

断面力の釣合と軸力と曲げを 受ける断面内の応力



第7回講義内容

- 1) 2方向曲げと軸力を受ける断面内の応力分布
- 2) 断面の核
- 3) 演習
- 4) まとめ

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

断面には軸力と2軸の曲げモーメントが生じているものとする、平面保持の仮定が成立していると、断面内の軸方向ひずみは第2章で仮定したように次の1次式で表すことができる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa_z y + \kappa_y z$$

ここで、 ε_0 は軸方向ひずみ、 κ_z, κ_y はz軸とy軸に関する曲率、 $\kappa_z y, \kappa_y z$ は曲げひずみを表す。

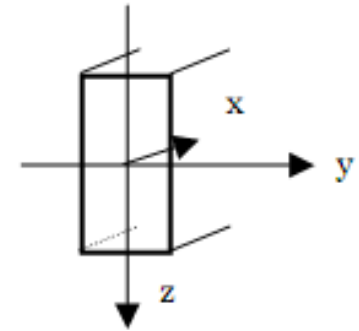


図 7-1 断面内の座標
(右手・右ねじの規則)

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

応力とひずみの関係が線形であり、ヤング係数を E とすると、軸方向応力は次式となる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E(\varepsilon_0 + \kappa_z y + \kappa_y z)$$

最初に、軸力 N は、上式の応力を断面内で積分すると、

$$N = \int_A \sigma_x dA = \varepsilon_0 \int_A E dA + \kappa_z \int_A E y dA + \kappa_y \int_A E z dA$$

座標原点位置で応力のモーメントを積分すると、2軸の曲げモーメントが次のように得られる。

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = \varepsilon_0 \int_A E y dA + \kappa_z \int_A E y^2 dA + \kappa_y \int_A E y z dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \varepsilon_0 \int_A E z dA + \kappa_z \int_A E y z dA + \kappa_y \int_A E z^2 dA$$

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

ここでは、 E はRC構造のように断面内で一様でないとしている。ここで、軸力と曲げモーメントを行列で表すと、

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E dA & \int_A E y dA & \int_A E z dA \\ \int_A E y dA & \int_A E y^2 dA & \int_A E y z dA \\ \int_A E z dA & \int_A E y z dA & \int_A E z^2 dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{Bmatrix}$$

上式は、断面でのひずみ・曲率と断面内の断面力との関係を表す。

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

部材が均質材で構成されており、しかも応力とひずみが比例範囲（線形関係）である場合について考えてみよう。この場合、ヤング係数は断面内で一定であるためは積分外となる。その結果、積分は次のように表すことができる。

$$A = \int_A dA$$

断面積

$$S_y = \int_A z dA$$

y軸に関する断面一次モーメント

$$S_z = \int_A y dA$$

z軸に関する断面一次モーメント

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

y軸に関する断面二次モーメント

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

z軸に関する断面二次モーメント

$$I_{zy} = \int_A zy dA$$

y、z軸に関する断面相乗モーメント

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

上式を利用すると、ひずみ・曲率と断面力との関係は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_z & S_y \\ S_z & I_z & I_{zy} \\ S_y & I_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{Bmatrix}$$

座標変換によって図芯と主軸を求める

一般に、部材の座標系は、前節で示した座標原点のように任意位置に設定されるわけではない。実際は、式(7.8)の係数行列で非対角項がゼロとなるように設定する。では、どのような方法で設定するかについて考えてみよう。一般に非対角項がゼロとなる座標原点を断面の図芯位置といい、また、がゼロとなる位置を主軸位置という。

