

モールの定理による 静的梁のたわみ



第10回講義内容

- 1) モールの定理
- 2) 単純梁のたわみ
- 3) 片持ち梁のたわみ
- 4) 演習
- 5) まとめ

モールの定理

梁の変形を支配する微分方程式は前回次のように得られた。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -P_w(x)$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

上式を比較すると分かるように、下式に係数 EI_z が付いていること以外は全て同じ形式の微分方程式となっている。そこで、下式を以下のように変形すると、

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z}$$

上の式と全く同じ形式となる。

モールの定理

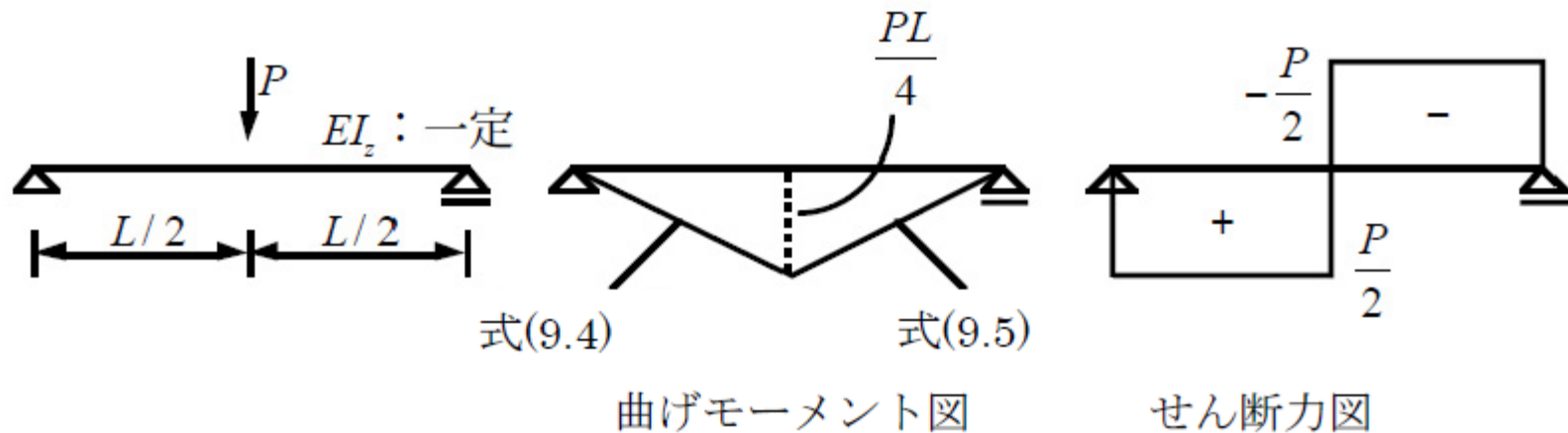
一方、静定構造物は力の釣合から解くことができ、曲げモーメントの関数が求められる。その関数を EI_z で割って値を荷重項とし、力の釣合を用いることで、梁の微分方程式の解であるたわみ関数が求められることになる。

モールの定理

梁の曲げモーメントを EI_z で除し、その値を荷重と考えると、ある点のたわみはその点の曲げモーメントの値に、また、ある点のたわみ角はその点のせん断力に等しい。ただし、片持ち梁の場合は固定端と自由端とを入れかえる必要がある。

単純梁のたわみ

静定構造物で、最も基本的な静的梁の変形と中央のたわみを求めてみよう。解析モデルは下図に示す単純梁で、中央に集中荷重が加わっている。梁の曲げモーメント分布は、下のようになっている。



単純梁のたわみ

曲げモーメントの分布は、

$$M(x) = \frac{P}{2}x \quad \left(0 \leq x < \frac{L}{2}\right)$$

$$M(x) = \frac{P}{2}(L - x) \quad \left(\frac{L}{2} \leq x < L\right)$$

求めた曲げモーメントを EI_z で割った値を荷重とする。そのため、荷重方向は右図のように曲げモーメントと反対側に描くことになる。まず、力の釣合より反力を求める。

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI_z} \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI_z}$$

