

部材の座屈



構造力学 I

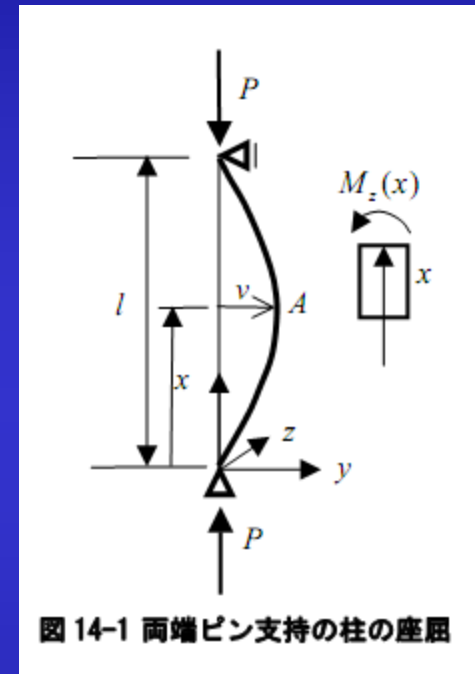
第13回講義内容

- 1) オイラー座屈
- 2) 座屈モードと座屈荷重
- 3) 座屈長さ
- 4) 演習
- 5) まとめ

圧縮場には座屈が生じる

構造物に無応力の状態から軸方向に圧縮荷重が加えられていくと、変形が進み、内部にひずみが蓄えられる。これによって材の曲げ剛性は徐々に低下し、ある荷重状態でそれ以後の増分荷重がないにも関わらず、変形が急激に拡大するという現象が生じる。

これを不安定現象、または、静的座屈と呼ぶ。この状態に達する前の荷重と変位の関係が線形であると、これを線形の座屈と呼ぶ。



H型鋼のフランジ部の
局部座屈、
横座屈
アーチの屈服座屈
接合部の座屈など

オイラー座屈

ここでは、図14-1に示す一端ピン・他端鉛直方向ローラー（水平拘束）支持で、材軸方向に集中荷重が作用している場合について考える。同図には座屈する瞬間の状態が示されており、モーメントの釣合は変形後の変位を用いて行う。

座標原点から x 離れた点Aにおけるモーメントの釣合は、

$$-M_z(x) + v(x)P = 0$$

さらに、上式を梁の微分方程式に代入すると

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z(x)$$

座屈荷重を求める方程式が得られる

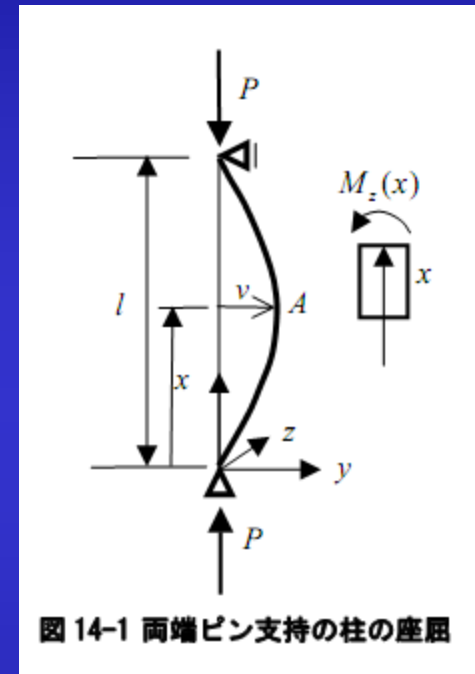


図 14-1 両端ピン支持の柱の座屈

オイラー座屈

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0 \quad EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z(x)$$

ここで、 $k^2 = P / EI_z$ とおくと上式は、以下の式となる。

$$v = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D \quad \frac{M(x)}{EI_z} = k^2 (A \cos kx + B \sin kx)$$

一端ピン・他端ローラー支持に対する境界条件として、 $x=0, l$ $v=0$, $M=0$ の4つを用い、この条件を上式に適用すると、 $A=C=D=0$ と $B \sin kx=0$ が得られる。従って、最後の条件式より、 $B=0$ 、あるいは $\sin kl=0$ を得ることになる。

