

荷重と断面力の釣合



構造力学 I

第5回講義内容

- 1) 断面内の力の釣合
- 2) 演習
- 3) まとめ

荷重と断面力の力の釣合

梁部材内の力の釣合について考えよう。ただし、梁内部の応力による力の釣合ではなく、断面力を用いた力の釣合を考える。まず、原点から x の位置にある部材の微小部分、長さ dx 間における力の釣合を、図6-11を参照しながら考える。微小部分の両端には断面力、つまり、曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$ が、また、部材上端には、荷重 $P_w(x)$ が加わっているものとする。

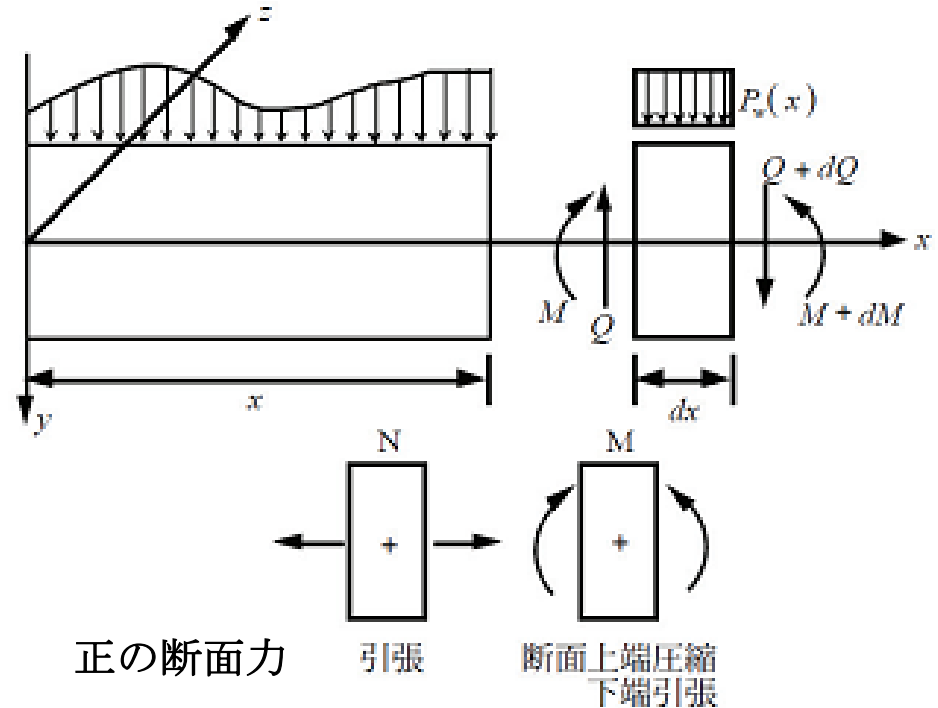


図 6-11 梁における断面力による力の釣合

荷重と断面力の力の釣合

最初に、上下方向の力の釣合およびモーメントの釣合を考えよう。

$$-Q + (Q + dQ) + P_w dx = 0$$

$$dQ = -P_w dx$$

$$M - (M + dM) + Q \frac{dx}{2} + (Q + dQ) \frac{dx}{2} = 0$$

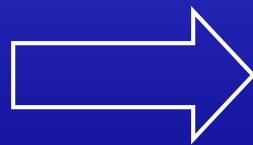
$$dM = Qdx + dQ \frac{dx}{2}$$

微小項で
省略

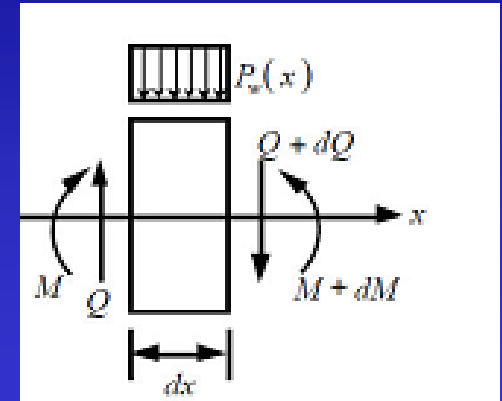
両辺を dx で割り、整理すると

$$\frac{dQ}{dx} = -P_w(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$



$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -P_w(x)$$



例題5-1a

下に示す単純梁に中央集中荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。

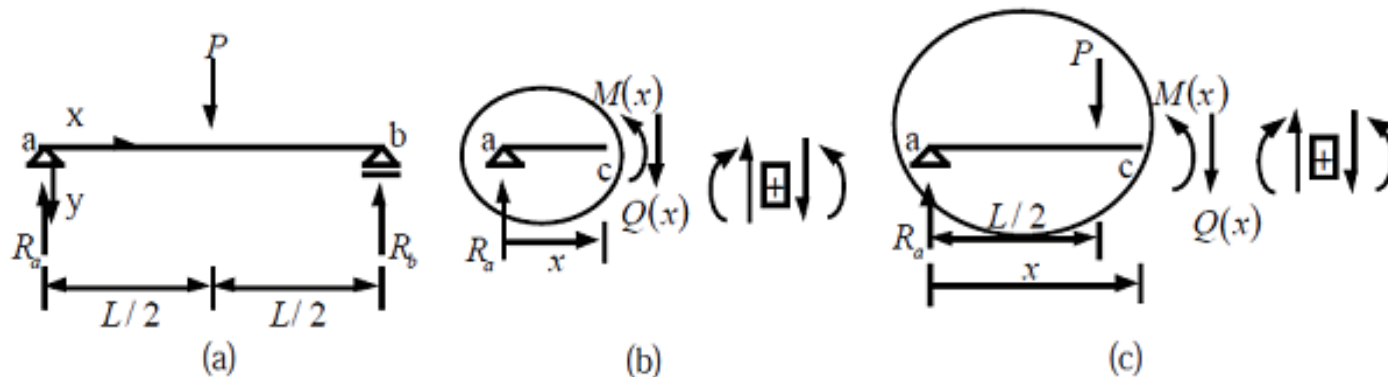


図 6-12 中央集中荷重を受ける単純梁と単純梁における力の釣合

例題5-1aの答え

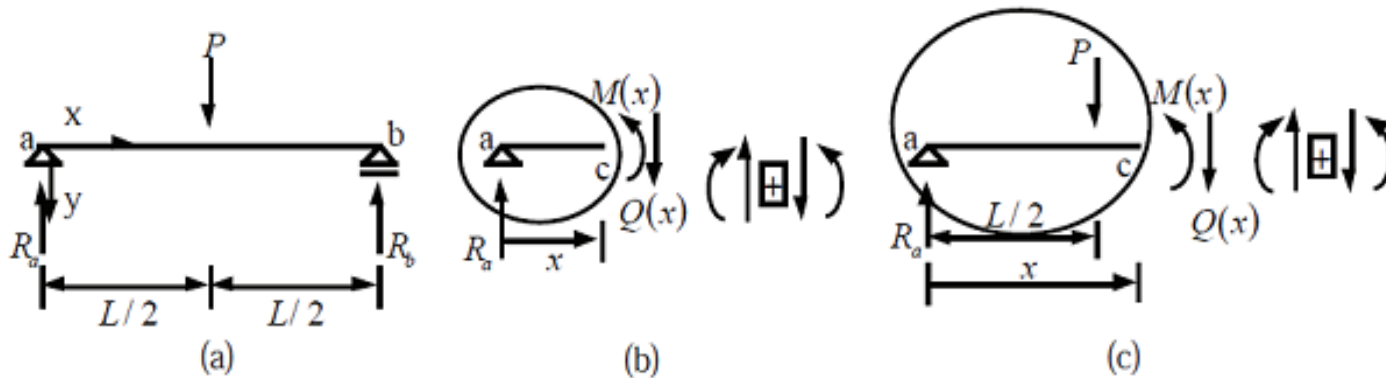


図 6-12 中央集中荷重を受ける単純梁と単純梁における力の釣合

ここでは、断面力と外力との力の釣合式を解く方法で、断面力分布を求める。まず、上図の (a) で、荷重と反力による力の釣合より、反力を求める。

$$\begin{aligned}
 P - R_a - R_b &= 0 \\
 P \cdot \frac{L}{2} - R_b L &= 0
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 R_a = R_b = \frac{P}{2}$$