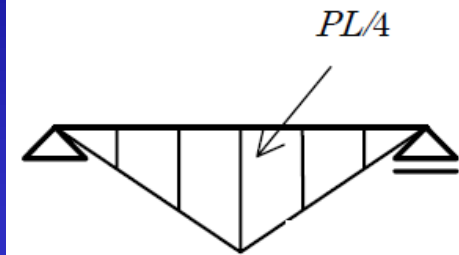


図 10-3 曲げモーメント

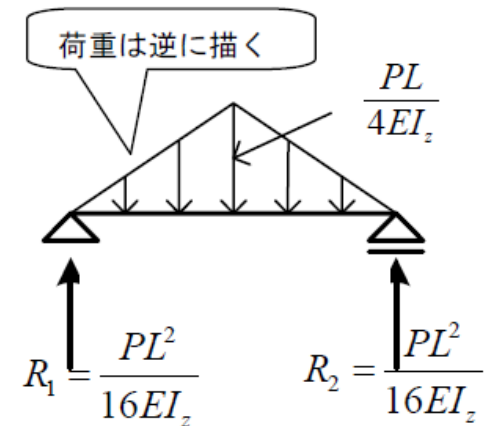


図 10-4 曲げモーメントを荷重
におき直し、反力を求める

単純梁のたわみ

モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の載荷点における鉛直変位である。右図10-5において、 W は分布荷重の合力、 M_c が梁中央での曲げモーメントである。分布荷重の合力 W は

$$W = \frac{PL}{4EI_z} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI_z}$$

であり、その荷重中心点は、三角形荷重であることより、左端より部材長さの $1/3$ の点である。中央点でのモーメントの釣合より、 M_c は次のように求められる。

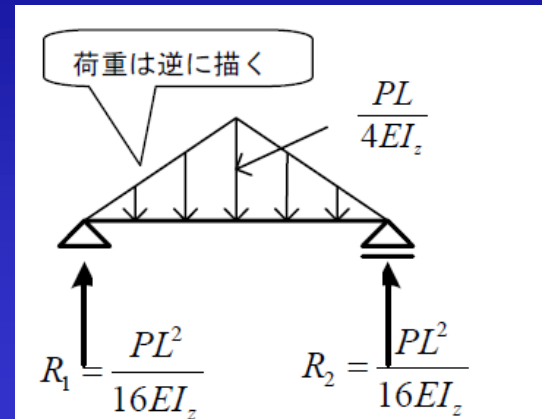


図 10-4 曲げモーメントを荷重におき直し、反力を求める

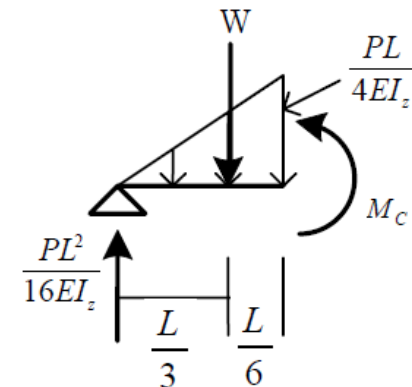


図 10-5 力の釣合

単純梁のたわみ

$$M_c = \frac{PL^2}{16EI_z} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{6} \right) = \frac{PL^3}{48EI_z}$$