前者の $B=0$ は部材が真直ぐとなる解であり、また $B \neq 0$ の場合は、部材が曲がりながら釣合っている状態を現す。この状態を座屈 (buckling) と呼び、次式が成立する。

$$\frac{M(0)}{EI_z} = k^2 (A) = 0; \quad v(0) = A + D = 0 \rightarrow D = 0$$
$$v(l) = B \sin kl + Cl = 0 \rightarrow C = 0$$

オイラー座屈

$$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

上式において、 $n = 0$ は $B = 0$ と同じであり、従って、座屈条件を満足する値として $n = 1, 2, 3 \dots$ が考えられる。上式を $k^2 = P / EI_z$ に代入すると、次のように座屈荷重が得られる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI_z; \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

変位場に $k = n\pi / l$ ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$) を代入すると、座屈時の変形状態が次式で与えられ、これらは一般に座屈モードと呼ばれる。

$$v = B \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

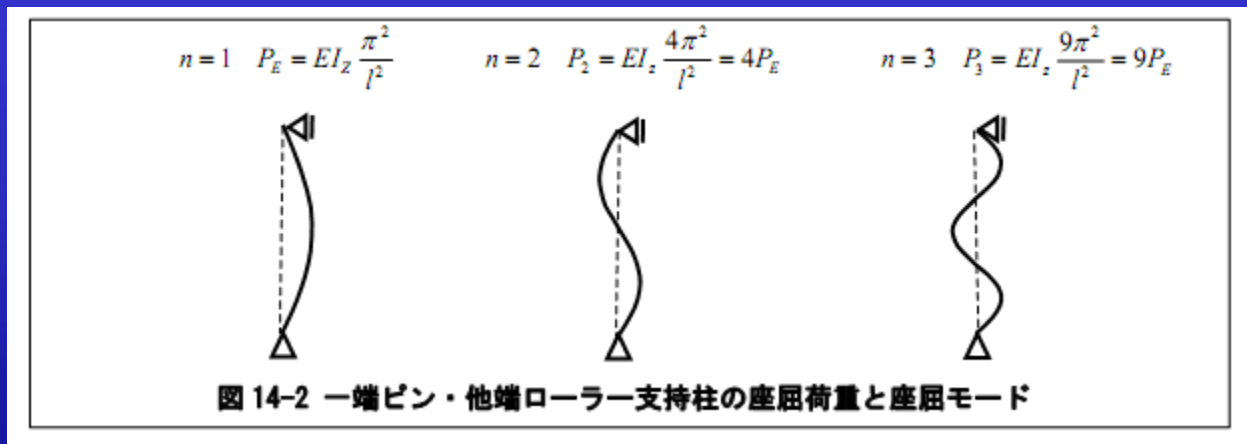
座屈荷重と座屈モード

座屈荷重：

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI_z; \quad (n=1, 2, 3\cdots)$$

座屈モード：

$$v = B \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad (n=1, 2, 3\cdots)$$



オイラー座屈

上式で示される座屈荷重の内、実際に生じる座屈荷重は、最も小さい値で $n=1$ 与えられ、Euler (オイラー) 座屈荷重と呼ばれる。座屈する瞬間の圧縮応力 σ_E はEuler座屈荷重を断面積で割ること求められる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{EI_z \pi^2}{Al^2}$$

