

断面特性の算定



構造力学 I

第4回講義内容

- 1) 各種断面の特性を具体的に計算して求める
- 2) 演習
- 3) まとめ

断面一次モーメントと図芯位置の復習

右図の三角形断面の図芯位置を求める。
図中の O を原点とする座標系の断面積と Z 軸に関する断面一次モーメント S_Z を求めることにする。まず、微小断面 dA を

$$dA = b(Y)dY$$

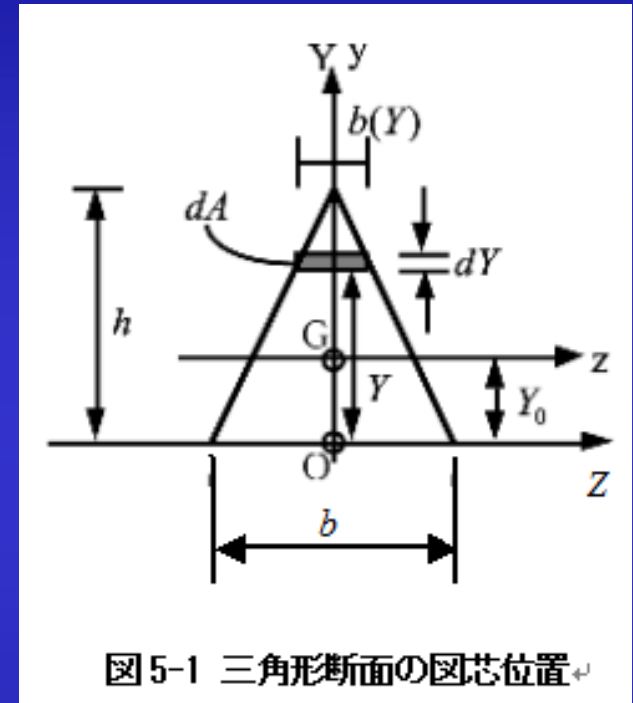
関数 $b(Y)$ は、 Z 軸に関する断面の幅を表し、その値は、

$$b(Y) = b\left(1 - \frac{Y}{h}\right)$$

となることから、断面積及び断面一次モーメントは、次式となる。

$$A = \int_0^h b\left(1 - \frac{Y}{h}\right) dY$$

$$S_Z = \int_0^h b\left(1 - \frac{Y}{h}\right) Y dY$$



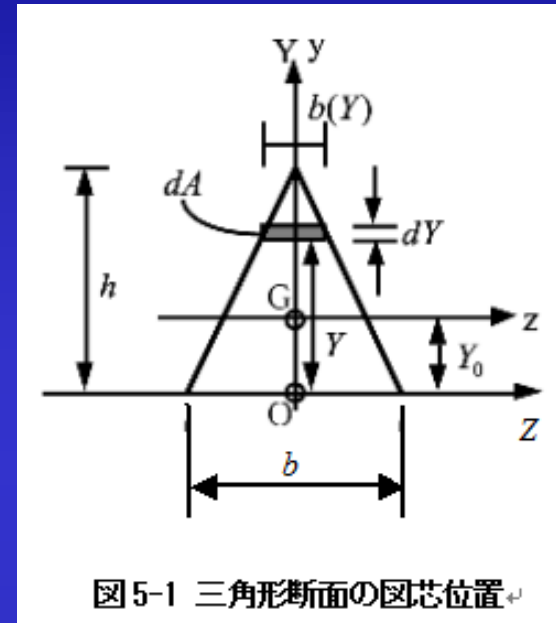
断面一次モーメントと図芯位置の復習

$$A = \int_0^h b\left(1 - \frac{Y}{h}\right) dY = b \left[Y - \frac{Y^2}{2h} \right]_0^h = \frac{bh}{2}$$

$$S_Z = \int_0^h b\left(1 - \frac{Y}{h}\right) Y dY = b \left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3h} \right]_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