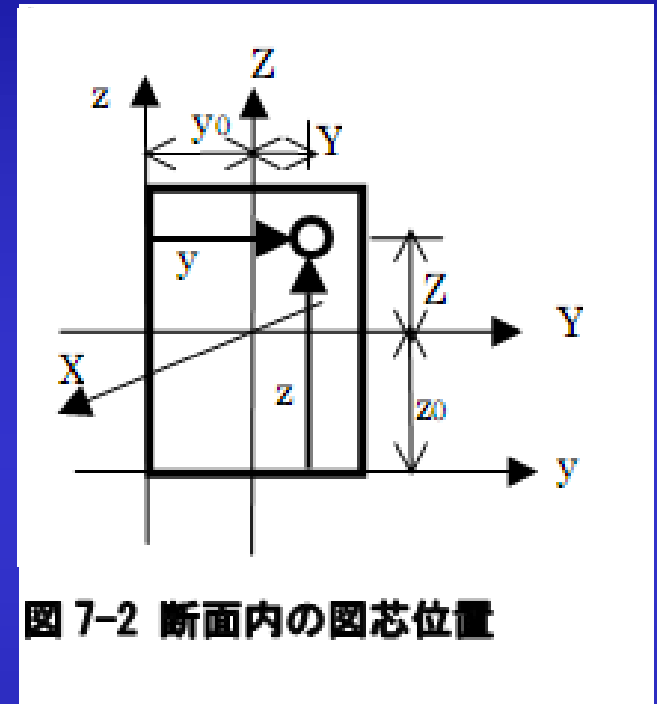


図 7-2 断面内の図芯位置

座標変換によって図芯と主軸を求める

まず、図芯位置を求める。この方法は既に第4章で学習したが、ここでもう一度復習してみよう。右図に示すように任意位置における断面内の座標系をとり、図芯位置での断面座標系とする。断面内の任意位置の座標は、図7-2より次の関係がある。

$$Y = y - y_0$$

$$Z = z - z_0$$

次に、この関係を図芯での断面一次モーメントに代入する。

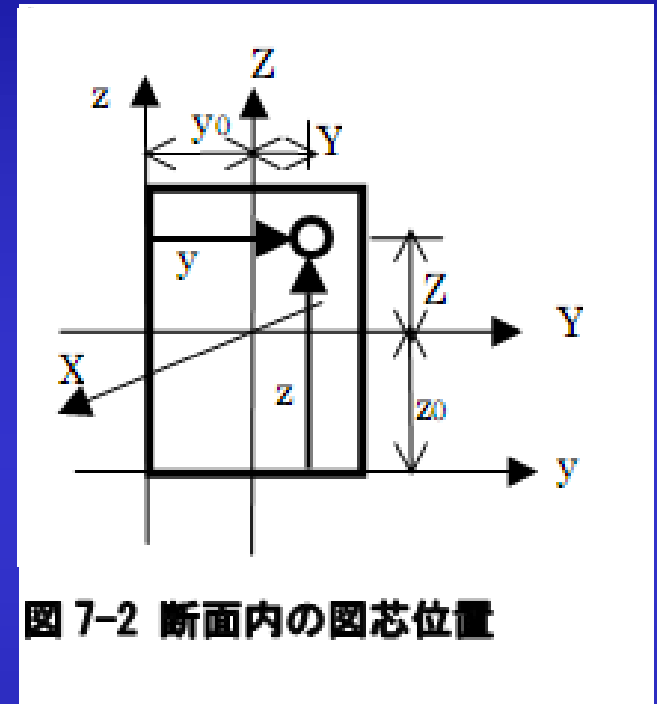


図 7-2 断面内の図芯位置

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

$$S_Y = \int_A (z - z_0) dA = \int_A z dA - z_0 \int_A dA$$

$$S_Z = \int_A (y - y_0) dA = \int_A y dA - y_0 \int_A dA$$

上式が図心位置での断面一次モーメントであることから、その値はゼロとなり、任意位置から図心位置までの距離が得られる。

$$z_0 = \frac{S_z}{A}$$

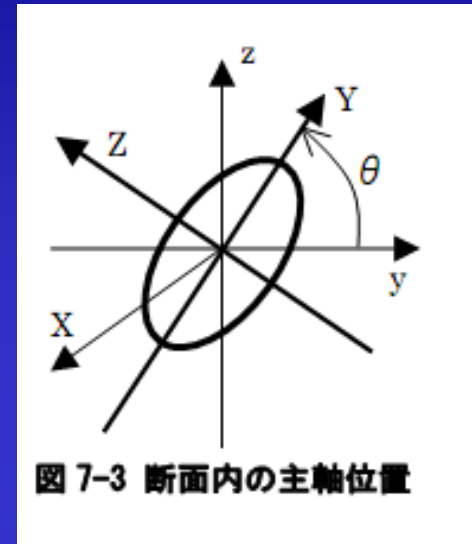
$$y_0 = \frac{S_y}{A}$$

ここで、 S_z, S_y は任意位置での断面一次モーメントである。上式のように、任意位置から図心位置までの距離は任意位置での断面1次モーメントを断面積で割ることによって得られる。

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

次に、断面の主軸位置を求めてみよう。まず、任意座標系 (y, z) から主軸位置 (Y, Z) まで座標系を回転し、両座標系間の関係を次式で表す。

$$\begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$



上式を y と z 軸に関する断面相乗モーメント I_{yz} に代入し、ゼロと置くことによって、回転角 θ を求める。

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_A ZY dA = \int_A (y \cos \theta + z \sin \theta)(-y \sin \theta + z \cos \theta) dA \\ &= \int_A \{(z^2 - y^2) \sin \theta \cos \theta + zy(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} dA \\ &= \frac{\int_A z^2 dA - \int_A y^2 dA}{2} \sin 2\theta + \int_A zy dA \cos 2\theta \\ &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\theta + I_{yz} \cos 2\theta \end{aligned}$$