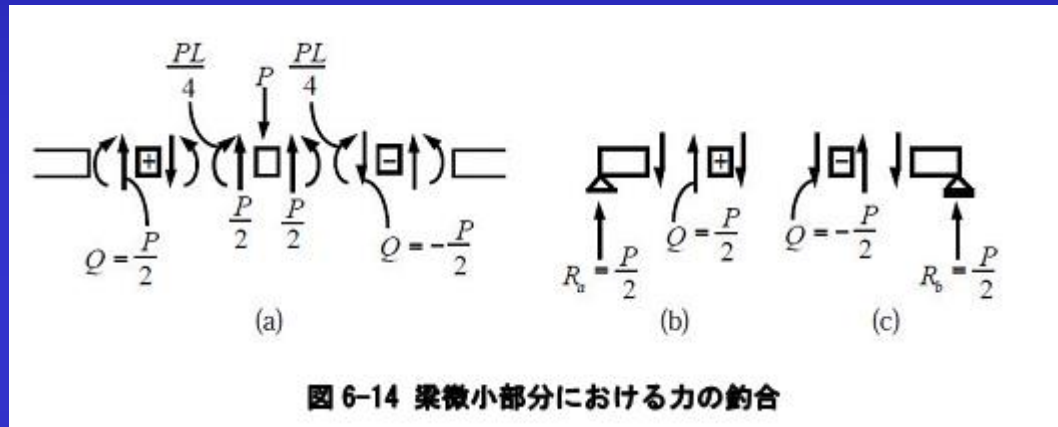
例題5-1aの答え

次に、力の釣合式である微分方程式を2回積分する。ただし、対称構造で、中央集中荷重であることから、 $x < L/2$ の範囲による方程式である。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = Q = C_1$$

$$M(x) = C_1 x + C_2$$



次に、境界条件として、単純梁であることから、 $x = 0$ で $M(0) = 0$ であり、また、 $x = L/2$ で、図(a)のように荷重とせん断力の釣合より、次式が得られる。

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2}$$

例題5-1aの答え

2つの境界条件より、以下のように積分定数を決定する。

$$M(0) = C_2 = 0$$

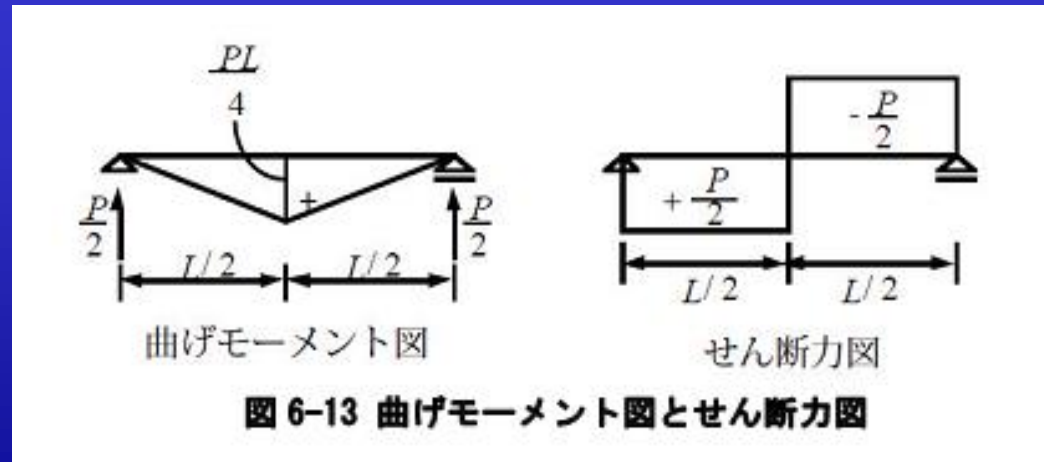
$$\frac{dM}{dx} = Q\left(\frac{L}{2}\right) = C_1 = \frac{P}{2}$$

従って、曲げモーメントとせん断力は、

$$M(x) = \frac{P}{2}x$$

$$Q(x) = \frac{P}{2}$$

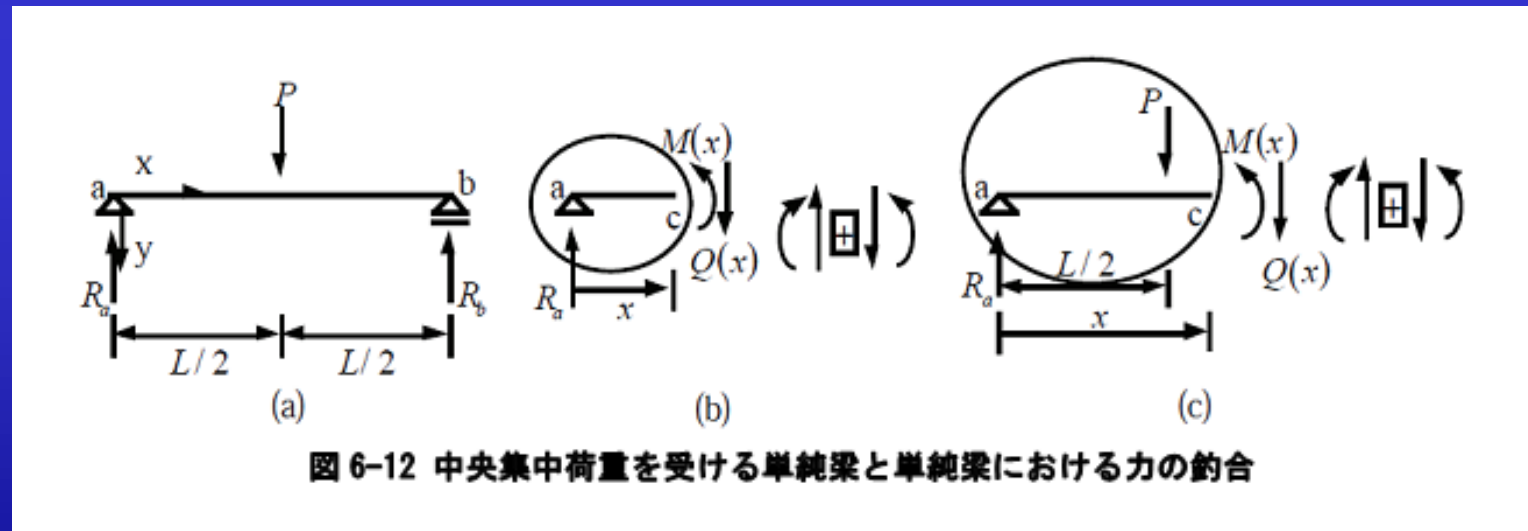
上式は $x < L/2$ の範囲であり、右半分は、左の部分を対称としてコピーする。