上式に、次式で定義する断面二次半径 i を用いると

$$i^2 = \frac{I_z}{A}$$

弾性座屈応力 σ_E は次式となる。

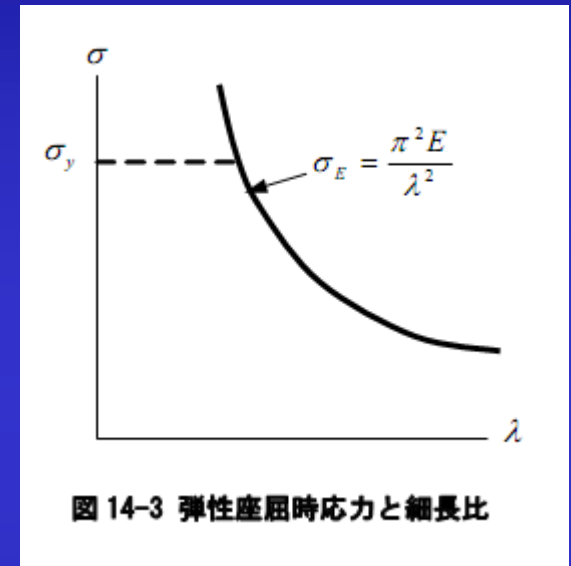


図 14-3 弾性座屈時応力と細長比

弾性座屈応力

弾性座屈応力 σ_E は次式となる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2 \left(\frac{A}{I_z} \right)} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i} \right)^2}$$

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{EI_z \pi^2}{Al^2}$$

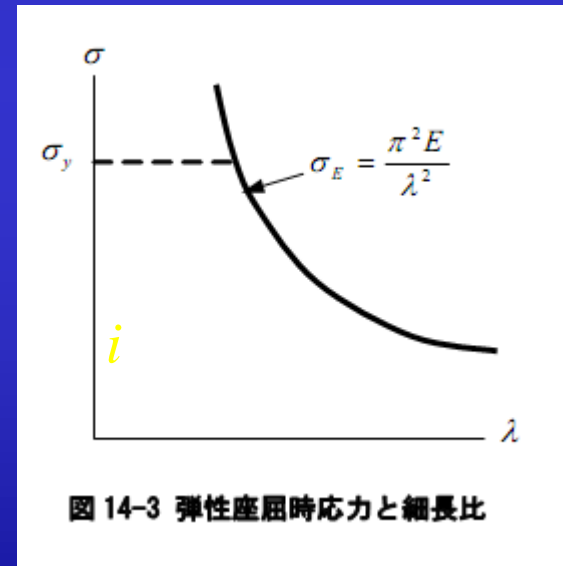
$$i^2 = \frac{I_z}{A}$$

さらに、材長と断面二次半径の比を、
下式で示す新たなパラメータ細長比 λ
を導入すると、

$$\lambda = \frac{l}{i}$$

弾性座屈応力は細長比を関数として
以下のように与えられる。

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



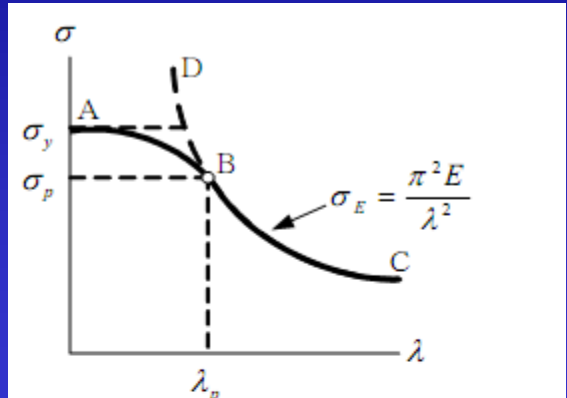
弾塑性座屈

オイラー座屈式はヤング係数が比例限度内であるとき成立するが、比例限度を超えると成り立たない。さらに、弾性座屈応力与えられる応力が材の降伏応力を超えると、部材は塑性座屈することになる。

比例限界応力とオイラー荷重との交点Bを通る細長比は限界細長比 λ_p と言い、弾性座屈を生じる限界を示す最小の細長比となる。つまり、材の細長比が $\lambda > \lambda_p$ であれば弾性座屈を起こすが、 $\lambda \leq \lambda_p$ であれば非弾性座屈を起こすことになる。限界細長比は、比例限界応力 σ_p を弾性座屈応力式に代入し、少し整理すると次式で表される。