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

上式の I_y, I_z, I_{yz} は既に座標を平行移動した図心位置での断面二次モーメント及び断面相乗モーメントである。ここでも主軸位置での値であることからゼロであり、上式より次式が得られる。

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

上式から得られる θ が、任意の座標系からの回転角であり、この座標系が主軸となる。ただし、円形断面のように、 I_y と I_z が同じ値の場合は、任意位置が主軸となる。

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

主軸位置の断面二次モーメントは、図芯での任意回転方向座標系における断面特性を用い、式(7.13)を参考にすると次式で表すことができる。

$$I_Y = I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2\theta + I_z \sin^2 \theta$$

$$I_Z = I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2\theta + I_z \cos^2 \theta$$

上式から分かるように、主軸は互いに直交し、この断面二次モーメントは最大値と最小値となる。図芯及び主軸位置での断面力とひずみの関係は、式(7.8)より次式となる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_Z \\ M_Y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_Z & 0 \\ 0 & 0 & I_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_Z \\ \kappa_Y \end{Bmatrix}$$

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力

建築で使用する断面は、一般的に、主軸位置で使用し、しかも、図芯位置で釣合を評価する。そのため、各ひずみと断面力との関係は、次式表される。

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA}; \quad \kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}; \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}$$

また、軸方向応力は、次式となる。

$$\sigma_x(Y, Z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{M_y}{I_y} Z$$

断面の核

圧縮力 P が図芯を通らないと断面内に曲げモーメントを生じる。図芯と軸力作用点までの距離を偏心 (y', z') とすると、断面内に生じる軸力と2軸の曲げモーメントは同図bとcを参考に次式となる。

$$N = -P$$

$$M_y = -Pz'$$

$$M_z = Py'$$

断面内の応力は

$$\sigma_x(Y, Z) = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{Ay'}{I_z} Y + \frac{Az'}{I_y} Z \right)$$

ここで、断面内の任意点 (Y, Z) で、応力 σ_x が引張とならない領域が核である

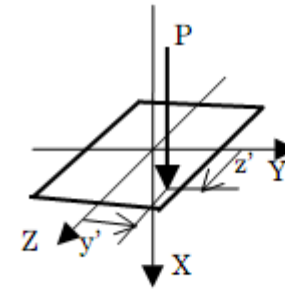


図 7-4a 断面に働く軸力

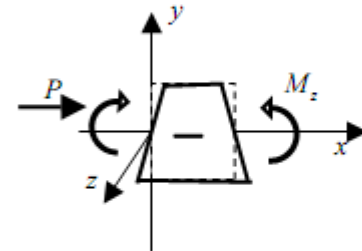


図 7-4b 図芯からずれた軸力によって生じる曲げモーメント

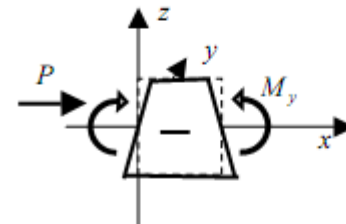


図 7-4c 図芯からずれた軸力によって生じる曲げモーメント

長方形断面の核

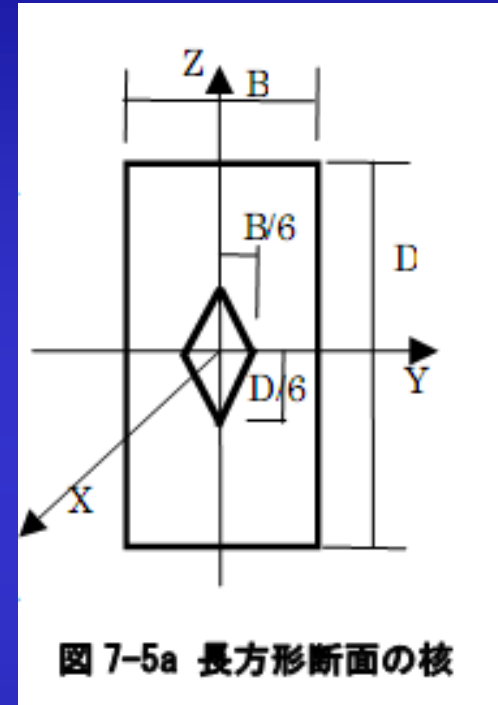
幅 b でせい D の長方形断面についてその核を求める。荷重が第1象限にあるとすると、応力が最も小さくなるのは第3象限の角である。この部分の応力は、その位置座標が $(-D/2, -B/2)$ から、式 (7.20) より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_x(Y, Z) &= -\frac{P}{BD} \left(1 - \frac{Ay'}{\frac{DB^2}{6}} - \frac{Az'}{\frac{BD^2}{6}} \right) \\ &= -\frac{P}{BD} \left(1 - \frac{6y'}{B} - \frac{6z'}{D} \right)\end{aligned}$$