従って、梁中央の変位は次式で与えられることになる。

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI_z}$$

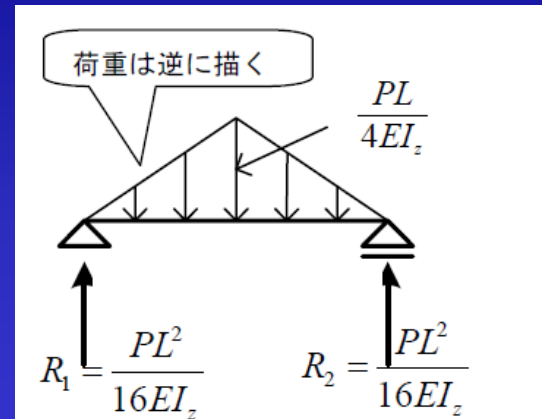


図 10-4 曲げモーメントを荷重
におき直し、反力を求める

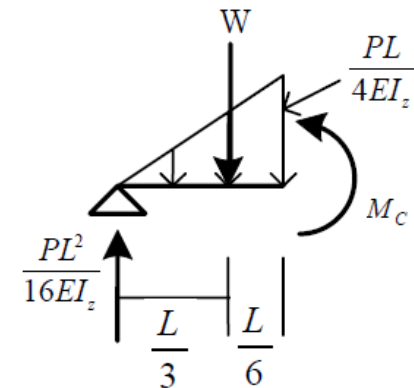
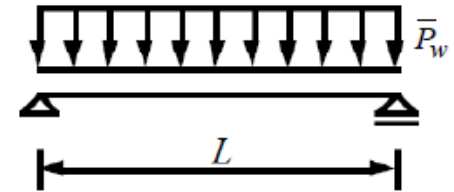


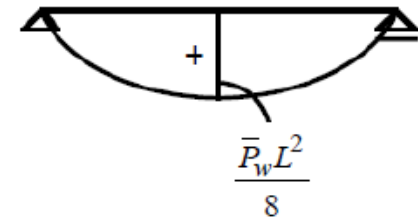
図 10-5 力の釣合

例題10-1

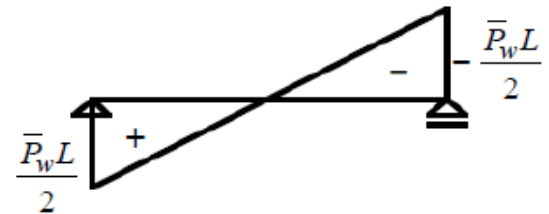
右図 に示す単純梁に等分布荷重を受ける際、梁に生じる最大たわみをモールの定理を利用して求めよ。



(a) 解析モデル



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

例題10-1の答え

曲げモーメント関数は、

$$M(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} x(L-x)$$

上の曲げモーメントを EI_z で割った値を荷重とする。そのため、荷重の方向は右図のように曲げモーメントと反対側に描く。まず、力の釣合より次のように反力を求める。図に示す全荷重を以下のように積分して求める。

$$\begin{aligned} W &= \int_0^L \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} (Lx - x^2) dx = \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\ &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \frac{L^3}{6} = \frac{\bar{P}_w L^3}{12EI_z} \end{aligned}$$

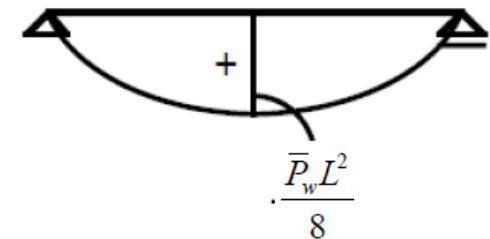


図 10-8 曲げモーメント

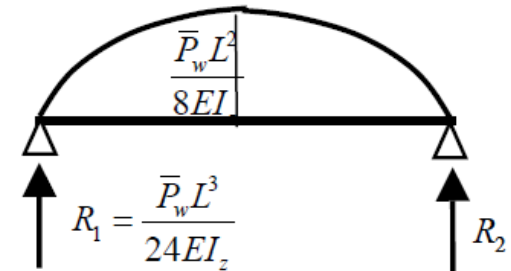


図 10-9 曲げモーメントを荷重におき直し、反力を求める

例題10-1の答え

従って、反力は

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{P}_w L^3}{12EI_z} = \frac{\bar{P}_w L^3}{24EI_z}$$

モールの定理によれば、上記の荷重に対して、梁中央の曲げモーメントがこの単純梁の載荷点における鉛直変位である。右図において、 M_c が梁中央での曲げモーメントである。 $x = L/2$ における分布荷重によるモーメントは、まず、微小部分の荷重について求める。この微小部分のモーメントは、右図を参考にすると、

$$dM = \left(\frac{L}{2} - X\right) \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} (LX - X^2) dX$$