例題5-1b

単純梁に中央集中荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。

例題5-1では、断面力と荷重との釣合式である微分方程式を解く方法で解を求めた。ここでは、切断法を用いて同じ問題を解いてみよう。



例題5-1bの答え

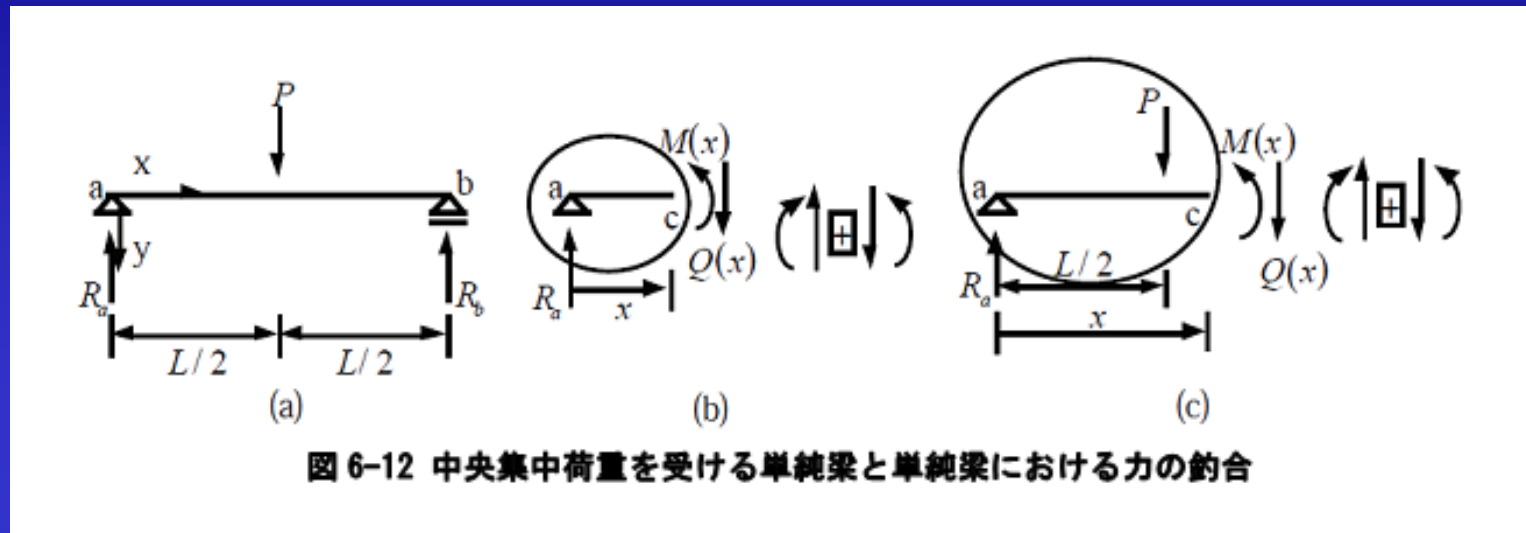


図 6-12 中央集中荷重を受ける単純梁と単純梁における力の釣合

反力は、荷重と反力との力の釣合より、次のように求められる。

$$R_a = R_b = \frac{P}{2}$$

例題5-1b

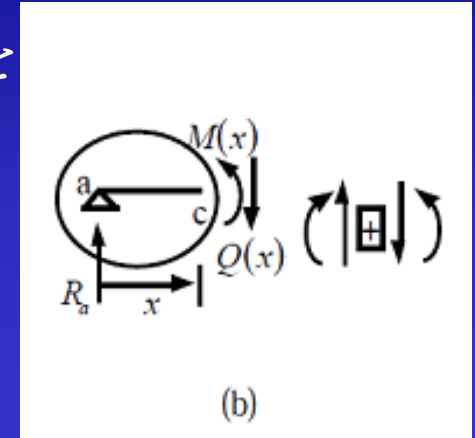
上図(b)のように梁を切断し、閉曲線内の力の釣合を考える。この閉曲線は、梁を切断しているため、ここには、図のように断面力と釣り合うせん断力と曲げモーメントが働くものとする。
上下方向の力の釣合より、

$$-R_a + Q(x) = 0; \quad Q(x) = \frac{P}{2}$$

点cにおけるモーメントの釣合より、

$$-M(x) + R_a x = 0; \quad M(x) = \frac{P}{2} x$$

となり、 $x < L/2$ の範囲のせん断力と曲げモーメントが得られる。



例題5-1b

次に、 x が $L/2$ より大きい場合について考えよう。閉曲線は、右図(c)に示されている。切断面の外力は先と同様である。まず、上下方向の釣合は、以下のように得られる。

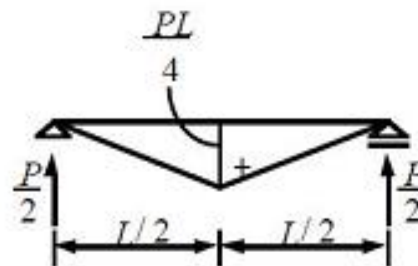
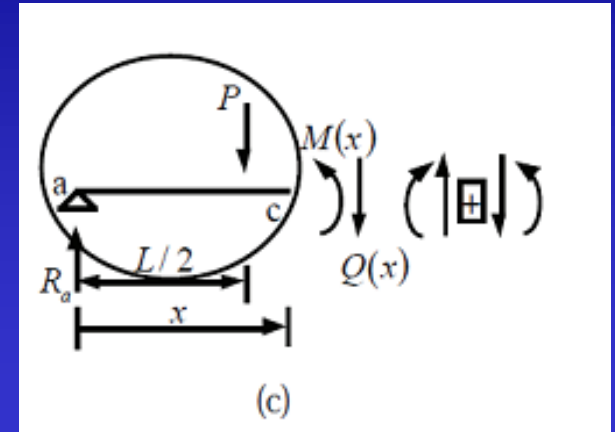
$$-R_a + Q(x) + P = 0; \quad Q(x) = -\frac{P}{2}$$

点cにおけるモーメントの釣合より、

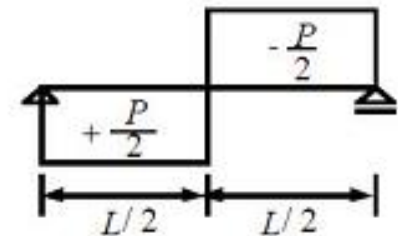
$$R_a x - M(x) - P(x - \frac{L}{2}) = 0; \quad M(x) = \frac{P}{2}(L - x)$$