ここで、応力が常に圧縮であるためには次式が成立しなければならない。

$$1 - \frac{6y'}{B} - \frac{6z'}{D} \geq 0 \quad (y' \geq 0; z' \geq 0)$$

$$\frac{y'}{B} + \frac{z'}{D} \leq \frac{1}{6}$$



円形断面の核

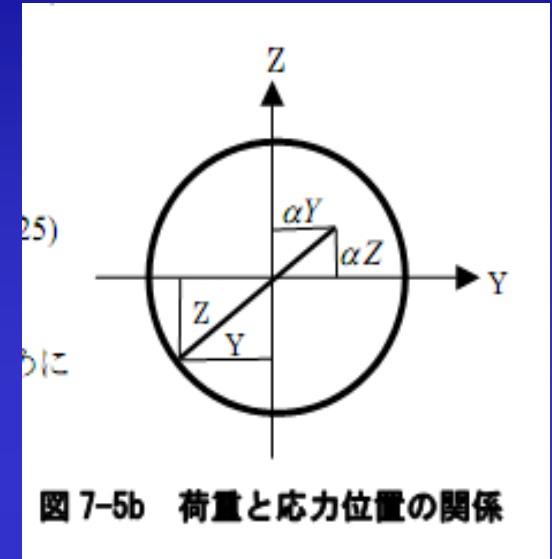
半径 R の丸棒について考察しよう。丸棒は軸対称であるため、その核も円形となる。核半径を求めてみよう。丸棒の Z 、 Y 軸の断面二次モーメントは同じであり、断面積と共に以下の式で与えられる。

$$A = \pi R^2$$

$$I_Y = I_Z = \frac{\pi R^4}{4}$$

第1象限に荷重があるとするとき、応力が最も小さくなる場合は、荷重と断面中心位置を伸ばした第3象限の縁である。上式を式 (7.20) に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_x(Y, Z) &= -\frac{P}{\pi R^2} \left(1 + \frac{\pi R^2 y'}{\pi R^4} Y + \frac{\pi R^2 z'}{\pi R^4} Z \right) \\ &= -\frac{P}{\pi R^2} \left(1 + \frac{4y'Y + 4z'Z}{R^2} \right)\end{aligned}$$



円形断面の核

図7-5bを参考に、荷重位置と応力位置の関係が、

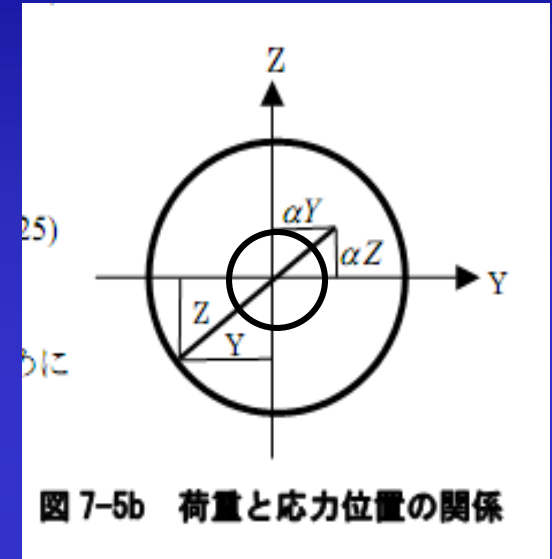
$$y' = -\alpha Y$$

$$z' = -\alpha Z$$

$$Y^2 + Z^2 = R^2$$

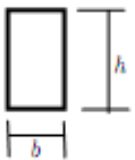
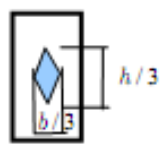
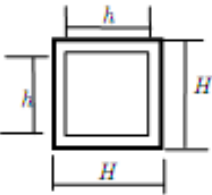
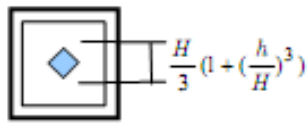
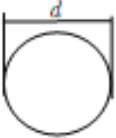


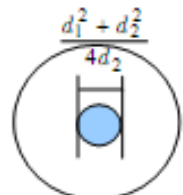
式(7.25)を式(7.24)に代入する。応力が常に圧縮であるためには、次式が成立しなければならない。

$$1 - \frac{4\alpha(Y^2 + Z^2)}{R^2} \geq 0; \quad \alpha \leq \frac{1}{4}$$



各断面形の核

表付 6-4 断面の核

断面形状	核
	
	
	
	