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



塑性座屈（短柱） 弾性座屈（長柱）

図 14-4 中心圧縮を受ける材の座屈応力

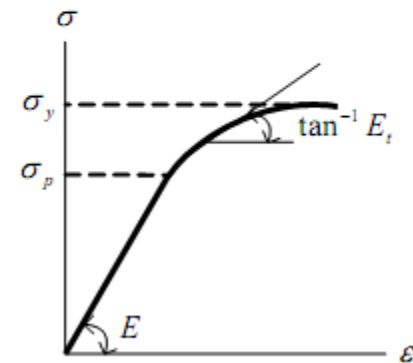


図 14-5 材の応力—ひずみ関係

非弾性座屈座屈

非弾性座屈に関する理論は、19世紀末に相次いで発表されている。例えば、Engesserによる接線係数理論、Engesser-Karmanによる換算係数理論である。前者の座屈時応力は、ヤング係数が接線係数に、また、後者の座屈時応力は同じく柱の曲げ引張側に生ずる応力の除荷を考慮した換算係数である。

圧縮材の実挙動と両理論との関係を明確に示したのがShanleyである。両理論の座屈応力を上限・下限とし、実験値はその間に存在することを示した。図14-6には、接線係数理論と換算係数理論による座屈時応力が示されており、2つの座屈時応力とEuler応力との関係は、次式で与えられる。

$$\sigma_{Euler} > \sigma_r > \sigma_t$$

図 14-4 中心圧縮を受ける材の座屈応力

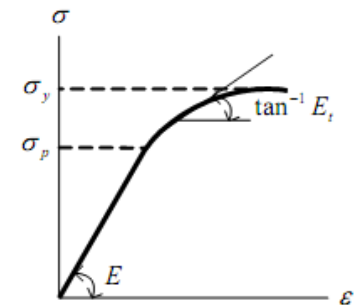


図 14-5 材の応力—ひずみ関係

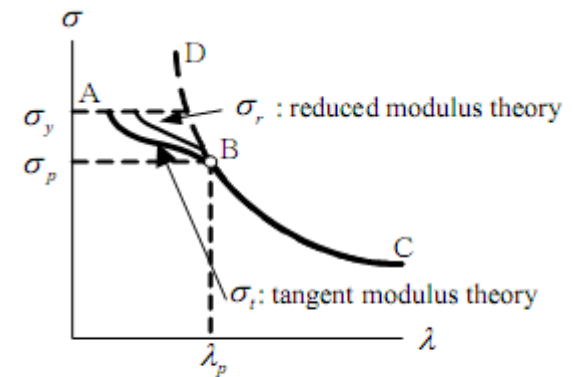


図 14-6 接線係数理論と換算係数理論による座屈時応力

境界が異なる柱の座屈

座屈に関する支配方程式と一般解を示す。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0$$

$$v = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D$$

上の一般解から梁の微分方程式を用いて、曲げモーメントとせん断力を求める。

$$\frac{M}{EI_z} = -\frac{d^2 v}{dx^2} = Ak^2 \cos kx + Bk^2 \sin kx$$

$$\frac{Q}{EI_z} = -\frac{d^3 v}{dx^3} = -Ak^3 \sin kx + Bk^3 \cos kx$$

後は、境界条件より、一般解の未定係数を求めることになる。

両端固定梁の座屈

両端固定の境界条件は、 $x=0$ と $x=l$ で $v=0, dv/dx=0$ として与えられる。まず、 $x=0$ では、

$$v(0) = A + D = 0; \quad D = -A$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = Bk + C; \quad C = -Bk$$

$$v = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D$$

$$\frac{dv}{dx} = -Ak \sin kx + Bk \cos kx + C$$

となり、同じく、 $x=l$ で $v=0, dv/dx=0$ を適用すると、次式が得られる。

$$v(l) = A \cos kl + B \sin kl + Cl + D = 0$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = -Ak \sin kl + Bk \cos kl + C = 0$$

得られた式を整理すると次の釣合式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \cos kl - 1 & \sin kl - kl \\ -\sin kl & \cos kl - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