最大曲げモーメントは、

$$M(\frac{L}{2}) = \frac{PL}{4}$$



曲げモーメント図

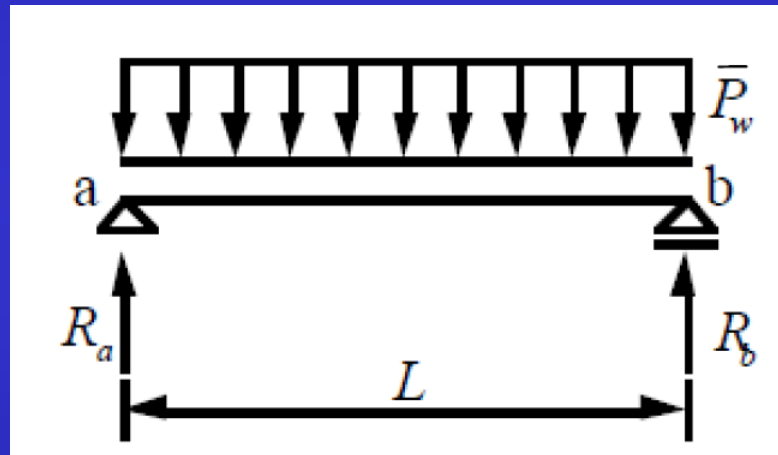


せん断力図

図 6-13 曲げモーメント図とせん断力図

例題5-2a

単純梁に等分布荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。
断面力と荷重の釣合式を用いて、解を求める。



例題5-2aの答え

断面力と荷重の釣合は、

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\bar{P}_w$$

ここで、 \bar{P}_w は等分布であることより、定数である。両式を2回積分すると、

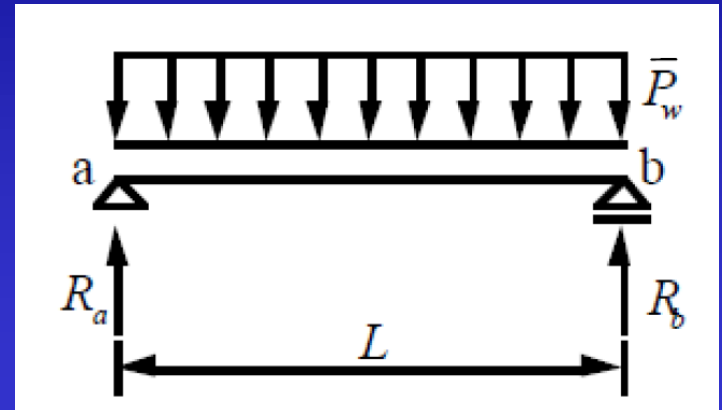
$$\frac{dM}{dx} = Q = -\bar{P}_w x + C_1$$

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

境界条件として、両端の曲げモーメントがゼロであることより、

$$M(0) = C_2 = 0$$

$$M(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} L^2 + C_1 L = 0$$



例題5-2aの答え

2つの境界条件より、積分定数は、

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{\bar{P}_w L}{2}$$

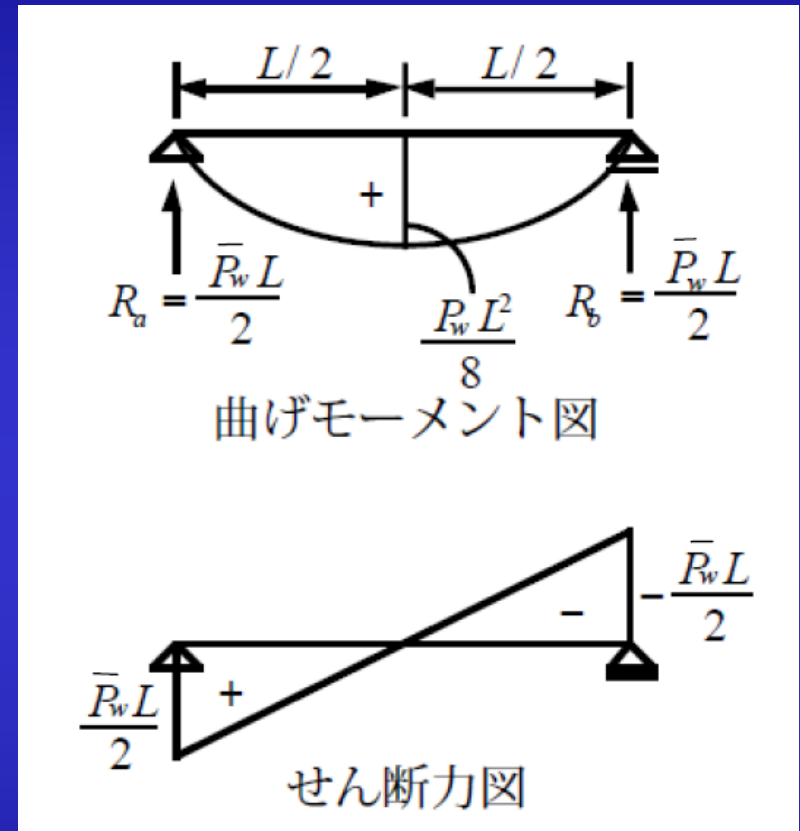
上記の定数を、たわみの式に代入すると、

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2}x^2 + \frac{\bar{P}_w L}{2}x = \frac{\bar{P}_w x}{2}(L - x)$$

$$Q(x) = \frac{\bar{P}_w}{2}(L - 2x)$$

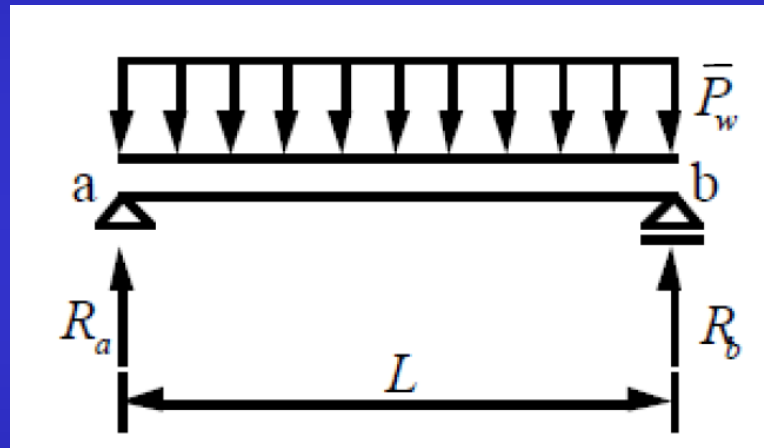
最大曲げモーメントは、せん断力がゼロの位置にあり、

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8}; \quad \leftarrow \quad Q(x) = \frac{\bar{P}_w}{2}(L - 2x) = 0; \quad x = \frac{L}{2}$$



例題5-2b

単純梁に等分布荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。
切断法を用いて、断面力と荷重の力の釣合より解を求める。