1軸(強軸)の曲げを受ける断面内の応力分布

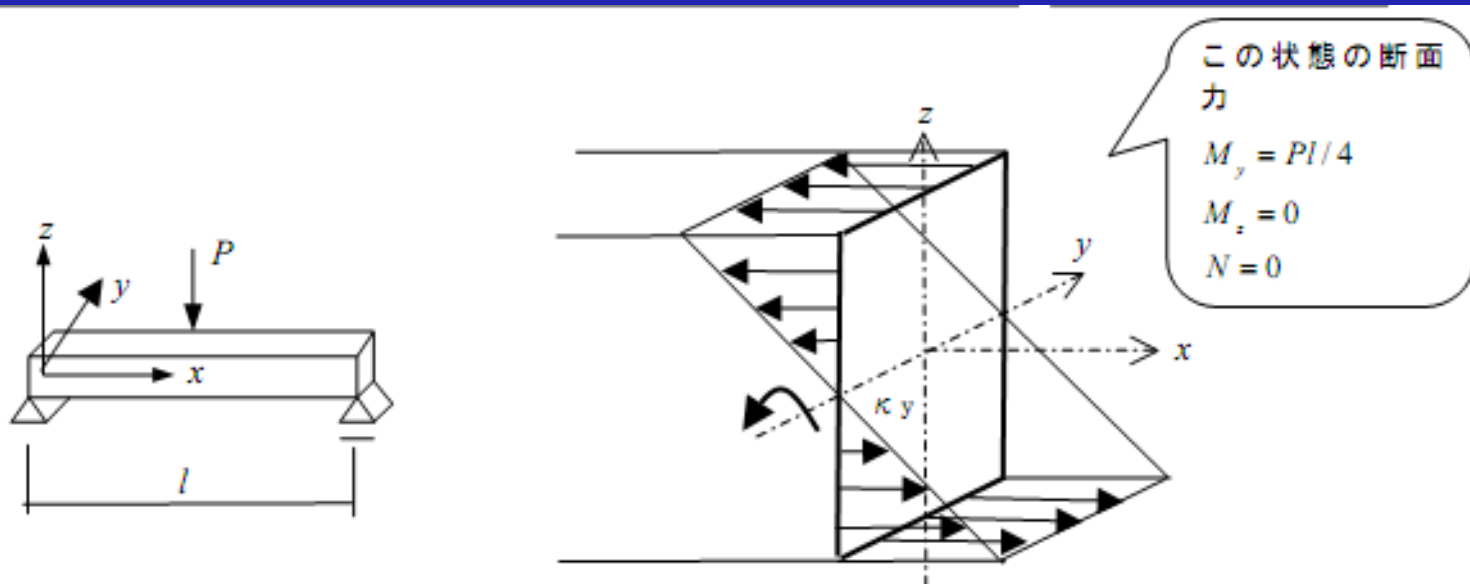


図 7-6 曲げモーメントによる断面内応力

1 軸(弱軸)の曲げを受ける断面内の応力分布

状態を考える。図のように z 軸が中立軸となり、軸方向応力は手前側が圧縮となり奥側が引張となる。

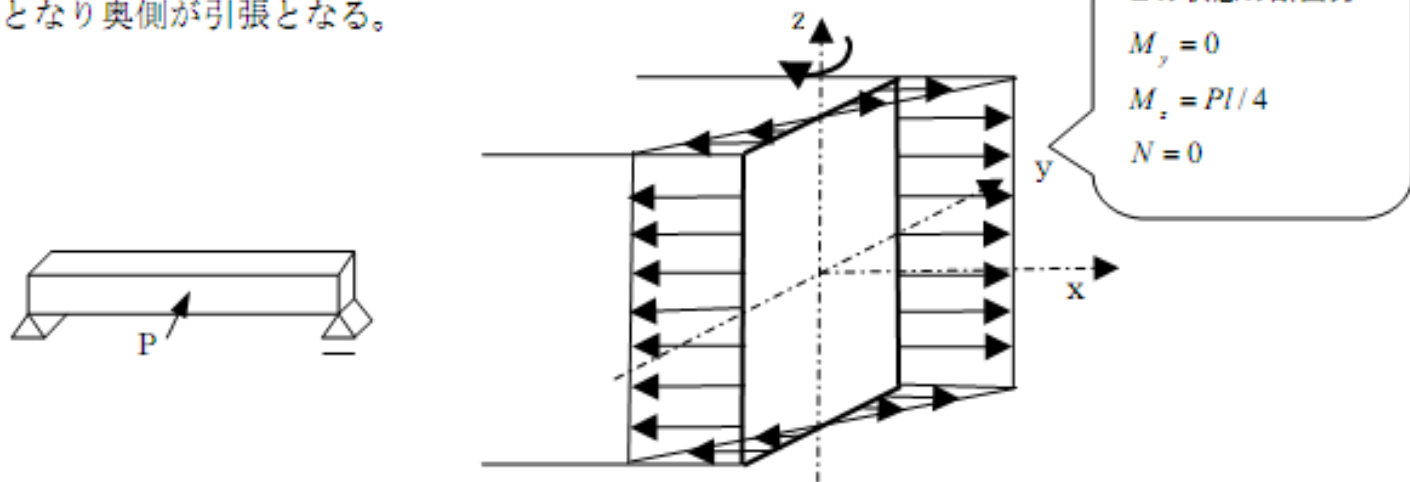
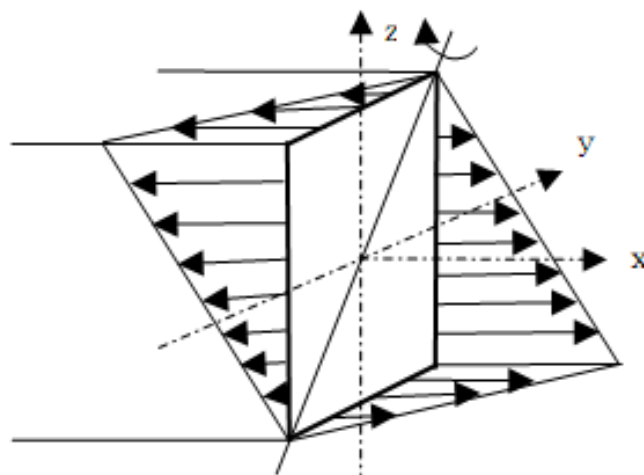