両端固定梁の座屈

上式の解は、 $A = B = 0$ もしくは、係数行列の行列式の値がゼロでなければならない。前者は、部材が横たわみしない解を表し、座屈状態に関連しない。従って、座屈条件として後者を用いることになる。係数行列の行列式の値がゼロであることから、次式が与えられる。

$$(\cos kl - 1)^2 + \sin kl(\sin kl - kl) = 0$$

ここで、 $\sin kl - kl = 0$ では $kl = 0$ 以外に解はなく、 $k = 0 \rightarrow P = 0$ となって意味がなくなる。従って、上式を満たすためには、 $\cos kl = 1$ $\sin kl = 0$ とを同時に満たすが必要となる。両式を同時に満足する値は、 $k = 2n\pi / l$ で与えられ、この値をに代入することで、座屈荷重は次式のように与えられる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 EI_z; \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

最低の座屈荷重は、上式に $n = 1$ を代入することで、

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} EI_z$$

両端固定梁の座屈

座屈モードは、変位場より

$$v = A(\cos kx - 1) + B(\sin kx - kx)$$

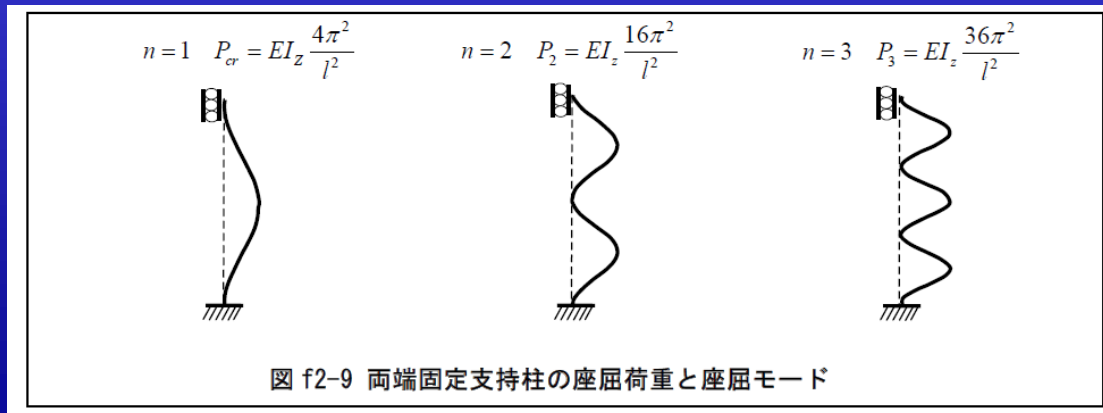
さらに、AとBの関係より

$$B = -A \frac{\cos kl - 1}{\sin kl - kl}$$

$$\begin{bmatrix} \cos kl - 1 & \sin kl - kl \\ -\sin kl & \cos kl - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