従って、図芯までの距離 Y_0 は次式となる。

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$



T型断面の図心位置の算定

次に示すT形断面の図心位置を求めよ。
T型梁の梁幅と梁せいの各々の比率を次式で表す。

$$n = \frac{B_2}{B_1}; \quad n_1 = \frac{D_1}{D}; \quad n_2 = \frac{D_2}{D}$$

上の比率を使うと、T型梁の断面積は、

$$A = B_2 D_2 + B_1 D_1 = (nn_2 + n_1) B_1 D$$

Z軸に関する断面一次モーメントは、**断面積とその断面の中心までの距離の積**であることから、T型断面を2つに区分し、次のように求める。

$$\begin{aligned} S_Z &= B_2 D_2 (D_1 + 0.5 D_2) + B_1 D_1 \cdot 0.5 D_1 \\ &= 0.5 B_1 D^2 \left(\frac{B_2}{B_1} \frac{D_2}{D} \left(2 \frac{D_1}{D} + \frac{D_2}{D} \right) + \frac{D_1 D_1}{D^2} \right) \\ &= 0.5 B_1 D^2 (nn_2 (2n_1 + n_2) + n_1^2) \end{aligned}$$

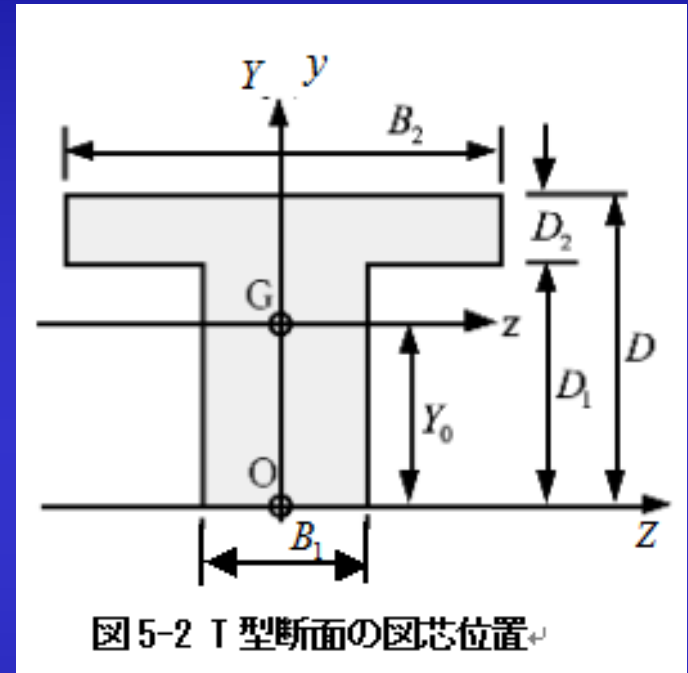


図5-2 T型断面の図心位置

T型断面の図芯位置の算定

上の比率を使うと、T型梁の断面積は、

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{S_z}{A} = \frac{0.5B_1D^2(nn_2(2n_1+n_2)+n_1^2)}{(nn_2+n_1)B_1D} \\ &= 0.5D \frac{(nn_2(2n_1+n_2)+n_1^2)}{(nn_2+n_1)} \end{aligned}$$

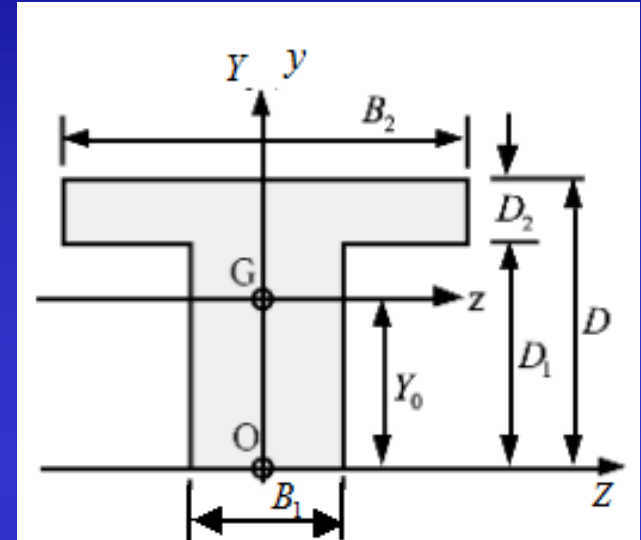
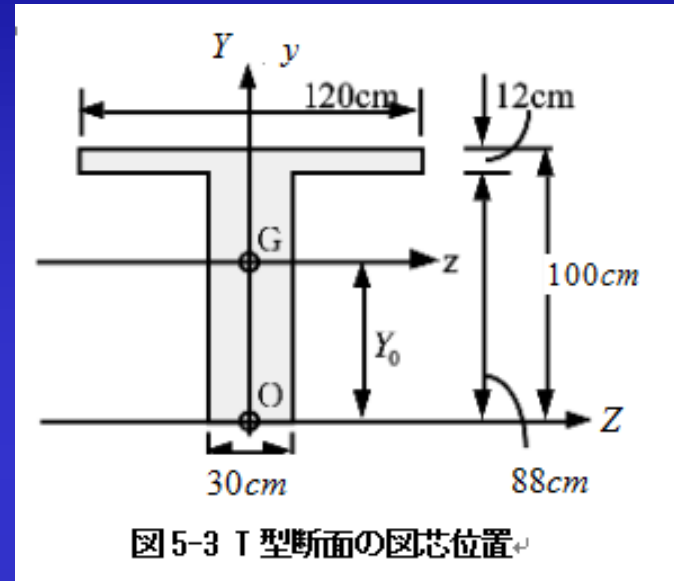