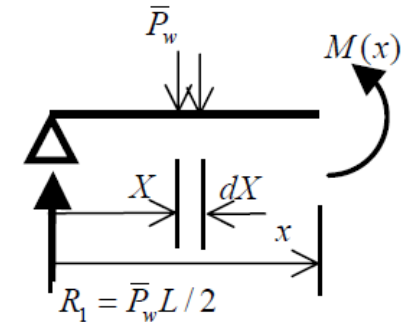


図 10-7 切断面における微小荷重によるモーメント

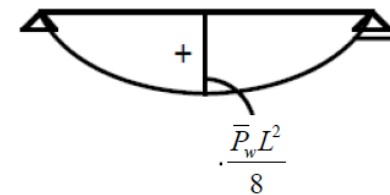


図 10-8 曲げモーメント

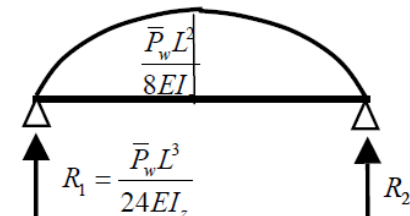


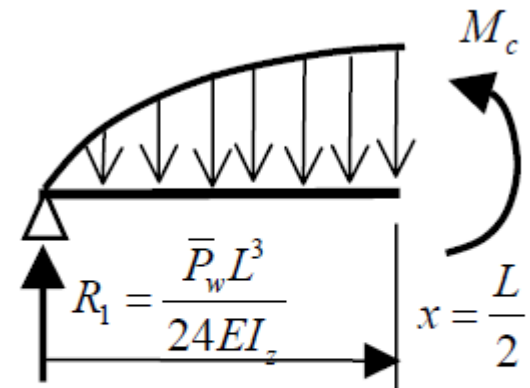
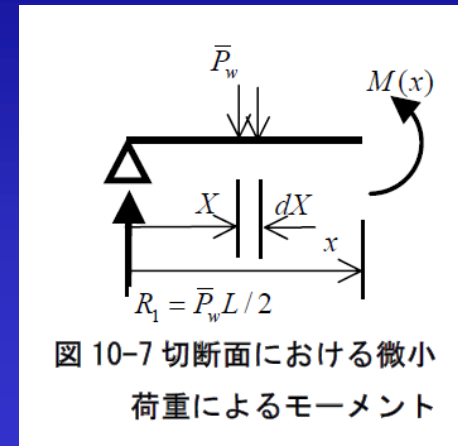
図 10-9 曲げモーメントを荷重におき直し、反力を求める

例題10-1の答え

分布荷重全体によるモーメントは、0 から $L/2$ まで積分することによって求められる。ただし、切断面は部材中央 $x = L/2$ としている。中央点でのモーメントの釣合より、 M_c は、微小部分のモーメントを下式のように積分することで次のように求められる。

$$-M_c + R_1 \frac{L}{2} - \frac{\bar{P}_w}{4EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} (L - 2X)(LX - X^2) dX$$

$$M_c = \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\bar{P}_w}{4EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} (L^2 X - 3LX^2 + 2X^3) dX$$

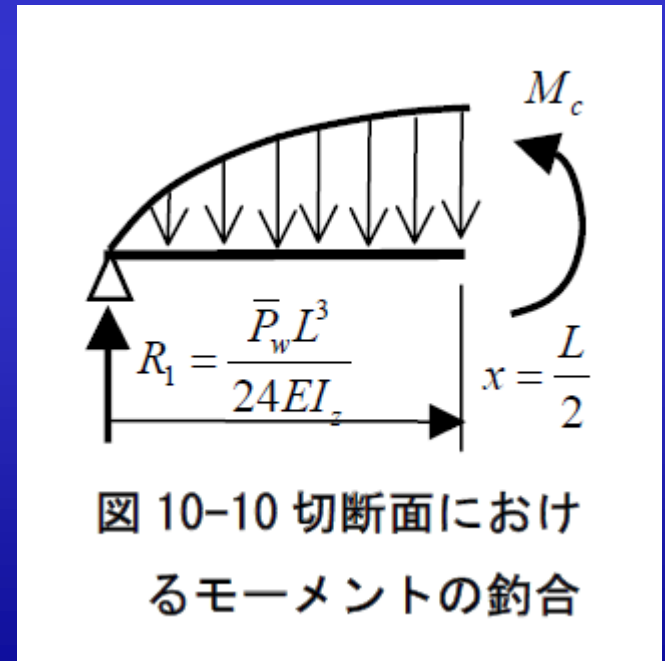
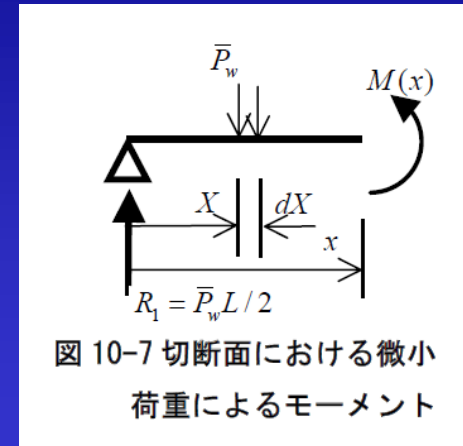