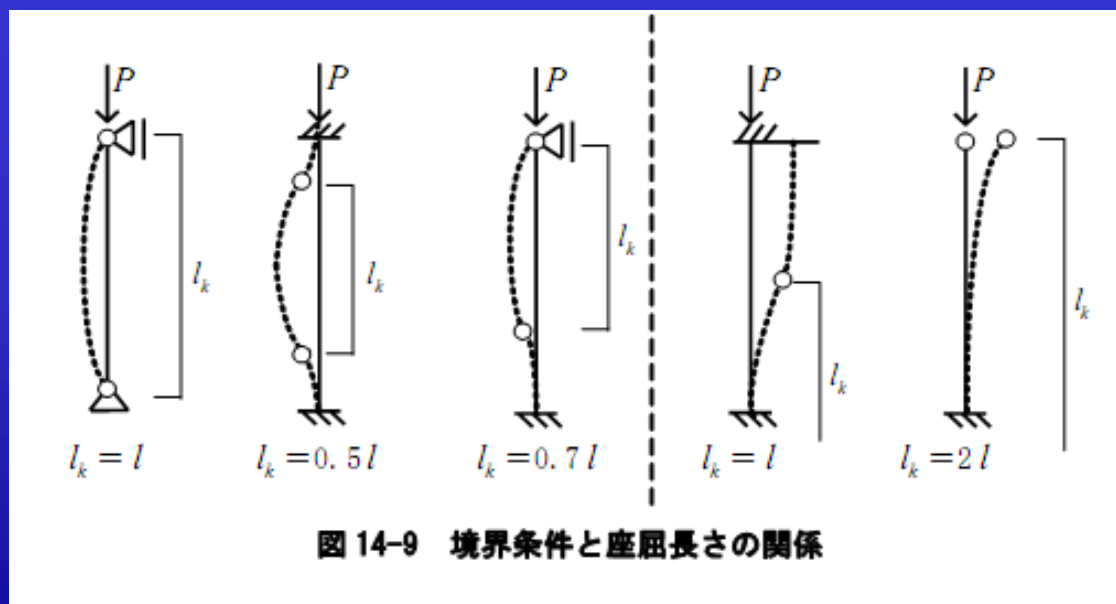
上式の分子は座屈条件式のひとつであり、ゼロとなる。従って、Bはゼロとなり、座屈モードは $k = 2n\pi / l$ より次式となる。

$$v = A\left(\cos \frac{2n\pi}{l} x - 1\right); \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$



その他の座屈荷重と座屈モード

座屈応力は、両端ピン支持、一様断面、一様圧縮、単一断面について規定されている。しかしながら、使用される部材には、トラス材やラーメンの柱材など様々な断面形状や境界条件が存在する。このような部材にも、前述の規定を適用するためには何らかの換算が必要となり、仮想の部材長さで評価することになる。この部材長さを**座屈長さ** l_k とする。例えば、両端の支持条件によって異なる座屈長さが図14-9に示されている。



座屈長さ

境界条件の異なる部材の座屈荷重は、この座屈長さとオイラー座屈荷重を用いると次式となる。また、細長比も次式となる。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{l_k^2} \qquad \lambda = \frac{l_k}{i}$$

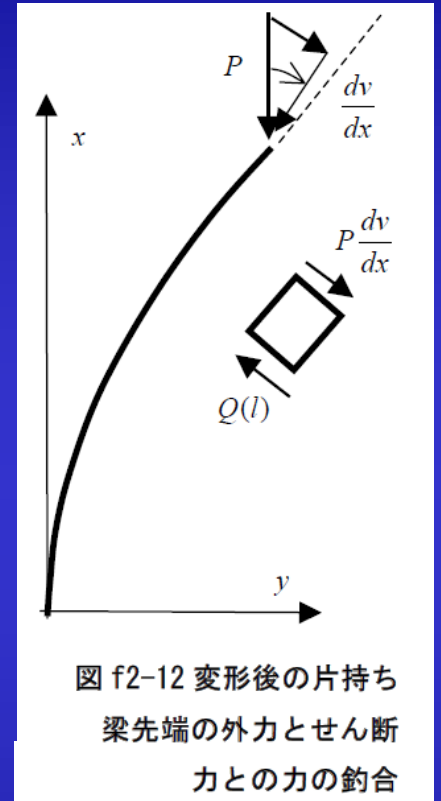
例えば、先に求めた両端固定柱の座屈荷重を求めてみよう。座屈長さは、 $l_k = 0.5l$ であることより、上の座屈荷重に代入すると、

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{(0.5l)^2} = \frac{4EI_z}{l^2}$$