図5-2 T型断面の図芯位置

例題4-1

次に示すT 型断面の図芯位置を求めよ。

前の例題にしたがって各係数を求める



例題4-1の答え

次に示すT 型断面の図芯位置を求めよ。

各係数を求める

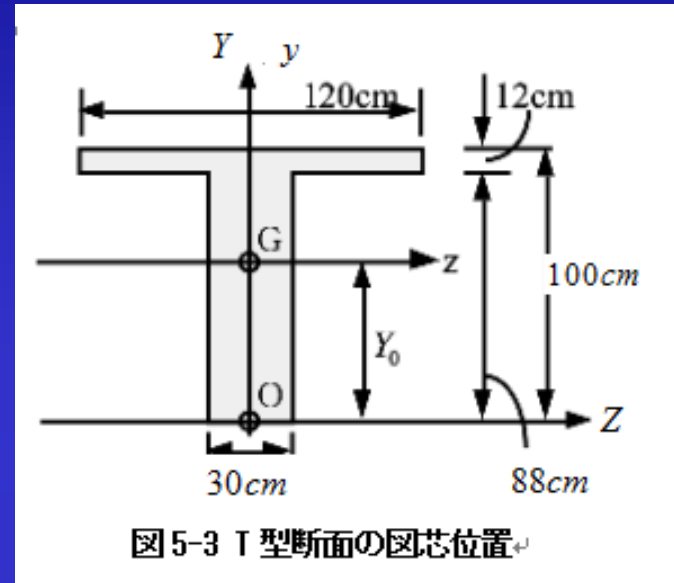
$$B = 30\text{cm}$$

$$D = 100\text{cm}$$

$$n = \frac{120}{30} = 4$$

$$n_1 = \frac{88}{100} = 0.88$$

$$n_2 = \frac{12}{100} = 0.12$$



上の係数を次式に代入することで、図芯位置が求められる。

$$\begin{aligned} A &= (nn_2 + n_1)B_1D = (4 \cdot 0.12 + 0.88)30 \cdot 100 \\ &= 4080\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_Z &= 0.5B_1D^2(nn_2(2n_1 + n_2) + n_1^2) \\ &= 0.5 \cdot 30 \cdot 100^2(4 \cdot 0.12(2 \cdot 0.88 + 0.12) + 0.88^2) \\ &= 251520\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{Y_0}{A} = 0.5D \frac{(nn_2(2n_1 + n_2) + n_1^2)}{(nn_2 + n_1)} \\ &= 0.5 \cdot 100 \frac{4 \cdot 0.12(2 \cdot 0.88 + 0.12) + 0.88^2}{(4 \cdot 0.12 + 0.88)} \\ &= 50 \frac{1.6768}{1.36} = 61.65\text{cm} \end{aligned}$$

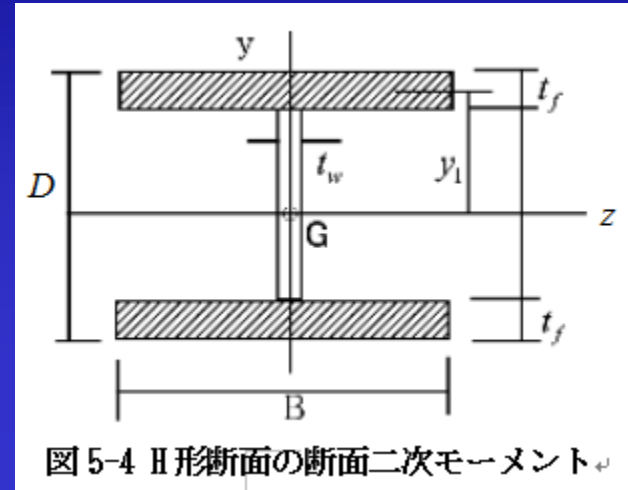
断面二次モーメントの復習

曲げ剛性を表す断面二次モーメントは、図心位置では次のように求められる。

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

H型断面は、図中の斜線を施したフランジと白抜き部分のウェブで構成されている。この断面は主に鋼で作られ、H型鋼などと呼ばれる。H型鋼に関する特徴を鉄骨の教科書で調べておこう。フランジ部分の軸に関する断面二次モーメントは、

$$I_{z_f} = I_z + A_f y_1^2 = \frac{B t_f^3}{12} + B t_f \left(\frac{D - t_f}{2} \right)^2$$