例題10-1の答え

$$M_c = \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\bar{P}_w}{4EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} (L^2 X - 3LX^2 + 2X^3) dX$$

従って、梁中央の変位は上式を積分することで、以下のように与えられることになる。

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\bar{P}_w}{4EI_z} \left[\frac{L^2 X^2}{2} - LX^3 + \frac{X^4}{2} \right]_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\bar{P}_w L^4}{4EI_z} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{\bar{P}_w L^4}{48EI_z} - \frac{\bar{P}_w L^4}{128EI_z} = \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z} \end{aligned}$$



片持ち梁のたわみ

片持ち梁の最大変位をモールの定理を用いて求める。

曲げモーメントの関数は、

$$M(x) = Px - PL$$

単純梁と同様、求めた曲げモーメントを EI_z で割り、その値を荷重とし、右図のように荷重の方向を逆にする。さらに、図のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

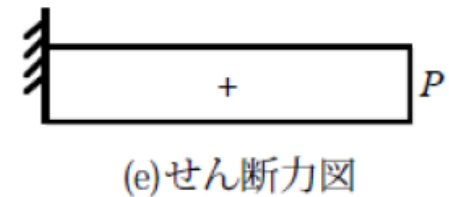
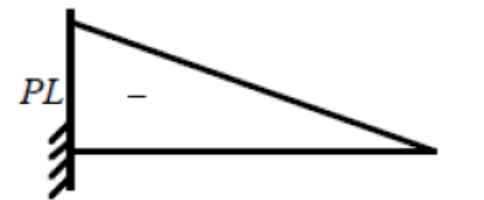
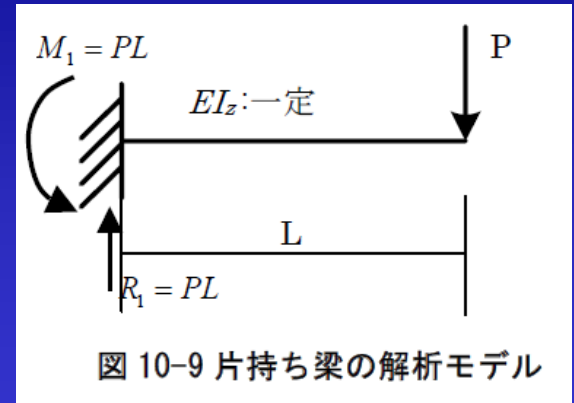


図 9-6 先端集中荷重を受ける片持ち梁モデルと断面力分布

片持ち梁のたわみ

この荷重に対する固定端での曲げモーメントを求める。この曲げモーメントが片持ち梁の最大変位となる。

分布荷重の合力 W は次のようになる。

$$W = \frac{PL}{EI_z} \times L \times \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{2EI_z}$$

固定端でのモーメントの釣合より M は次のようになり、モールの定理より、その値が変位となる。

$$M = \frac{PL^2}{2EI_z} \times \frac{2}{3}L = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad w_{\max} = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