例題5-2bの答え

両端の反力は、荷重との力の釣合ならびに a 点でのモーメントの釣合より、

$$-R_a - R_b + \int_0^L \bar{P}_w dx = 0$$

$$-R_b L + \int_0^L \bar{P}_w x dx = 0$$

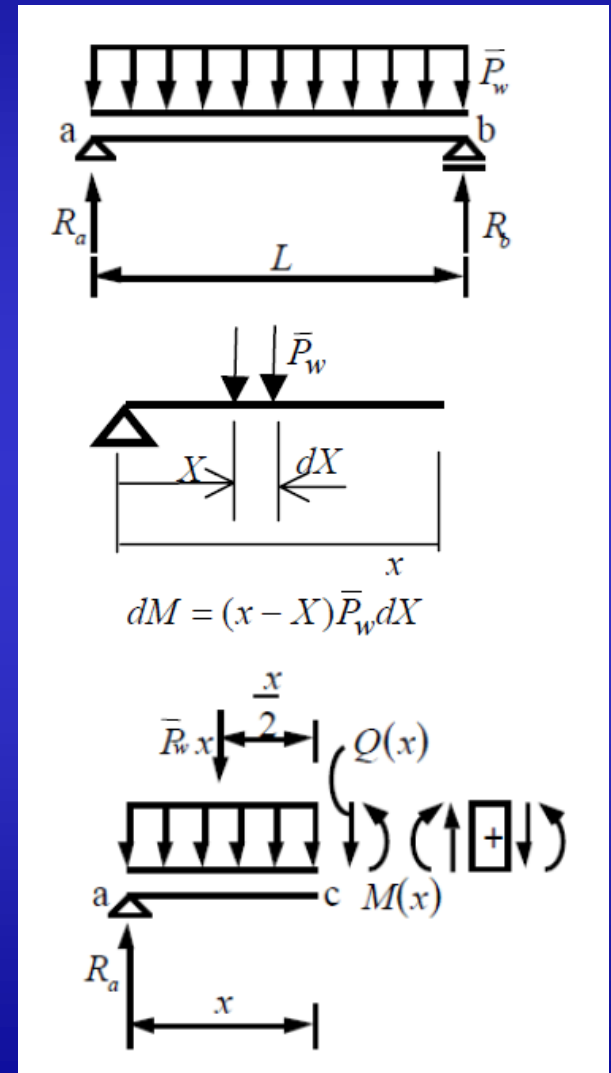
上式より、反力は、

$$R_a + R_b = \frac{\bar{P}_w L}{2}$$

次に、 a 点より x の位置で梁を切断する。その位置での断面力を考慮することによって、切断点でのモーメントの釣合と上下方向の釣合より次式が得られる。

$$-M(x) + R_a x - \int_0^x \bar{P}_w (x - X) dX = 0$$

$$-R_a + \int_0^x \bar{P}_w dx + Q(x) = 0$$



例題5-2bの答え

積分を実行し、整理すると、

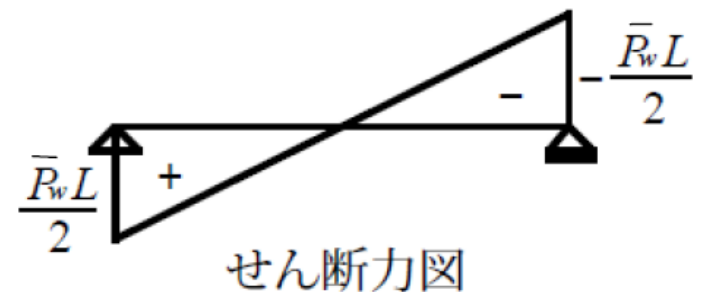
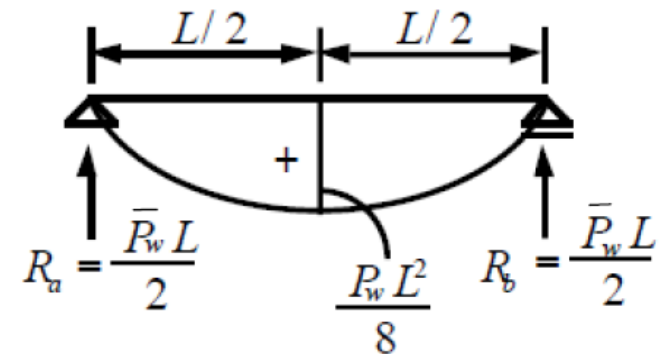
$$M(x) = \frac{\bar{P}_w L}{2} x - \bar{P}_w \left[xX - \frac{X^2}{2} \right]_0^x = \frac{\bar{P}_w L}{2} x - \frac{\bar{P}_w x^2}{2}$$

$$= \frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x)$$

$$Q(x) = \frac{\bar{P}_w L}{2} - \bar{P}_w x = \frac{\bar{P}_w}{2} (L - 2x)$$

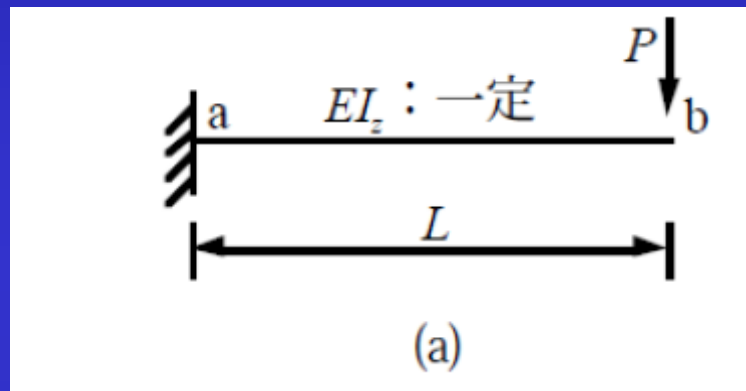
曲げモーメント図とせん断力図を右図に描く。

せん断力がゼロの位置で曲げモーメントが最大となっていることに注意



例題5-3a

片持ち梁の先端に集中荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。



例題5-3aの答え

力の釣合式である微分方程式を2回積分する。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$$

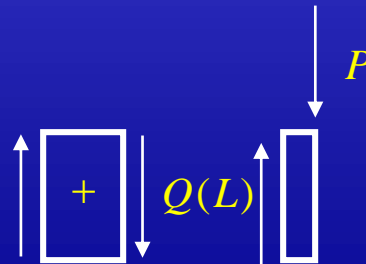
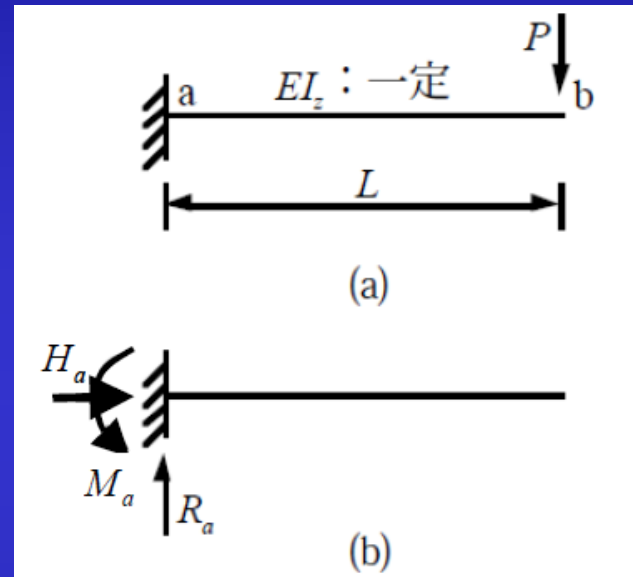
$$\frac{dM}{dx} = Q = C_1$$

