

不静定梁のたわみと断面力



構造力学 I

第11回講義内容

- 1) 不静定梁のたわみと断面力
- 2) 両端固定梁の解析
- 3) 演習
- 4) まとめ

不静定梁のたわみと断面力

不静定構造物は、力の釣合から断面力や反力を先に求めることはできない。そこで、次に示す梁の基礎式である微分方程式を用いて、変位関数から求めることになる。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x)$$

上の方程式は、4階の微分方程式であることから、4つの境界条件が必要となる。

中央集中荷重を受ける両端固定梁

ここでは、集中荷重なので $P_w(x) = 0$ とし、境界条件で荷重を評価する。このモデルの微分方程式は以下のようになる。ただし、このたわみ関数 $w(x)$ は、構造が対称であることを考慮して $0 \leq x < L/2$ の範囲で有効となる。

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

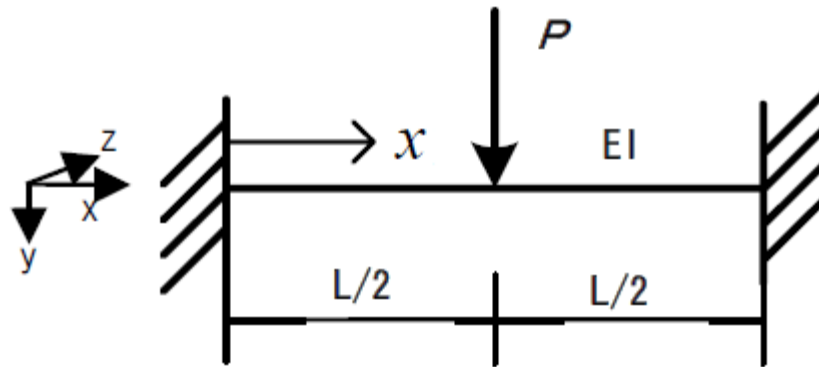


図 11-1 両端固定梁の解析モデル

中央集中荷重を受ける両端固定梁

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

上式を解くために、以下のように両辺を4 回積分する。

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} = C_1$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

中央集中荷重を受ける両端固定梁

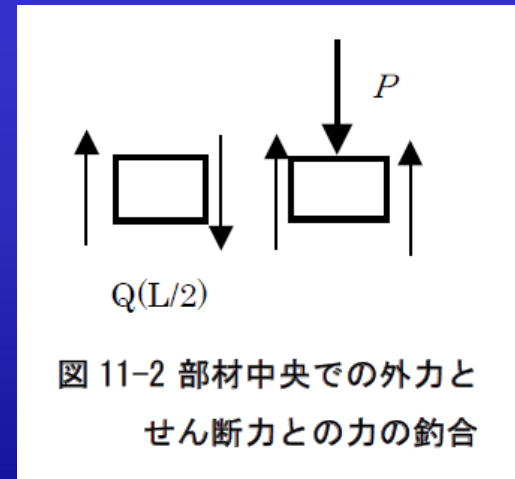
次に、4つの境界条件によって積分定数を決定する。境界条件は左端と中央点で以下のように与える。ここで、境界条件の上2式は左端が固定であることから、また3番目は構造が対称で部材中央の回転角がゼロとなることから得られる。最後の境界条件は、図(11-2)のように中央点での上下方向の力の釣合、つまり荷重とせん断力との力の釣合から得られる。

$$w(0) = 0$$

$$\theta(0) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = -EI_z \left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{P}{2}$$



中央集中荷重を受ける両端固定梁

境界条件の上2式より、

$$EI_z w(0) = C_4 = 0$$

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_3 = 0$$

さらに、下2式より、

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{L^2 C_1}{8} + \frac{L}{2} C_2 = 0$$

$$EI_z \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=\frac{L}{2}} = C_1 = -\frac{P}{2}$$

積分定数が次のように決定される。

$$C_1 = -\frac{P}{2}$$

$$C_2 = \frac{PL}{8}$$

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \theta(0) &= \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \\ \theta\left(\frac{L}{2}\right) &= \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \\ Q\left(\frac{L}{2}\right) &= -EI_z \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