図 7-7 弱軸方向の曲げモーメントによる断面内応力

2軸曲げを受ける断面の応力分布

先の2つの単純梁はどちらも1軸応力状態であった。この2つの状態を足すと中立軸がずれ、下図のような状態となり2軸応力場となる。



この状態の断面力

$$M_y = Pl/4$$

$$M_z = Pl/4$$

$$N = 0$$

図 7-8 2軸の曲げモーメントによる断面内応力

軸力と2軸の曲げを受ける断面内の応力分布

さらに、単純梁に下図のような荷重を加えると、次図の応力場に図 7-8 の応力が足し合わされ、3 軸応力状態となり図 7-10 のようになる。

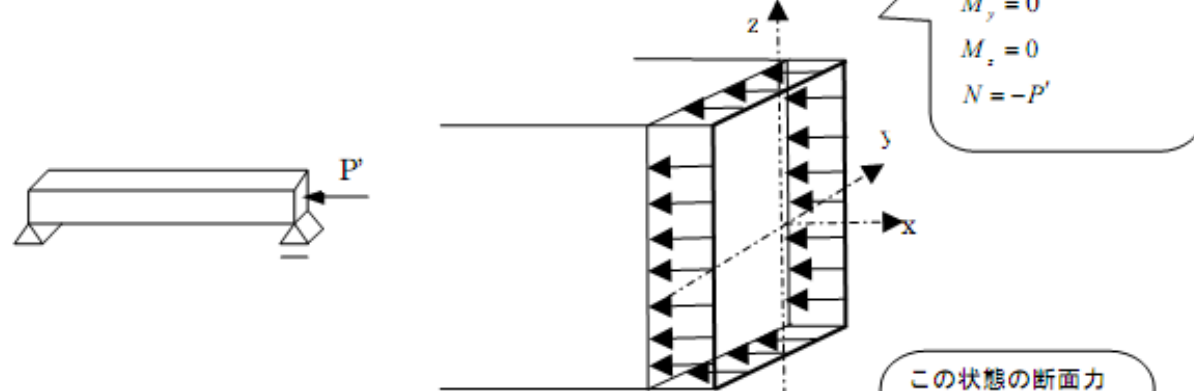


図 7-9 軸力による断面内応力

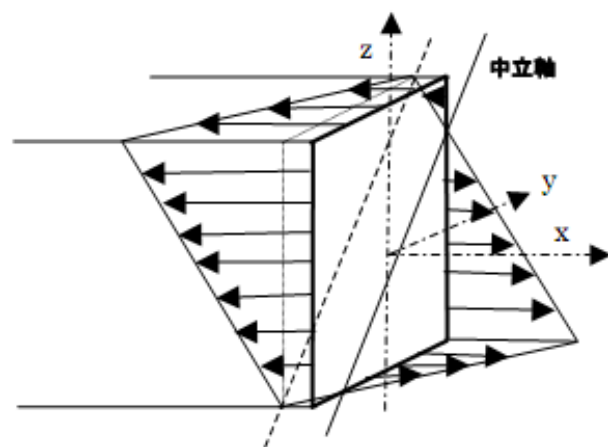
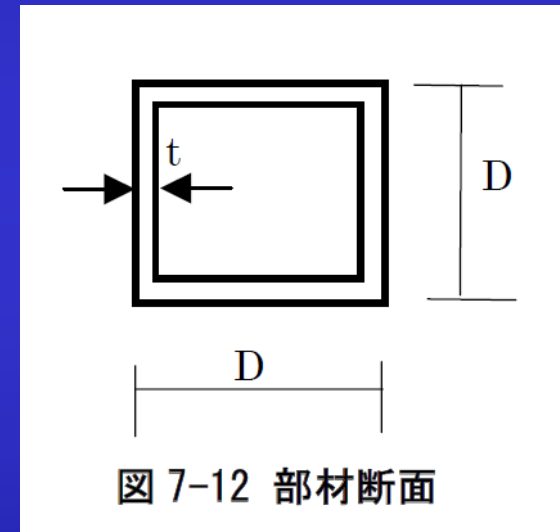
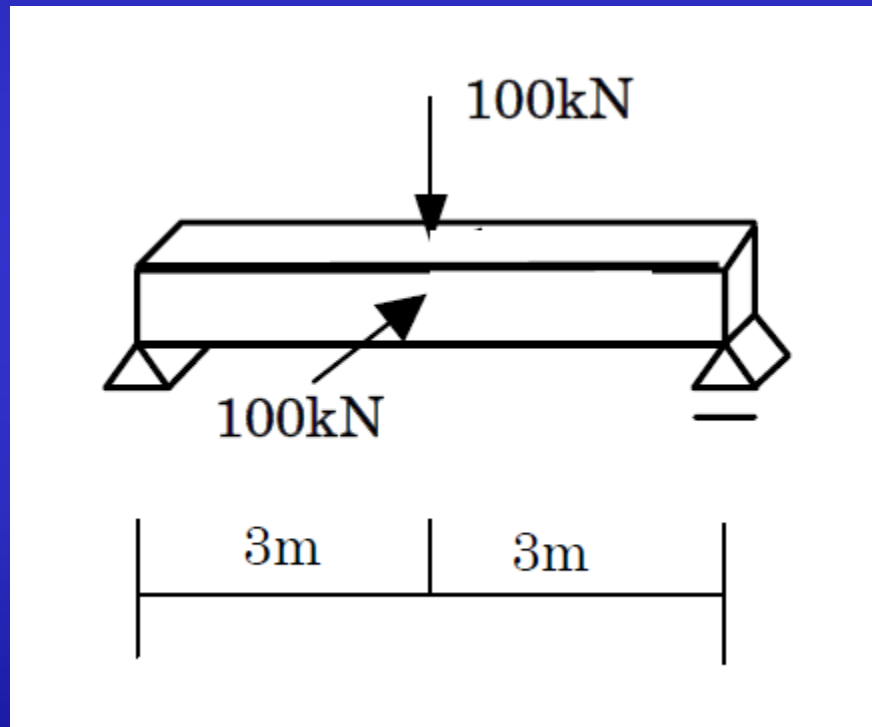


図 7-10 軸力と 2 次の曲げ