断面二次モーメントの復習

次にウェブ部分の断面二次モーメントは、長方形断面であることから、

$${}_w I_z = \frac{t_w (D - 2t_f)^3}{12}$$

従って、H型断面の断面二次モーメントは次式となる。

$$\begin{aligned} {}_H I_z &= 2 \cdot {}_f I_z + {}_w I_z \\ &= 2 \left\{ \frac{B t_f^3}{12} + B t_f \left(\frac{D - t_f}{2} \right)^2 \right\} + \frac{t_w (D - 2t_f)^3}{12} \end{aligned}$$

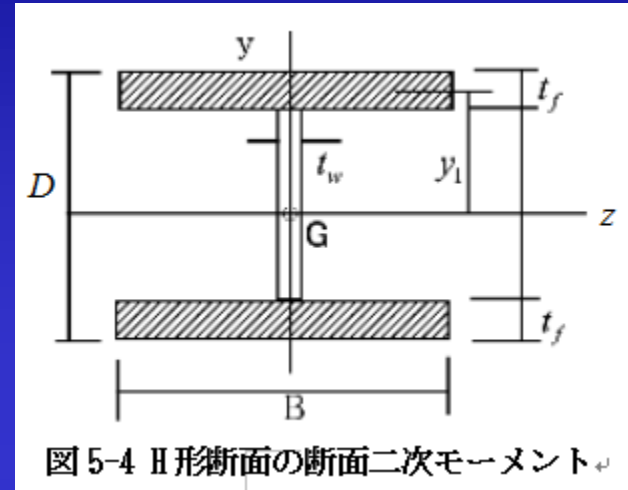


図 5-4 H 形断面の断面二次モーメント

断面二次モーメントの復習

三角形断面の図心位置での断面二次モーメントを求める。

下端から図心までの距離、並びに断面積は

$$Y_0 = \frac{h}{3} \quad A = \frac{bh}{2}$$

Z 軸に関する断面二次モーメントは、例題5-2を参照すると次式で与えられる。

$$I_Z = \int_0^h b(Y) Y^2 dY$$

$$b(Y) = b \left(1 - \frac{Y}{h} \right)$$

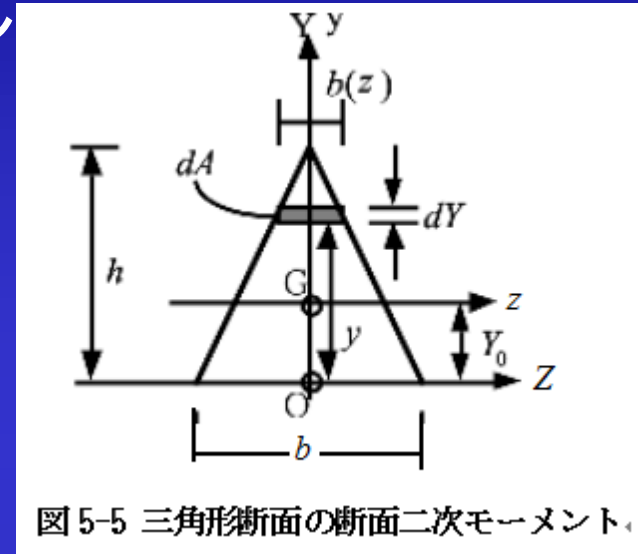


図 5-5 三角形断面の断面二次モーメント。

断面二次モーメントの復習

Z軸に関する断面二次モーメントは、例題5-2を参照すると次式で与えられる。

$$I_Z = \int_0^h b \left(1 - \frac{Y}{h}\right) Y^2 dY$$

上の積分を実行すると、

$$I_Z = \left[b \left\{ \frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4h} \right\} \right]_0^h = b \left\{ \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} \right\} = \frac{bh^3}{12}$$