中央集中荷重を受ける両端固定梁

決定した積分定数をたわみ式に代入すると、

$$w(x) = -\frac{P}{12EI_z}x^3 + \frac{PL}{16EI_z}x^2$$
$$= \frac{PL^3}{48EI_z} \left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

$$C_1 = -\frac{P}{2}; \quad C_2 = \frac{PL}{8}$$

載荷点における鉛直変位 δ は、上式に $x = L/2$ を代入することで次のように求められる。

$$\delta = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{192EI_z}$$

曲げモーメントとせん断力は、

$$-Q(x) = EI_z \frac{d^3w}{dx^3} = C_1$$

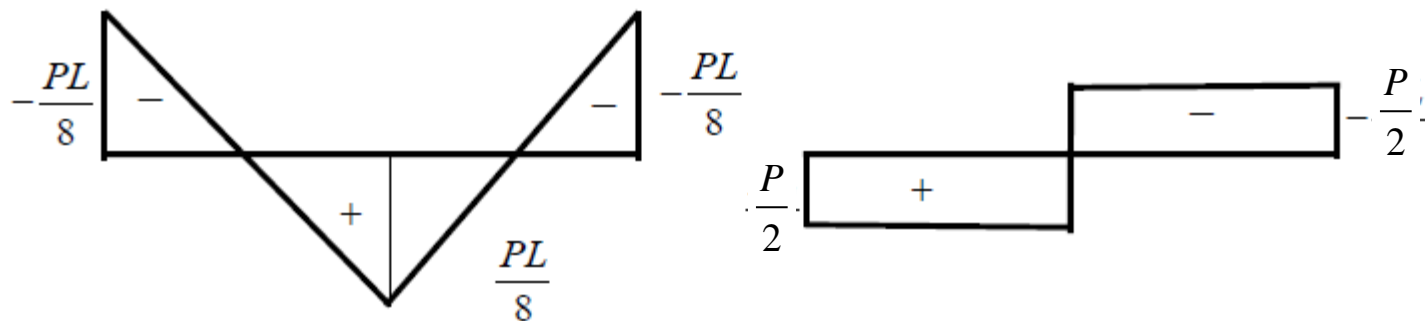
$$-M(x) = EI_z \frac{d^2w}{dx^2} = C_1x + C_2$$

中央集中荷重を受ける両端固定梁

得られた積分定数より、上式に代入すると、曲げモーメントとせん断力が次式で与えられる

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -C_1 x - C_2 \\ &= -\frac{PL}{8} + \frac{P}{2}x = -\frac{PL}{8} \left(1 - 4\left(\frac{x}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

$$Q(x) = -EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = -C_1 = \frac{P}{2}$$