モーメントによる断面内
応力

例題7-1

次のように2軸の曲げを受ける単純梁の最大応力を求めよ。



例題7-1の答え

最初に、角型鋼管の断面性能を求める。

$$D = 40\text{cm}; \quad t = 1.2\text{cm}$$

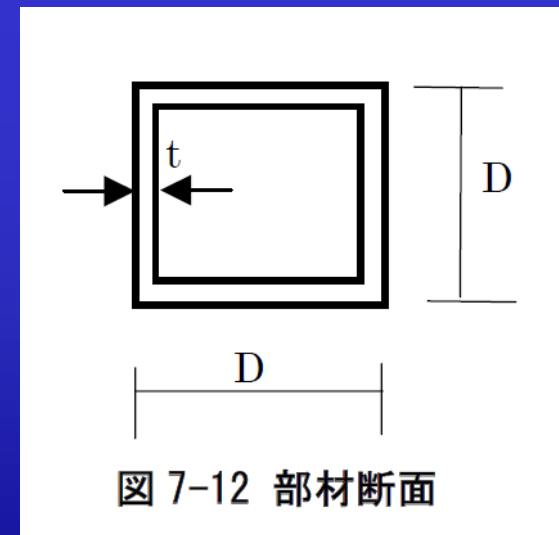
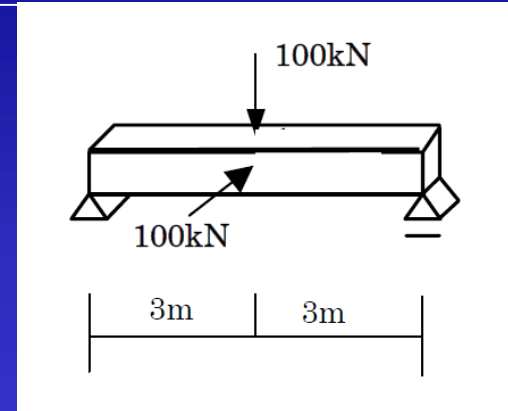
$$A = D^2 - (D-2t)^2 = 40^2 - 37.6^2 = 186.24\text{cm}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{D^4}{12} - \frac{(D-2t)^4}{12} = \frac{40^4}{12} - \frac{37.6^4}{12} = 0.4677 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{0.4677 \times 10^5}{20} = 2339\text{cm}^3$$