$$M(x) = C_1 x + C_2$$

次に、境界条件として、片持ち梁であることから、 $x=L$ で曲げモーメントがゼロとなり、また、同じく、 $x=L$ 点でせん断力と荷重の釣合が得られる。

$$M(L) = C_1 L + C_2 = 0$$

$$Q(L) = C_1 = P$$



例題5-3aの答え

積分定数は、

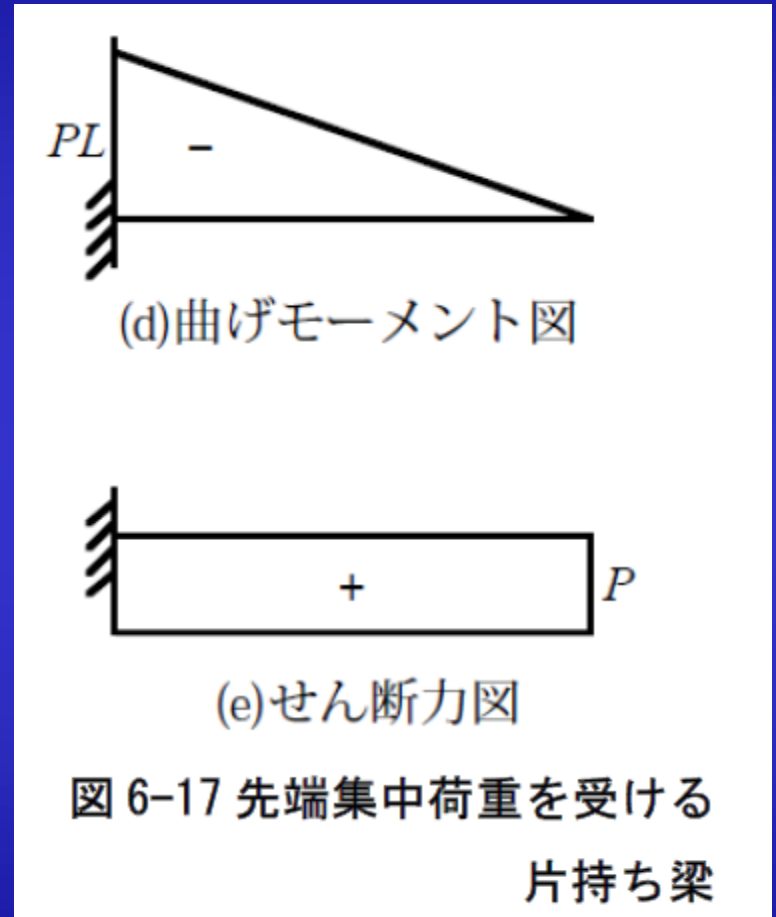
$$C_1 = P$$

$$C_2 = -PL$$

曲げモーメント並びにせん断力は、

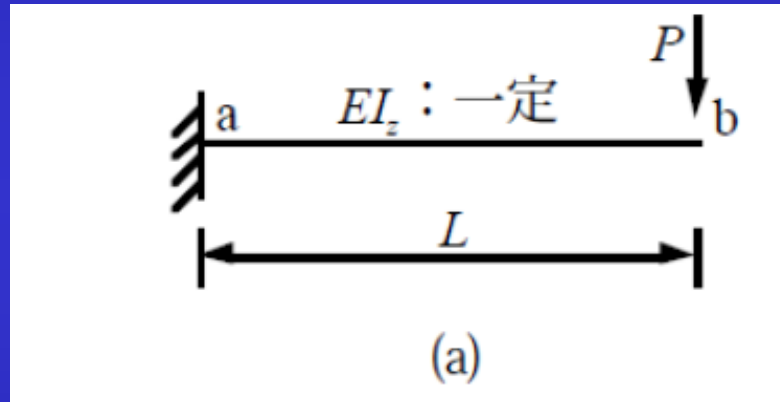
$$M(x) = Px - PL = P(x - L)$$

$$Q(x) = P$$



例題5-3b

片持ち梁の先端に集中荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。
切断法を用いて、断面力と荷重の力の釣合より解を求める。



例題5-3bの答え

荷重と反力での力の釣合より、

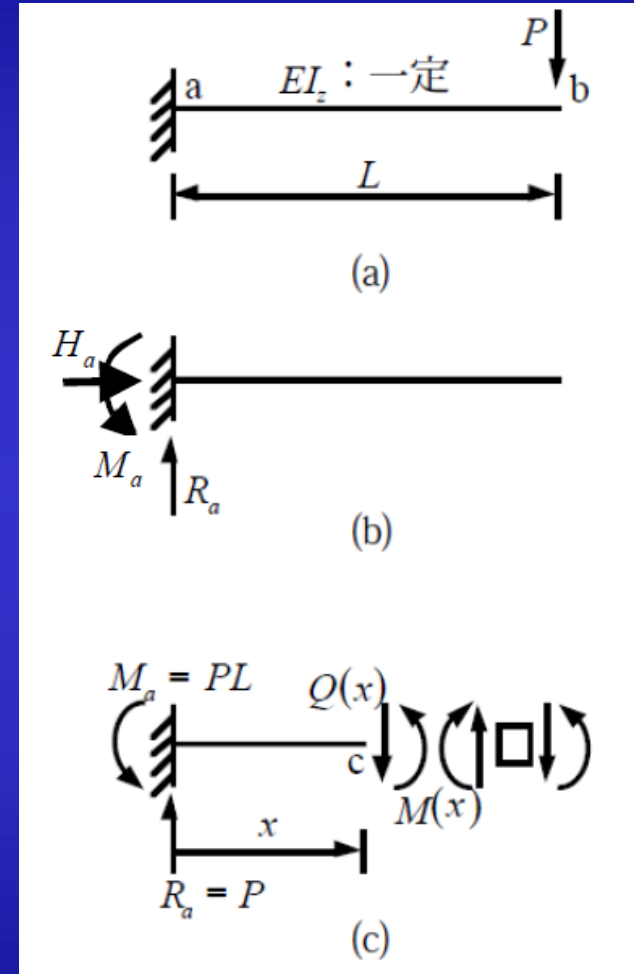
$$-R_a + P = 0; \quad R_a = P$$

$$H_a = 0$$

$$PL - M_a = 0; \quad M_a = PL$$

右図(c)に示す閉曲線の中の釣合を考える。ここでは、原点からの 位置で梁部材が切断されており、梁内部の断面力と釣り合う外力を仮定する。この外力の方向は、その隣に描かれている梁の微小部分に釣り合う力となっており、微小部分の力の方向は、断面力が正となる方向に仮定している。まず、上下方向の力の釣合は、