となり、解析的に求めた座屈荷重と一致する。

例題13-1

片持ち形式の柱の座屈荷重を求めよ。



例題13-1の答え

一端固定・他端自由の境界条件は、 $x=0$ で $v=0$ 、
 $dv/dx=0$ 及び、 $x=l$ で $Q(l)=Pdv/dx, M(l)=0$ で与えられる。材先端におけるせん断力と外力との釣合は、右図で示すように変形後の変位を用いて行う。まず、固定端では、

$$v(0) = A + D = 0; \quad D = -A$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = Bk + C; \quad C = -Bk$$

$$v = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D$$

$$\frac{dv}{dx} = -Ak \sin kx + Bk \cos kx + C$$

同じく、 $x=l$ で $M(l)=0$ と $Q(l)=Pdv/dx$ を適用すると、

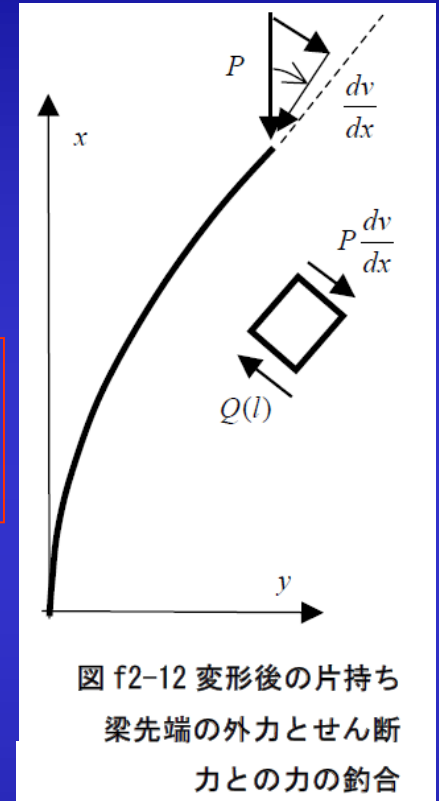
$$\frac{M(l)}{EI_z} = -\left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=l} = Ak^2 \cos kl + Bk^2 \sin kl = 0$$

$$Q(l) = EI_z (-Ak^3 \sin kl + Bk^3 \cos kl) = P(-Ak \sin kl + Bk \cos kl + C)$$

$$EI_z k^2 (-Ak \sin kl + Bk \cos kl) = P(-Ak \sin kl + Bk \cos kl + C)$$

$$\frac{M}{EI_z} = -\frac{d^2v}{dx^2} = Ak^2 \cos kx + Bk^2 \sin kx$$

$$\frac{Q}{EI_z} = -\frac{d^3v}{dx^3} = -Ak^3 \sin kx + Bk^3 \cos kx$$



例題13-1の答え

$$Ak^2 \cos kl + Bk^2 \sin kl = 0$$

$$EI_z k^2 (-Ak \sin kl + Bk \cos kl) = P(-Ak \sin kl + Bk \cos kl + C)$$

$$EI_z k^2 (-Ak \sin kl + Bk \cos kl) = EI_z k^2 (-Ak \sin kl + Bk \cos kl + C)$$

ここで、 $k^2 = P / EI_z$ を考慮すると、 $C = 0$ が得られる。さらに $C = 0$ であれば $B = 0$ であることが分る。これらを考慮する座屈条件として次式が得られる。

$$A \cos kl = 0$$

$$\begin{aligned} v(0) = A + D = 0; \quad D = -A \\ \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = Bk + C; \quad C = -Bk \end{aligned}$$

上式を満たす解は、 $kl = (n - 1/2)\pi$ であり、 $k^2 = P / EI_z$ であることを考慮すると、座屈荷重は次式となる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \left(\frac{(n - 1/2)\pi}{l} \right)^2 EI_z; \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

最低の座屈荷重は、上式に $n = 1$ を代入すると、次式で与えられる。

$$P_{cr} = EI_z k^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} EI_z$$

例題13-1の答え

座屈モードは、

$$v = A(\cos kx - 1) + B(\sin kx - kx)$$

さらに、 $B = 0$ と $k = (n - 1/2)\pi / l$ より、

$$v = A\left(\cos \frac{(n - 1/2)\pi}{l} x - 1\right); \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