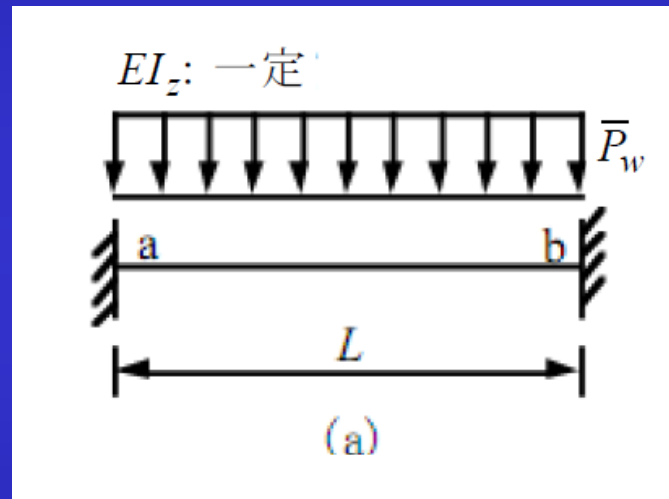
曲げモーメント図

せん断力図

図 11-3 両端固定梁の曲げモーメント図とせん断力図

例題11-1

図に示す等分布荷重が加わる両端固定梁の断面力と最大たわみを求めよ。



例題11-1の答え

等分布荷重を受ける梁の釣合式を示す微分方程式は、

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{P}_w$$

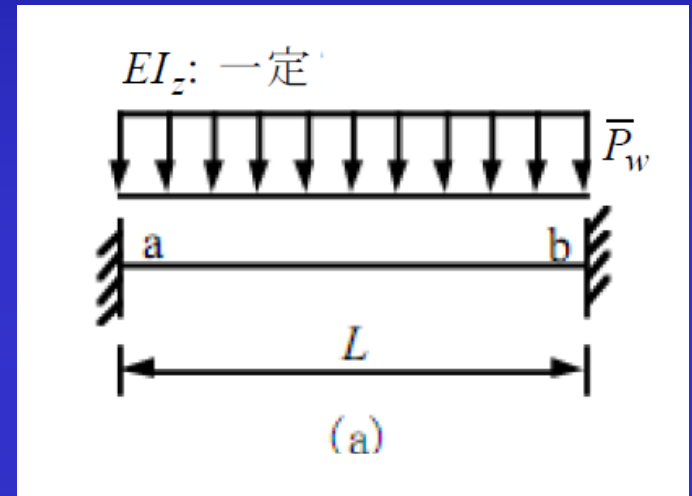
で与えられ、上の両辺を4回積分すると、

$$EI_z \frac{d^3 w}{dx^3} = \bar{P}_w x + C_1$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} \bar{P}_w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} \bar{P}_w x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI_z w = \frac{1}{24} \bar{P}_w x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$



例題11-1の答え

境界条件として、梁両端が固定であることより、以下の4つの条件が得られる。

$$w(0) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$w(L) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$EI_z \frac{d^3 w}{dx^3} = \bar{P}_w x + C_1$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} \bar{P}_w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} \bar{P}_w x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI_z w = \frac{1}{24} \bar{P}_w x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

境界条件の上2式を右の下2式に適用すると、

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_3 = 0$$

$$EI_z w(0) = C_4 = 0$$

さらに、上2式を右の下2式に適用する。

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = \frac{1}{6} \bar{P}_w L^3 + \frac{1}{2} C_1 L^2 + C_2 L = 0$$

$$EI_z w(L) = \frac{1}{24} \bar{P}_w L^4 + \frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 = 0$$

例題11-1の答え

上式を整理すると、

$$\frac{1}{6}\bar{P}_w L^2 + \frac{1}{2}C_1 L + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{12}\bar{P}_w L^2 + \frac{1}{3}C_1 L + C_2 = 0$$

上式を連立にして、積分定数 C_1, C_2 を求めると、

$$C_1 = -\frac{\bar{P}_w L}{2}; \quad C_2 = \frac{\bar{P}_w L^2}{12}$$

求めた積分定数より曲げモーメント分布を求める。曲げモーメントは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + \frac{\bar{P}_w}{2} Lx - \frac{\bar{P}_w}{12} L^2 \\ &= \frac{\bar{P}_w L^2}{12} \left(-6\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

例題11-1の答え

上式より、梁端部及び中央の曲げモーメントは、

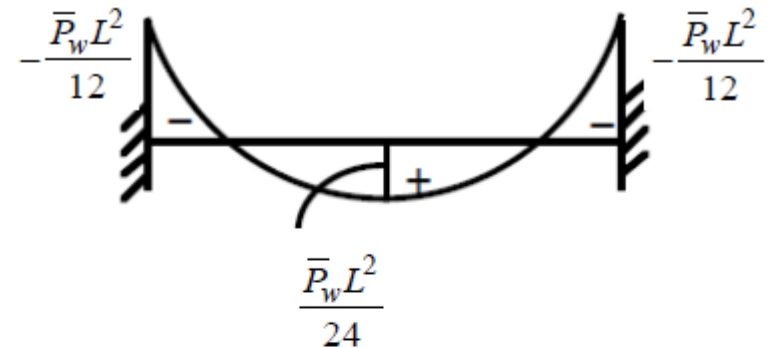
$$M(0) = -\frac{\bar{P}_w L^2}{12}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\bar{P}_w L^2}{24}$$