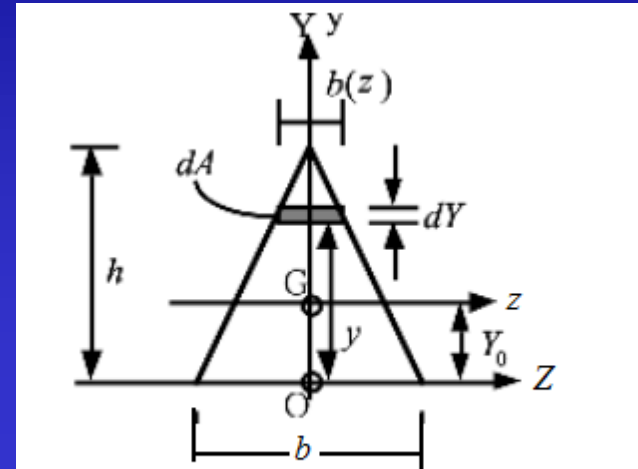


図 5-5 三角形断面の断面二次モーメント。

図心位置での断面二次モーメントは、次式で与えられる。

$$I_z = I_Z - Y_0^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

例題4-2

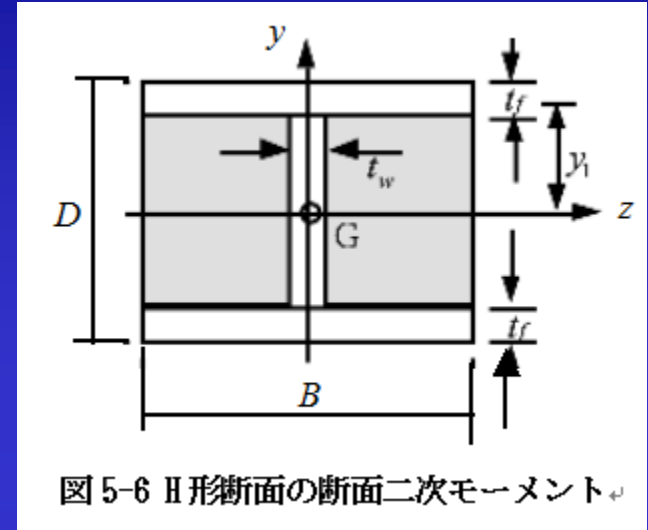
H型断面の断面二次モーメントを、前に求めた方法と異なった方法で求める。

H型断面の断面二次モーメントは、長方形断面の断面二次モーメントから、斜線で示した長方形断面の断面二次モーメントを引くことによって得られる。

$$I_z = \frac{BD^3}{12} - \frac{(B-t_w)(D-2t_f)^3}{12}$$

H形断面H-400x200x8x13を用いて、具体的に計算し、2つの方法が同じ値となることを確かめ、その中でフランジの第2項の値は、断面二次モーメントの値に対し、どのような割合になっているか計算し、その意味を検討しなさい。

$${}_H I_z = 2 \left\{ \frac{Bt_f^3}{12} + Bt_f \left(\frac{D-t_f}{2} \right)^2 \right\} + \frac{t_w (D-2t_f)^3}{12}$$



例題4-2の答え

H形断面H-400x200x8x13を用いて、具体的に計算し、2つの方法が同じ値となることを確かめ、その中でフランジの第2項の値は、断面二次モーメントの値に対し、どのような割合になっているか計算し、その意味を検討しなさい。

$$I_z = \frac{BD^3}{12} - \frac{(B - t_w)(D - 2t_f)^3}{12}$$

$$I_z = \frac{20 \cdot 40^3}{12} - \frac{(20 - 0.8)(40 - 2 \cdot 1.3)^3}{12}$$

$$= 106666.7 + 83701.8 = 22964.9 \text{ cm}^4$$

$${}_H I_z = 2 \left\{ \frac{B t_f^3}{12} + B t_f \left(\frac{D - t_f}{2} \right)^2 \right\} + \frac{t_w (D - 2t_f)^3}{12}$$

$${}_H I_z = 2 \left\{ \frac{40 \cdot 1.3^3}{12} + 20 \cdot 1.3 \left(\frac{40 - 1.3}{2} \right)^2 \right\} + \frac{0.8(40 - 2 \cdot 1.3)^3}{12}$$

