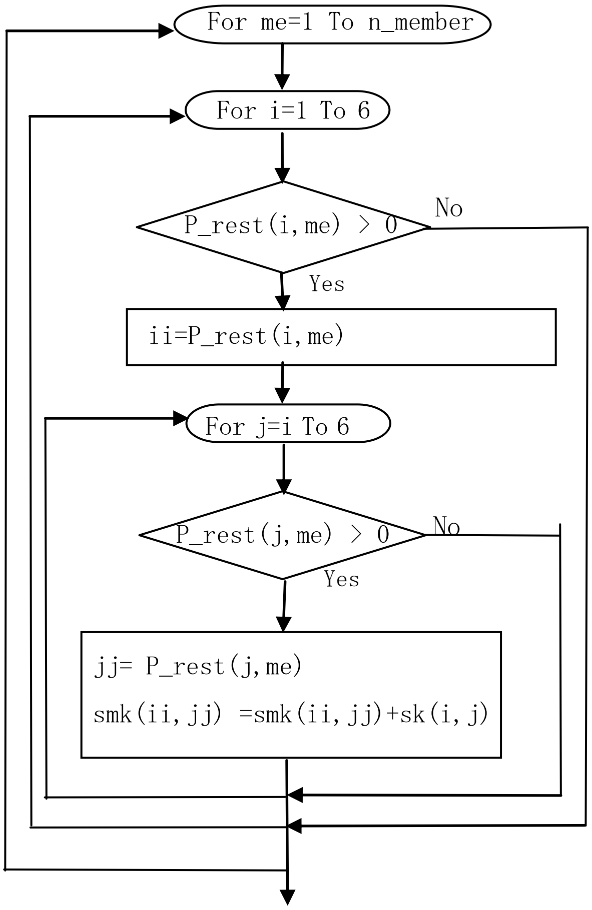

図 3-11 全体剛性行列作成フローチャート

ため、ここでは、VBA のプログラムコードは省き、章を変えて詳細に説明する。

座標変換のプログラムを説明したので、次に、全体座標系から部材座標系に変換するプログラムを紹介する。座標変換を行う式は、式(3.8)で与えられている。ここでは、全体座標系から、部材両端の変位や応力を取り出し、それらを部材座標系に変換する。

```
'----------------------------------------------------
'       部材両端変位を全体座標系から部材座標系に変換
'----------------------------------------------------
Private Sub Cal_rotate(R, u, uu)
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim s As Double
'----------------------------------------------
For i = 1 To 6
s = 0#
 For j = 1 To 6
  s = s + R(i, j) * u(j)
 Next
uu(i) = s
Next
End Sub
```

3.7 課題

本章では、前章に引き続いて、骨組解析のプログラムに上で学んだ 5 つのプログラムを組み込む。後から、デバックするのは大変なので、プログラムを書き込む際、間違いのないようにコードの内容を良く理解してから組み込もう。

3.8 まとめ

本章では、2 つの座標系とその間の座標変換について学んだ。一つは、部材の剛性行列を表す部材固有の座標系である部材座標系であり、他の一つは、節点での変位の適合と力の釣合を得るために一つの座標系として全体座標系である。さらに、全体釣合式に各部材の剛性を組み込むために、この剛性を全体座標系に変換する方法も学習した。ここでは、これらに関連するプログラムコードを学び、具体的に作成しつつある平面骨組の中に、これらのサブルーチンを組み込んだ。