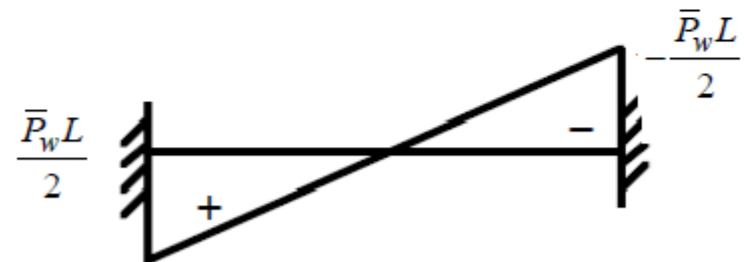
次に、梁端部及びせん断力分布は、

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\bar{P}_w x + \frac{\bar{P}_w L}{2} \\ &= \frac{\bar{P}_w L}{2} \left(-2\left(\frac{x}{L}\right) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$Q(0) = \frac{\bar{P}_w L}{2}$$



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

例題11-1の答え

次に、たわみ分布と回転角分布は、

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{\bar{P}_w}{EI_z} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{Lx^3}{12} + \frac{L^2x^2}{24} \right) \\&= \frac{\bar{P}_w L^4}{24EI_z} \left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) \\\theta(x) &= \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{4} + \frac{L^2x}{12} \right) \\&= \frac{\bar{P}_w L^3}{12EI_z} \left(2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right) \right)\end{aligned}$$

たわみの最大値は、部材中央に生じ、

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$



$$w_{\max} = \frac{\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$

(d)変形

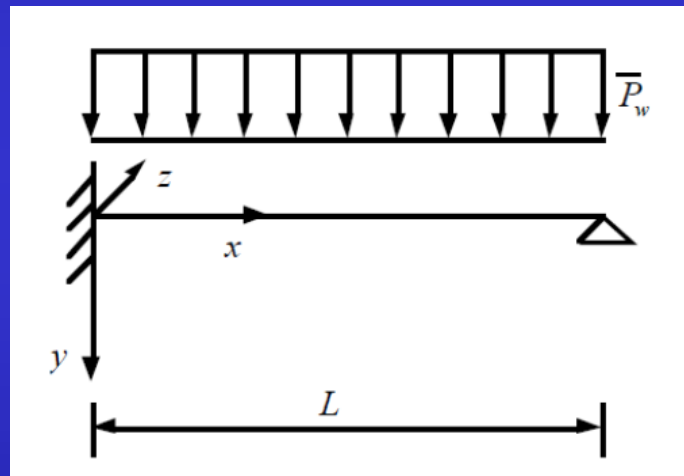


(e)回転角

図 11-4 等分布荷重を受ける両端固定梁の断面力分布と変形状態

例題11-2

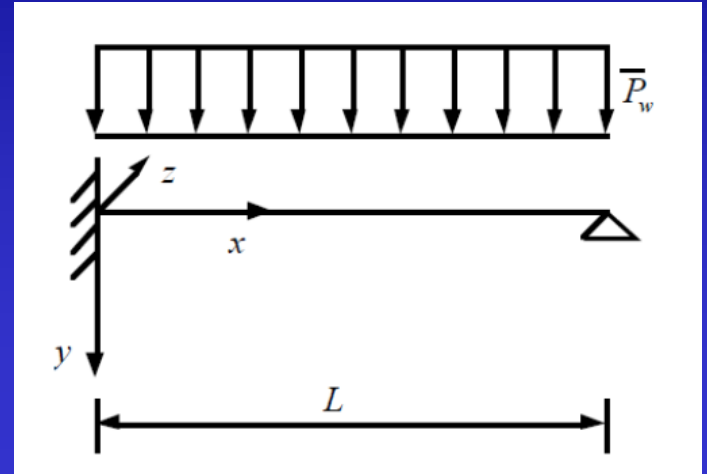
図に示す一端固定・一端ピン支持の不静定梁が等分布荷重を受けるモデルを応力解析し、断面力の分布とたわみ曲線、あるいは最大曲げモーメントや最大変位を求めよ。



例題11-2の答え

不静的梁の解析を行う4階の微分方程式を以下に示す。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x)$$



ここで、一般には $P_w(x)$ は分布荷重関数であるが、ここでは、等分布荷重であるため定数となる。

例題11-2の答え

上式を解くために、以下のように両辺を4回積分する。

$$EI_z \frac{d^3 w}{dx^3} = \bar{P}_w x + C_1$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} \bar{P}_w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} \bar{P}_w x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI_z w = \frac{1}{24} \bar{P}_w x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