$$= 2 \{ 3.7 + 9735.0 \} + 3487.6 = 22965.0 \text{ cm}^4$$

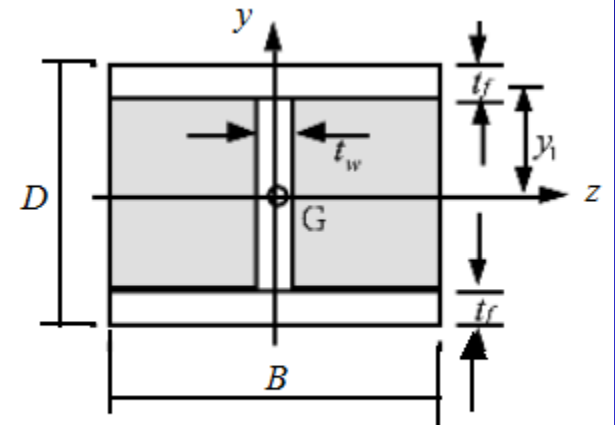


図 5-6 H形断面の断面二次モーメント

例題4-2の答え

フランジの部分の断面二次モーメントは、{}内の第二項の値は、

$$_f I_z = 2 \cdot 9735.0 = 19470.0$$

となり、部材全体の断面二次モーメントの85%を占め、フランジ部分が大きく影響していることが分かる。

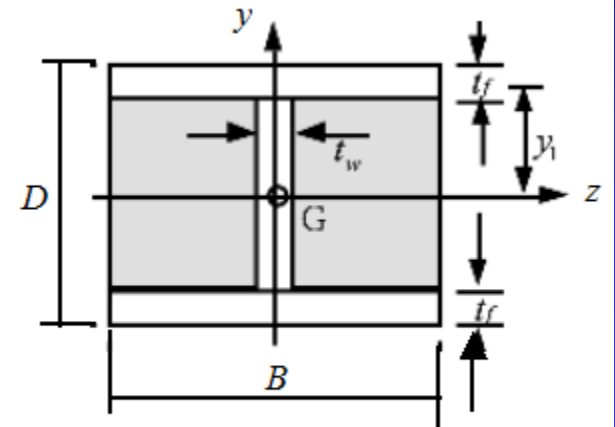


図 5-6 H形断面の断面二次モーメント

断面係数

曲げモーメントから断面の縁応力、つまり、その断面内の最大応力を求めるためには、断面係数が必要となる。この断面係数は、

$$Z_t = \frac{I_z}{y_t} \quad Z_c = \frac{I_z}{y_c}$$

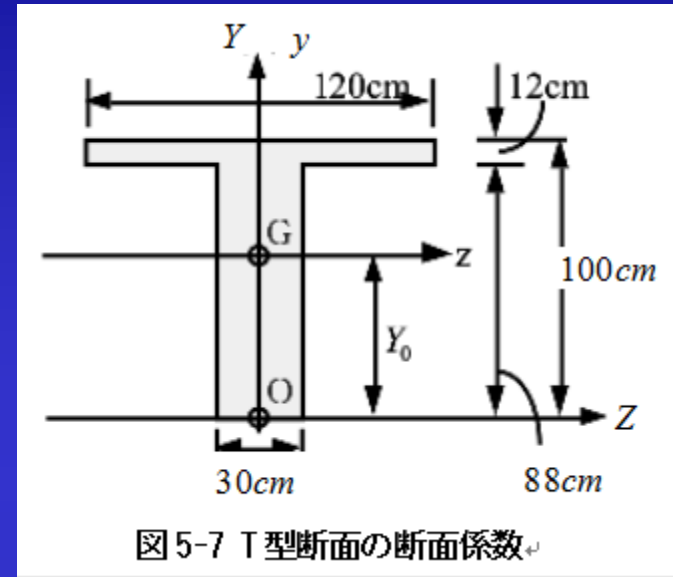
で与えられる。ただし、軸に対し、断面が対称である場合は、断面係数はひとつとなる。ここでは、例題を通して、断面係数を具体的に求め、断面内の応力状態を求めてみよう。

例題4-3

次に示すT形断面の断面係数を求めよ.