$$-R_a + Q(x) = 0$$



例題5-3bの答え

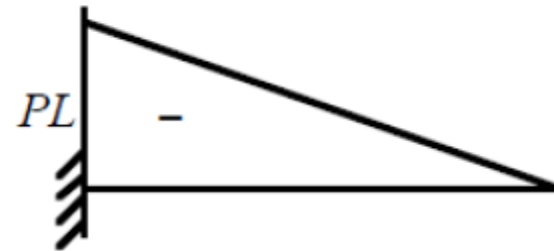
C点におけるモーメントの釣合は、

$$R_a x - M(x) - M_a = 0$$

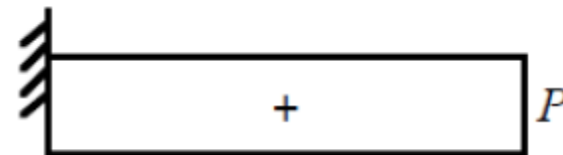
整理すると、

$$Q(x) = R_a = P$$

$$M(x) = P(x - L)$$



(d) 曲げモーメント図

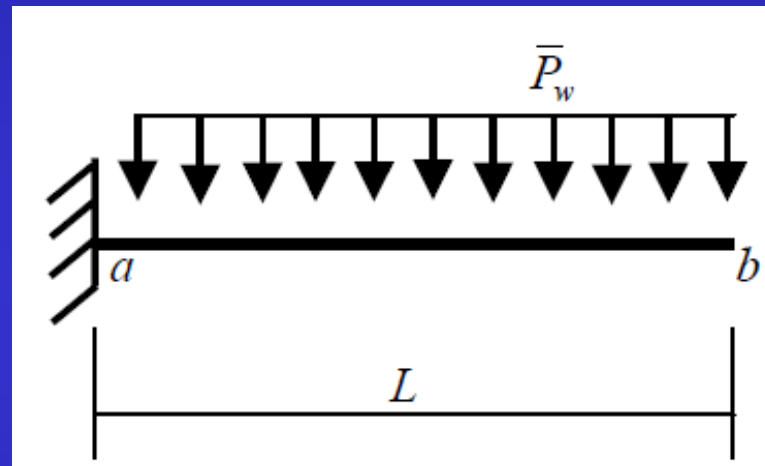


(e) せん断力図

図 6-17 先端集中荷重を受ける
片持ち梁

例題5-4a

片持ち梁に等分布荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。



例題5-4a

断面力と荷重の釣合は、

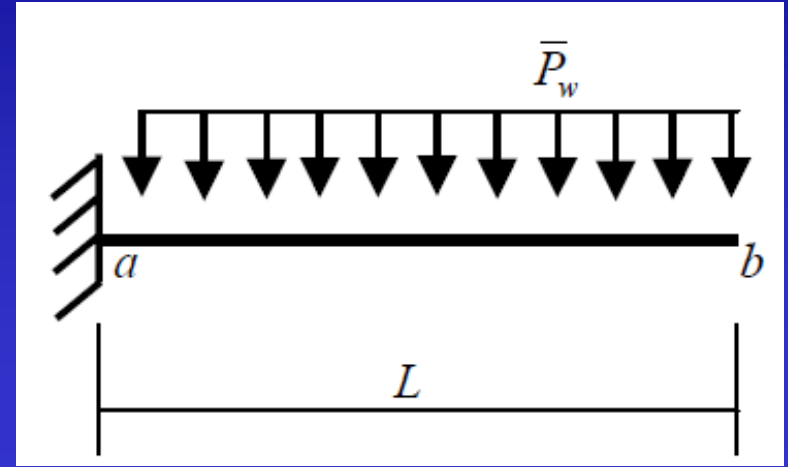
$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\bar{P}_w$$

ここで、 \bar{P}_w は等分布であることより、定数である。両式を2階積分すると、

$$\frac{dM}{dx} = Q = -\bar{P}_w x + C_1$$

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

次に、境界条件として、片持ち梁であることから、 $x=L$ で曲げモーメントがゼロとなり、また、同じく、 $x=L$ 点でせん断力もゼロとなる。



$$M(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} L^2 + C_1 L + C_2 = 0$$

$$Q(L) = -\bar{P}_w L + C_1 = 0$$

例題5-4a

$$M(L) = -\frac{P_w}{2}L^2 + C_1L + C_2 = 0$$

$$Q(L) = -\bar{P}_wL + C_1 = 0$$

上式より、積分定数は、

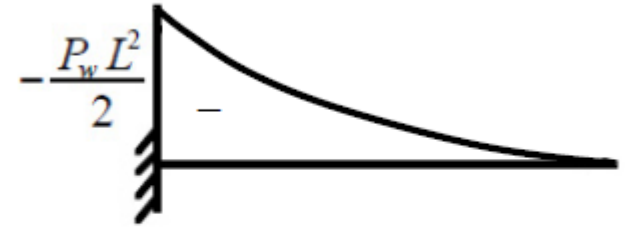
$$C_1 = \bar{P}_wL$$

$$C_2 = -\frac{\bar{P}_w}{2}L^2 + \bar{P}_wL^2 = \frac{\bar{P}_w}{2}L^2$$

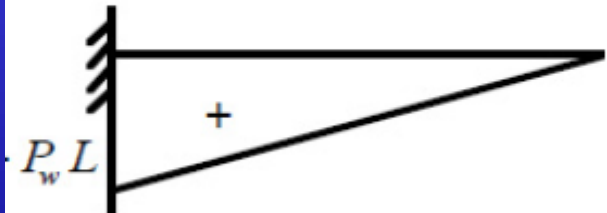
積分定数を代入し、曲げモーメントとせん断力を求める。

$$\begin{aligned} M(x) &= -\bar{P}_w \frac{x^2}{2} + \bar{P}_wLx - \frac{\bar{P}_w}{2}L^2 \\ &= -\frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 - 2Lx + x^2) \end{aligned}$$

$$Q(x) = -\bar{P}_wx + \bar{P}_wL = \bar{P}_w(L - x)$$



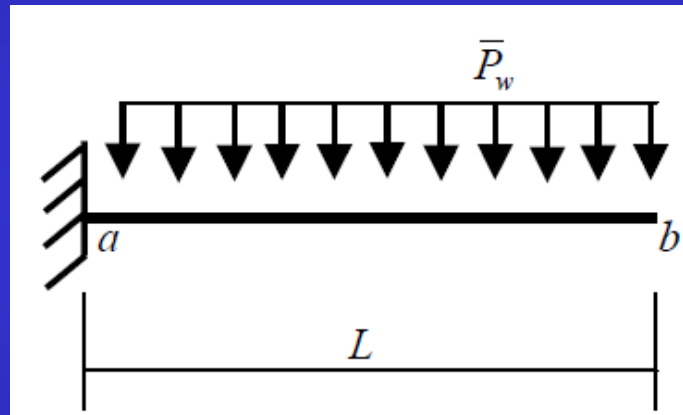
曲げモーメント図



せん断力図

例題5-4b

片持ち梁に等分布荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。
切断法を用いて、断面力と荷重の力の釣合より解を求める。