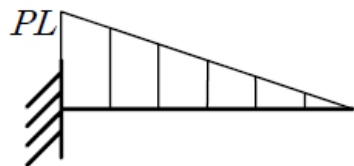


図 10-11 片持ち梁の
曲げモーメント図

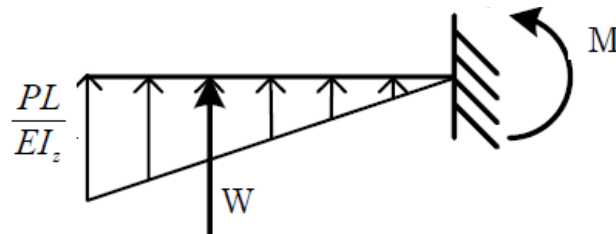


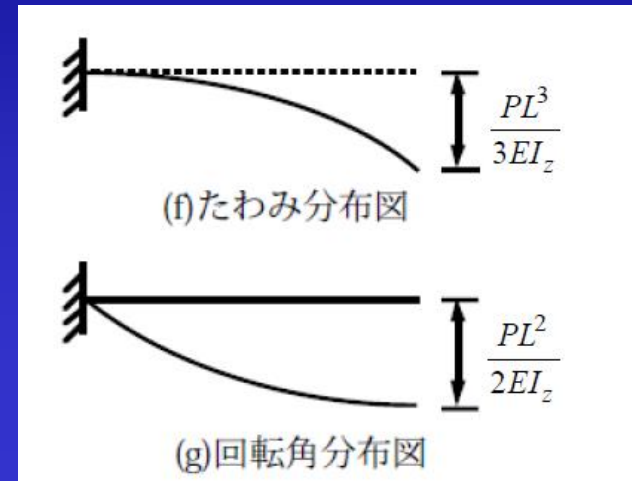
図 10-12 曲げモーメントを荷重におき直す

片持ち梁のたわみ

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

固定端の反力は、モールの定理によれば、回転角に等しい。また、反力は荷重の合力に等しいことから、片持ち梁の先端の回転角は、

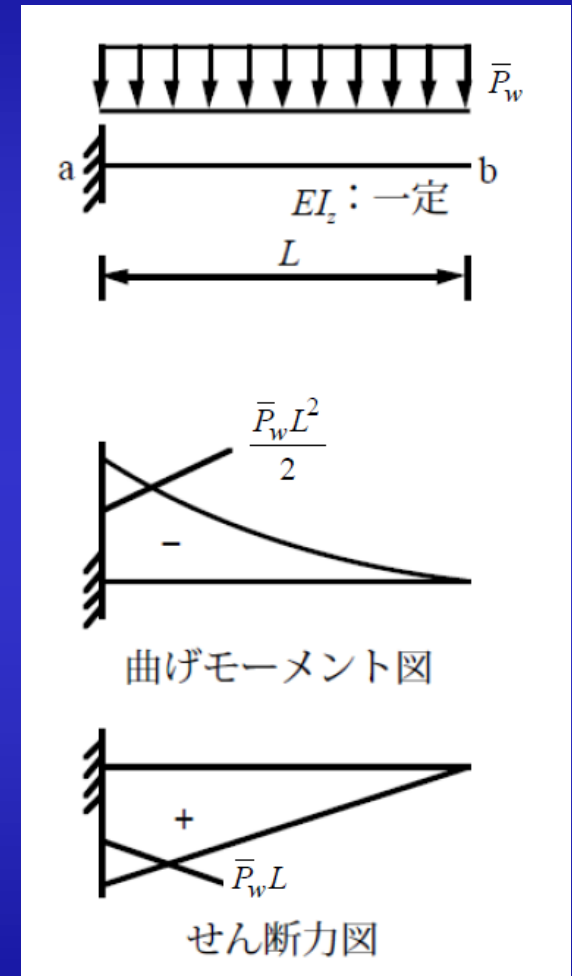
$$\theta(L) = \frac{PL^2}{2EI_z}$$



モールの定理は微分方程式を解く必要がなく、簡単に任意点の変位を求めることができるので覚えておくとう便利である。

例題10-2

右図に示す等分布荷重を片持ち梁の最大変位をモールの定理を用いて求めよ。



例題10-2の答え

曲げモーメント関数は、

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 - 2Lx + x^2)$$

単純梁と同様、求めた曲げモーメントを EI_z で割り、その値を荷重とする。ただし、図10-16 のように境界条件である固定端と自由端を入れ替える。

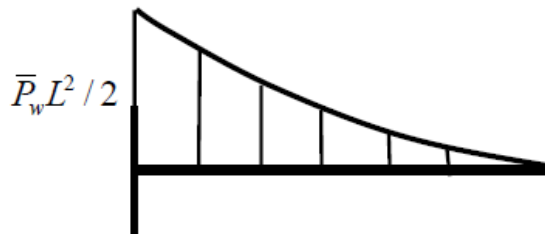


図 10-17 片持ち梁の
曲げモーメント図

境界を
入れかえる

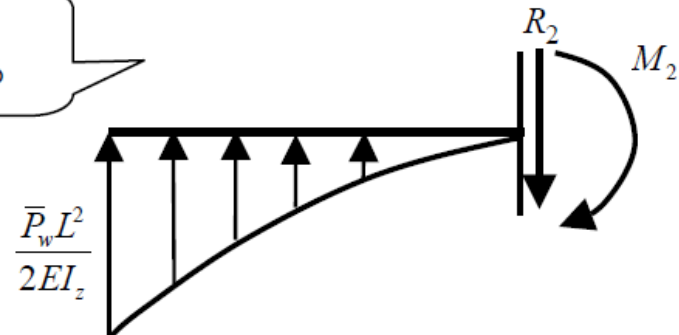


図 10-18 曲げモーメントを荷重におき直す

例題10-2の答え

図10-16 の荷重に対する固定端での曲げモーメント反力 M_2 を求める。この曲げモーメントが変位となる。この曲げモーメントは、外力と反力との力の釣合より、次式で与えられる。