$$Y_0 = 61.65\text{cm}$$

$$Z_t = \frac{I_z}{y_t} \quad Z_c = \frac{I_z}{y_c}$$



例題4-3の答え

次に示すT形断面の断面係数を求めよ。

$$Y_0 = 61.65 \text{ cm}$$

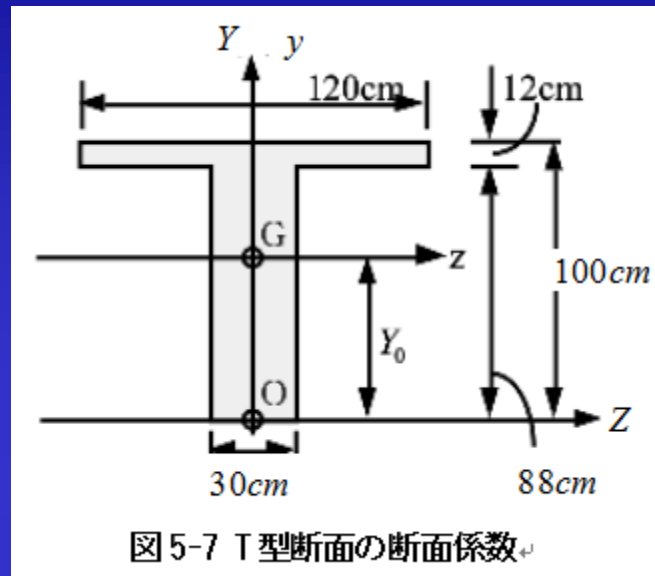
この位置を図心とし、断面二次モーメントは、

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{120 \cdot 12^3}{12} + 120 \cdot 12 (100 - 61.65 - 6)^2 \\ &\quad + \frac{30 \cdot 88^3}{12} + 30 \cdot 88 (61.65 - 44)^2 \\ &= 1.524 \cdot 10^6 + 2.526 \cdot 10^6 = 4.05 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

として与えられる。従って、断面係数は、

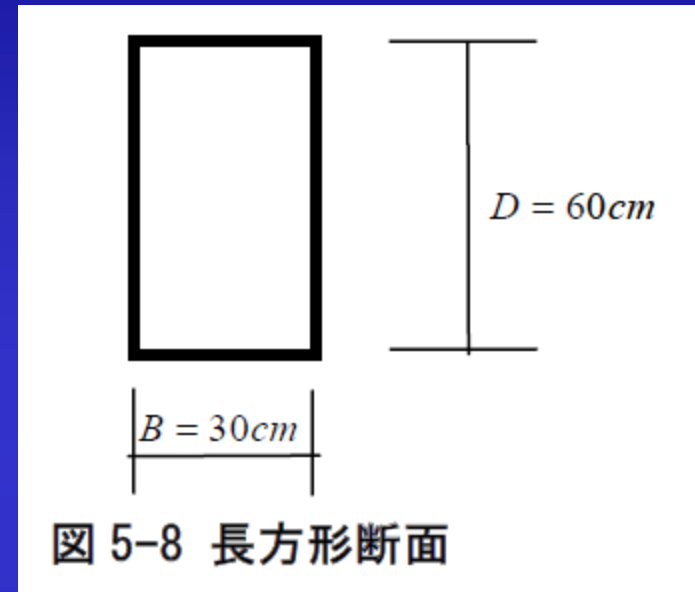
$$Z_t = \frac{I_z}{61.65} = \frac{4.05 \cdot 10^6}{61.65} = 6.57 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$$

$$Z_c = \frac{I_z}{100 - 61.65} = \frac{4.05 \cdot 10^6}{38.35} = 10.56 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$$



例題4-4

次に示す長方形断面（幅30cm、せい60cm）に、曲げモーメント50kNm が生じている。この断面内に発生している最大応力を求めよ。



例題4-4の答え

最初に、この断面の断面特性を計算する。

$$A = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4$$

$$Z_c = Z_t = \frac{540000}{30} = 18000 \text{ cm}^3$$

断面の最大応力は、断面の縁部に発生し、断面上部の最大圧縮応力と、断面下部の最大引張応力は、以下のように求められる。

$$\sigma_c = -\frac{M}{Z_c} = -\frac{50 \cdot 100}{18000} = -0.27 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{50 \cdot 100}{18000} = 0.27 \text{ kN/cm}^2$$