例題5-4bの答え

上下方向の力の釣合及びa点でのモーメントの釣合から反力を求める。梁全体の力の釣合式は、左図を参考にして、

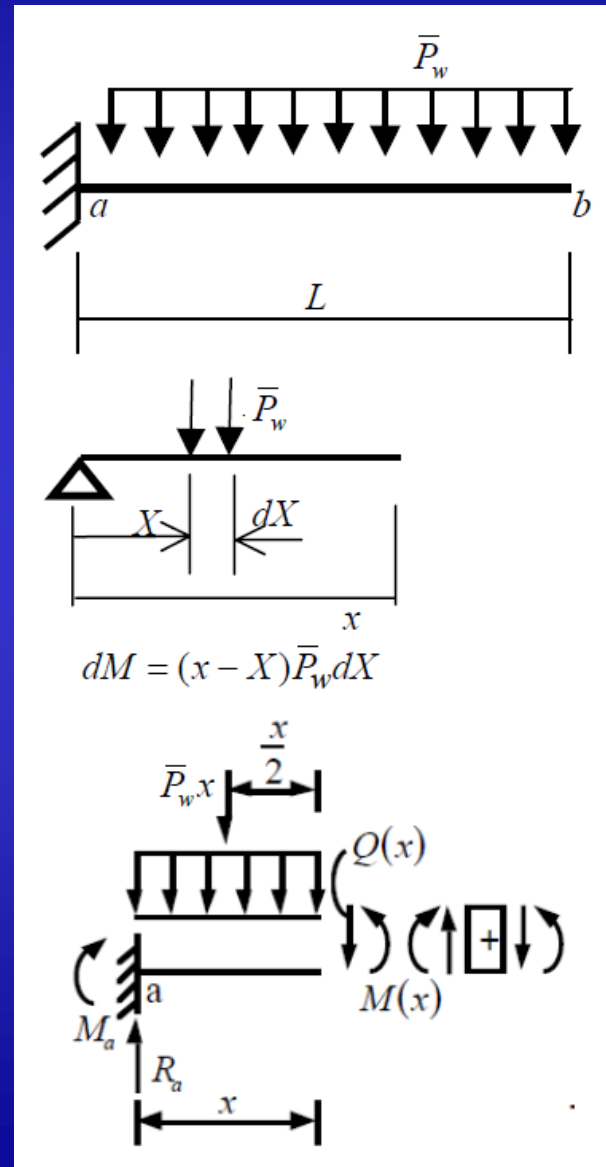
$$-R_a + \int_0^L \bar{P}_w dx = 0; \quad -R_a + \bar{P}_w L = 0$$

$$M_a + \int_0^L \bar{P}_w x dx = 0; \quad M_a + \bar{P}_w \frac{L^2}{2} = 0$$

となる。従って、各反力は、

$$R_a = \bar{P}_w L$$

$$M_a = -\frac{\bar{P}_w L^2}{2}$$



例題5-4bの答え

位置 x で梁を切断し、図に示すような閉曲線の中とその周辺での力の釣合を考える。まず、上下方向の力の釣合および切断点でのモーメントの釣合は、

$$-R_a + \int_0^x \bar{P}_w dX + Q(x) = 0; \quad -R_a + \bar{P}_w x + Q(x) = 0$$

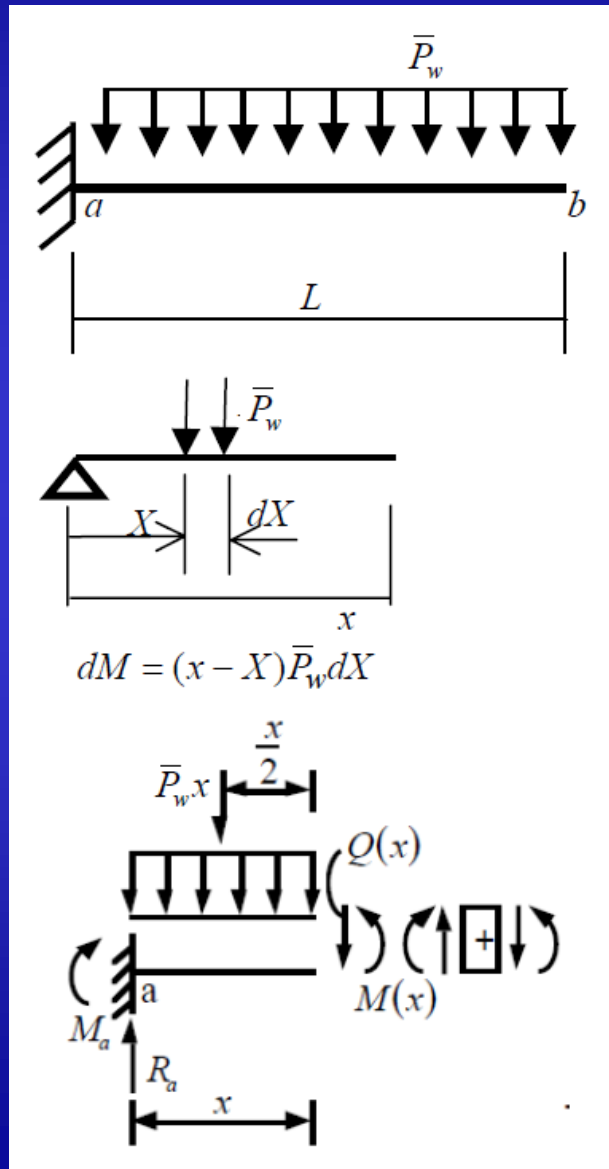
$$-M(x) + M_a + R_a x - \int_0^x \bar{P}_w (x - X) dX = 0;$$

$$-M(x) + M_a + R_a x - \bar{P}_w \frac{L^2}{2} = 0$$

両式より、せん断力と曲げモーメントが以下のように得られる。

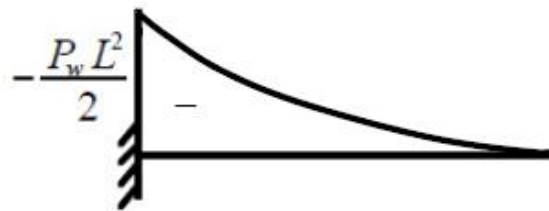
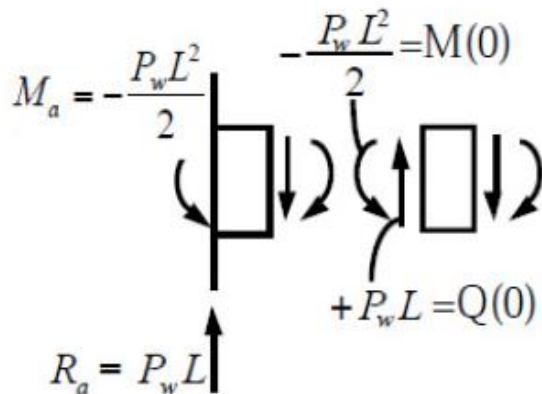
$$Q(x) = R_a - \bar{P}_w x = \bar{P}_w (L - x)$$

$$M(x) = M_a + R_a x - \bar{P}_w \frac{x^2}{2} = -\frac{\bar{P}_w}{2} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

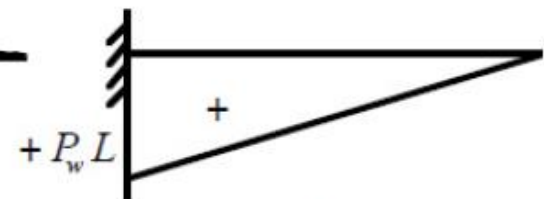


例題5-4bの答え

曲げモーメント及びせん断力の最大値は、梁端部の $x=0$ 点で得られる。もちろん、この断面力は反力と釣り合うことになる。曲げモーメント図とせん断力図を下に示す。



曲げモーメント図



せん断力図

まとめ

1) 断面内の力の釣合

2) 単純梁と片持ち梁の演習を行った

断面力と荷重の釣合に関する微分方程式を
解く方法

3) 切断法を用いて、力の釣合から曲げモーメントとせん断力を求めた