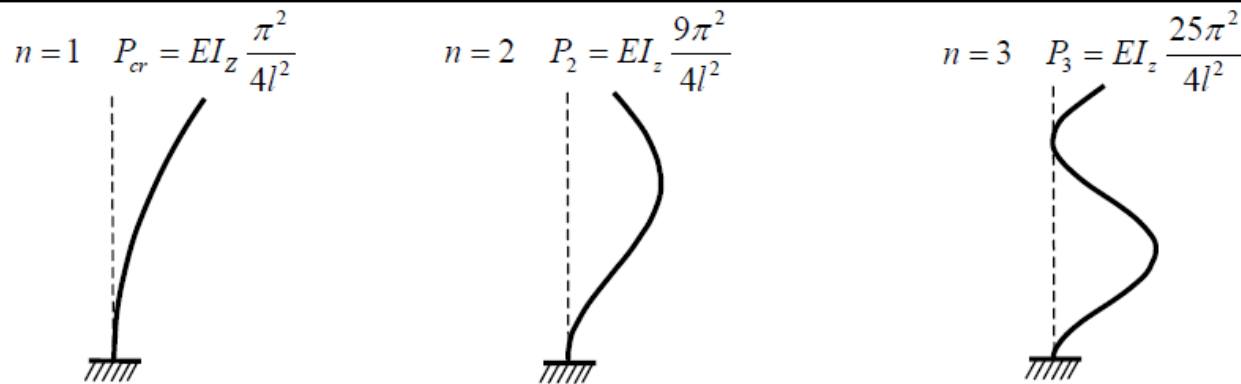


図 f2-13 一端固定・他端自由柱の座屈荷重と座屈モード

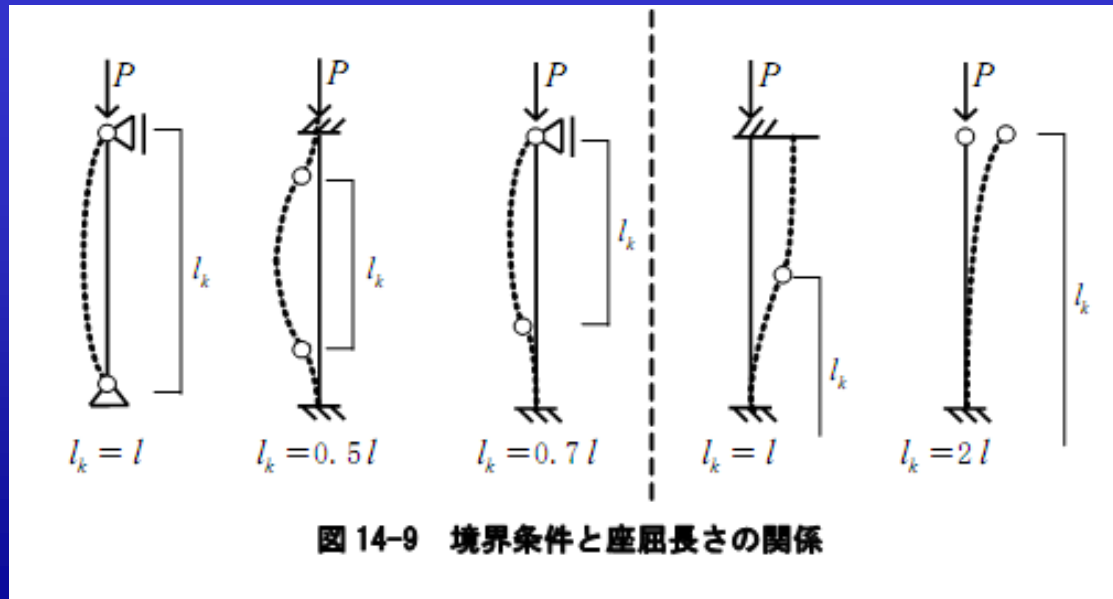
例題13-1の答え

座屈長さを使用して座屈荷重を求めてみよう。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{l_k^2}$$

座屈長さは、 $l_k = 2l$ であることより、上の座屈荷重に代入すると、

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}$$



まとめ

- 1) オイラー座屈
- 2) 座屈モードと座屈荷重
- 3) 両端固定柱の座屈解析
- 4) 座屈長さ
- 5) 演習