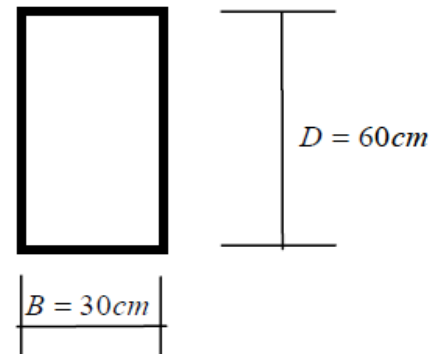


図 5-8 長方形断面

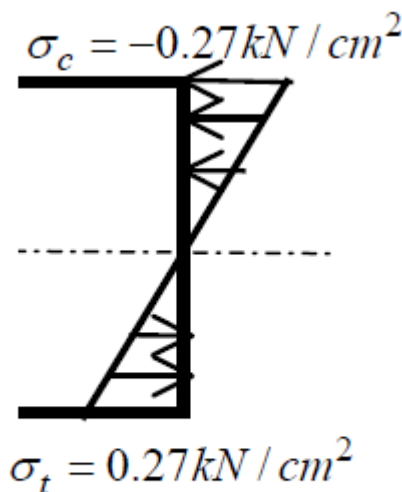


図 5-9 断面内応力分布

例題4-5

次に示す円形断面（半径 $R=20\text{cm}$ ）に、圧縮力 500kN と曲げモーメント 50kNm が生じている。この断面内に発生している最大応力を求めよ。

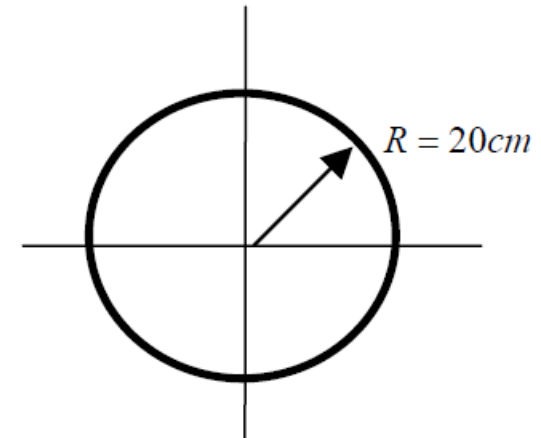


図 5-10 円形断面

例題4-5の答え

円形断面の断面性能を求める。

$$A = \pi R^2 = 3.1415 \cdot 20^2 = 1256.6 \text{ cm}^2$$

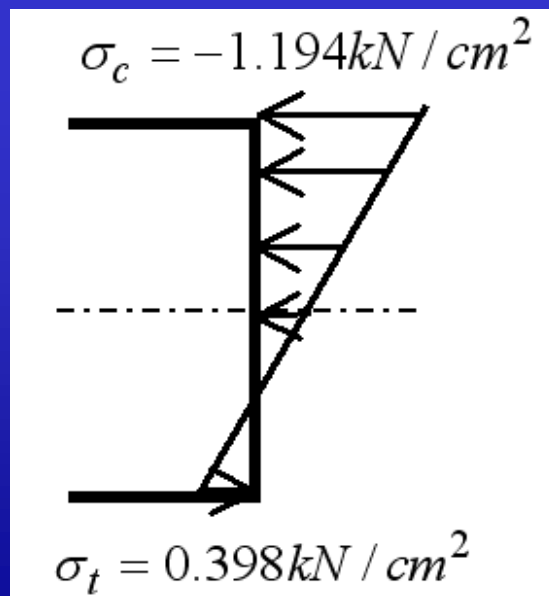
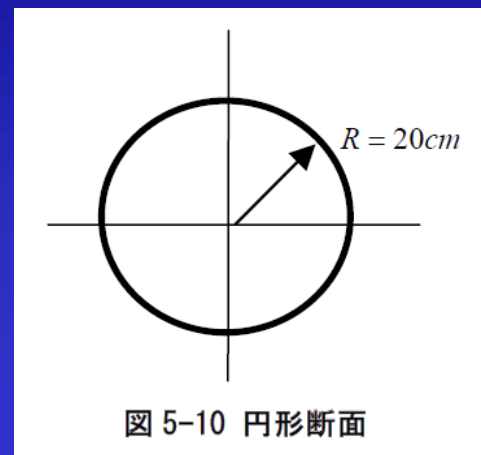
$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{3.1415 \cdot 20^4}{4} = 125660 \text{ cm}^4$$

$$Z_c = Z_t = \frac{125660}{20} = 6283 \text{ cm}^3$$

断面の最大応力は、断面の縁部に発生し、断面上部の最大圧縮応力と、一方、断面下部の最大応力は、圧縮力が大きいため、引張応力が発生せず、以下のように圧縮応力となる。

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c} = -\frac{500}{1256.6} - \frac{50 \cdot 100}{6283} \\ &= -0.398 - 0.796 = -1.194 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = -\frac{500}{1256.6} + \frac{50 \cdot 100}{6283} \\ &= -0.398 + 0.796 = 0.398 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$



まとめ

- 1) 各種断面の特性を具体的に計算して求め、基本的な断面特性を復習した。
- 2) 図芯、断面二次モーメント
- 3) 断面係数
- 4) 演習