上式には積分定数が4つあり、4つの境界条件が必要となる。まず、梁の左端は固定であるため、その点の変位と回転角（勾配）は、次に示すように共にゼロとなる。

$$w(0) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \theta(0) = 0$$

例題11-2の答え

また、右端はピン支持であるため、

$$w(L) = 0$$

として、変位に対する境界を与え、他のひとつの境界は応力で与えることになる。ここでは、ピン支持であることから、曲げモーメントはゼロとなる。

$$M(L) = -EI_z \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=L} = 0$$

最初に、たわみと回転角の式に、左端は固定の条件を適用すると、

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_3 = 0$$

$$EI_z w(0) = C_4 = 0$$

例題11-2の答え

となり、2つの積分定数が決定する。次に、右端の境界条件として、

$$EI_z w(L) = \frac{1}{24} \bar{P}_w L^4 + \frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 = 0$$

応力境界として、次のように曲げモーメントがゼロの条件を適用する。

$$M(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} L^2 - C_1 L - C_2 = 0$$

上2式を連立にして、積分定数を以下のように求める。

$$\begin{array}{ll} 4C_1 L + 12C_2 = -\bar{P}_w L^2 & \\ 2C_1 L + 2C_2 = -\bar{P}_w L & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = -\frac{5\bar{P}_w L}{8} \\ C_2 = \frac{\bar{P}_w L^2}{8} \end{array}$$

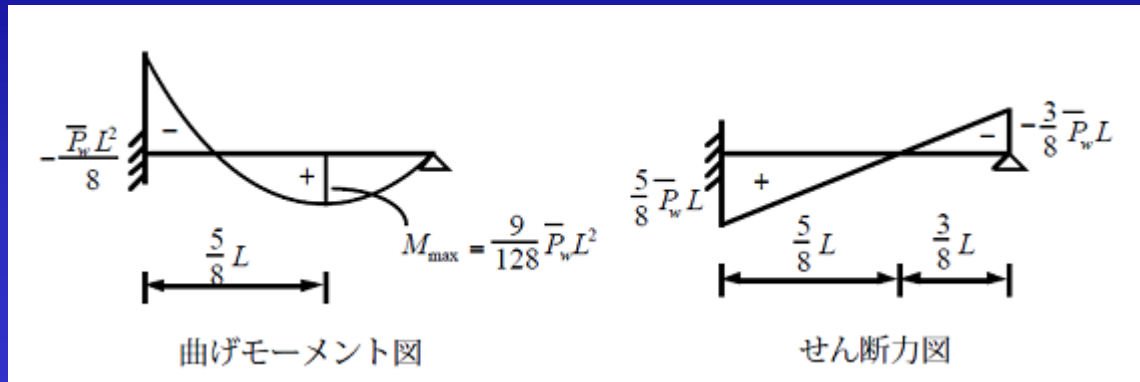
例題11-2の答え

これで、積分定数は全て決定したので、たわみや断面力は、これらの積分定数を該当する関数に代入すれば得られる。まず、断面力を求めてみよう。曲げモーメントとせん断力は、

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + \frac{5P_w}{8} Lx - \frac{P_w}{8} L^2 \\ &= \frac{\bar{P}_w L^2}{8} \left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) = -\frac{\bar{P}_w L^2}{8} \left(4\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) \left(\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right) \\ Q(x) &= -\bar{P}_w x + \frac{5}{8} P_w L = \frac{\bar{P}_w L}{8} \left(-8\frac{x}{L} + 5 \right) \end{aligned}$$

曲げモーメントは、上式より x に関する2次式となる。上の関数を用いて、不静定梁の曲げモーメントとせん断力図を以下に示す。

例題11-2の答え



梁の両端では、曲げモーメントは

$$M(0) = -\frac{\bar{P}_w L^2}{8}$$

$$M(L) = 0$$

となり、また、 $x=L/4$ でも曲げモーメントがゼロとなる
ことが分かる。また、曲げモーメントの最大値は、せん
断力がゼロとなる位置であることから、その位置は

$$Q(x) = \frac{\bar{P}_w L}{8} \left(-8 \frac{x}{L} + 5 \right) = 0; \quad x = \frac{5}{8} L$$