$$M_2 - \int_0^L (L - X) \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} (L^2 - 2LX + X^2) dX = 0$$

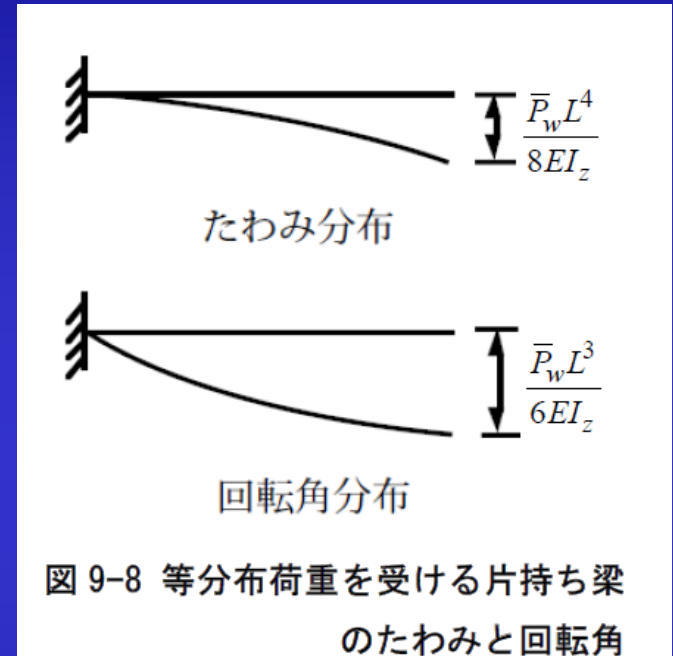
上の積分を実行すると、梁先端のたわみは次式となる。

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \int_0^L (L - X)(L^2 - 2LX + X^2) dX \\ &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \int_0^L (L^3 - 3L^2X + 3LX^2 - X^3) dX \\ &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \left[L^3X - 3L^2 \frac{X^2}{2} + LX^3 - \frac{X^4}{4} \right]_0^L \\ &= \frac{\bar{P}_w L^4}{8EI_z} (4 - 6 + 4 - 1) = \frac{\bar{P}_w L^4}{8EI_z} \end{aligned}$$

例題10-2の答え

片持ち梁先端の回転角は、反力 R に等しく、また、合力に等しい。

$$\begin{aligned}\theta(L) &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \int_0^L (L^2 - 2LX + X^2) dX \\ &= \frac{\bar{P}_w}{2EI_z} \left[L^2 X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right]_0^L \\ &= \frac{\bar{P}_w L^3}{6EI_z}\end{aligned}$$



まとめ

モールの定理の説明

静定構造物の代表である単純梁と片持ち梁のたわみをモールの定理を用いて求めた

- 1) 単純梁のたわみ
- 2) 片持ち梁のたわみ