例題11-2の答え

として与えられる。せん断力がゼロの位置である $x = 5L/8$ の値を曲げモーメント式に代入すれば、曲げモーメントの最大値が以下のように得られる。

$$M_{\max} = M\left(\frac{5L}{8}\right) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8} \left(-4\left(\frac{5}{8}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{8}\right) - 1 \right) = \frac{9}{128} \bar{P}_w L^2$$

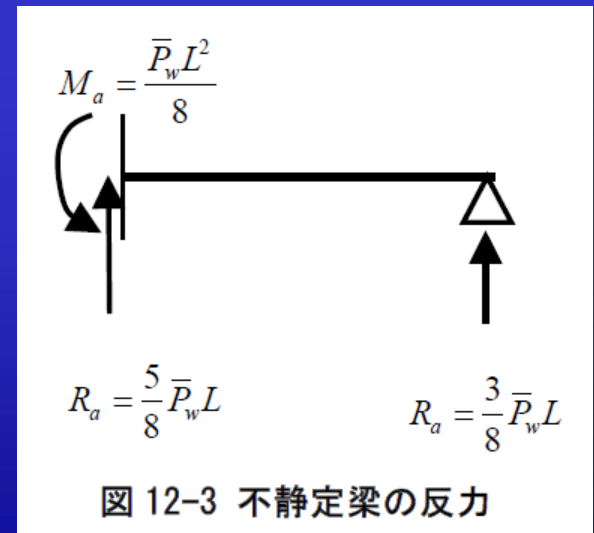
梁の両端でのせん断力は、せん断力式より、次のように得られる。

$$Q(0) = \frac{5}{8} \bar{P}_w L; \quad Q(L) = -\frac{3}{8} \bar{P}_w L$$

梁両端の反力は、断面力と反力との力の釣合より

$$R_a = Q(0) = \frac{5}{8} \bar{P}_w L; \quad R_b = -Q(L) = \frac{3}{8} \bar{P}_w L$$

$$M_a = -M(0) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8}; \quad M_b = 0$$



例題11-2の答え

次に、たわみを求めることにしよう。たわみの式に積分定数を代入し、整理すると以下の式が得られる。

$$w(x) = \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} \left(2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)$$

同様に、回転角を表す式に積分定数を代入すると、

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w L^3}{48EI_z} \left(8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{L}\right) \right)$$

として得られる。変位の最大値は、関数の最大・最小より、回転角がゼロの位置で与えられる。まず、回転角がゼロの位置を求めよう。上式を用いると

$$8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{L}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x/L = 0, x/L = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}$$

例題11-2の答え

ただし、 $x=0$ と $x>L$ の値は意味をなさないので、

$$x/L = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16} = 0.578$$

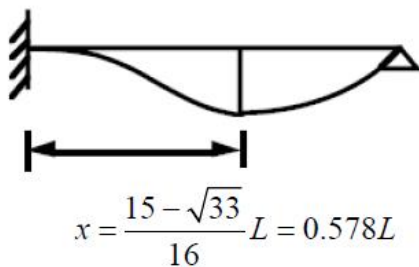
の値を用いることになる。この値をたわみ式に適用することによって変位の最大値が次のように得られる。

$$w_{\max} = w(0.578L) = 0.26 \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} = \frac{2.08\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$

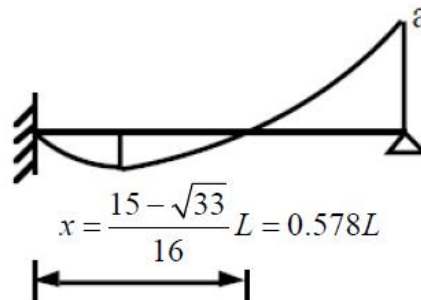
両端ピン支持

両端固定

$$\frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z} > \frac{2.08\bar{P}_w L^4}{384EI_z} > \frac{\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$



たわみ分布



回転角分布

図 12-4 等分布荷重を受ける一端固定で他端ピン支持梁のたわみと回転角分布

まとめ

- 1) 不静定梁のたわみと断面力
- 2) 両端固定梁の解析
- 3) 一端固定、一端ピン支持梁の解析