単純梁の最大曲げモーメントは2軸とも次式で与えられる。

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = \frac{100 \cdot 600}{4} = 15000\text{kNcm}$$

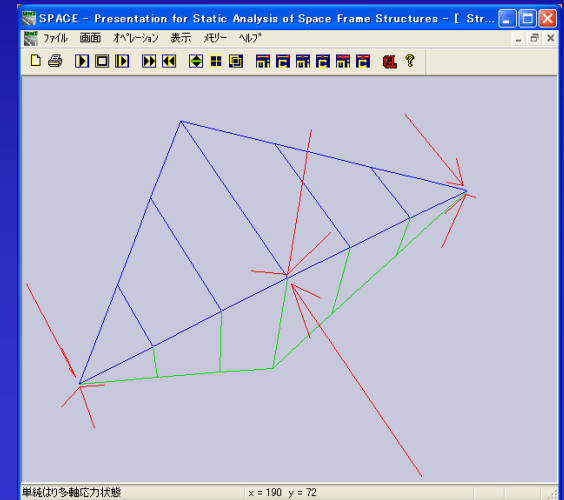
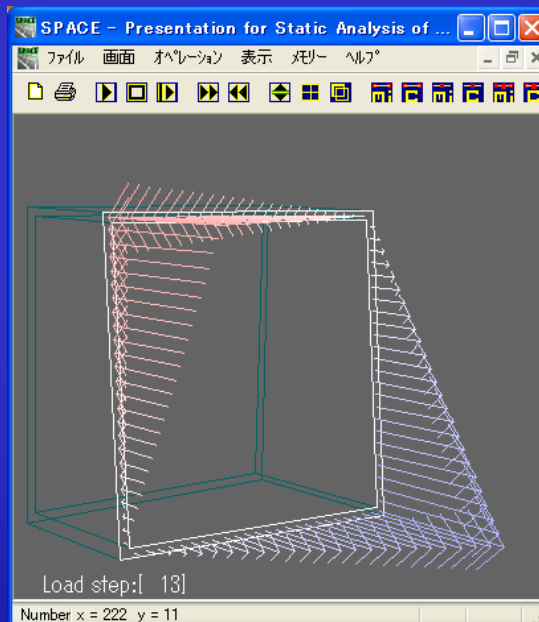
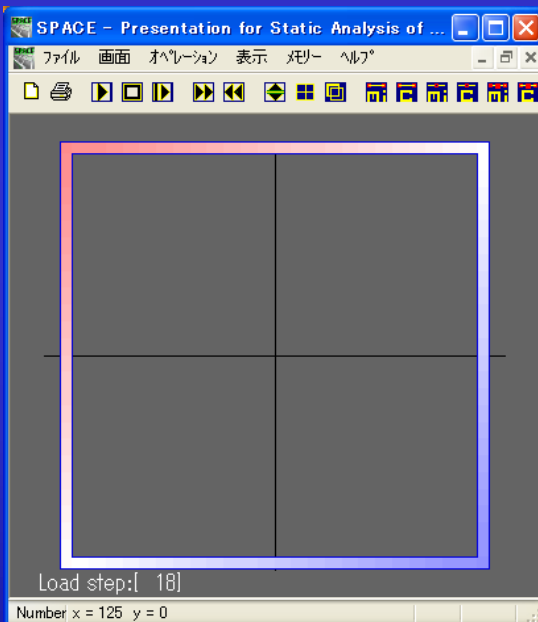


例題7-1の答え

断面内の最大応力は、部材中央で、断面の両隅に

$$\sigma_{t_max} = \frac{M_y}{Z_t} + \frac{M_z}{Z_t} = \frac{15000}{2339} + \frac{15000}{2339} = 12.83 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{c_max} = -\frac{M_y}{Z_c} - \frac{M_z}{Z_c} = -\frac{15000}{2339} - \frac{15000}{2339} = -12.83 \text{ kN/cm}^2$$

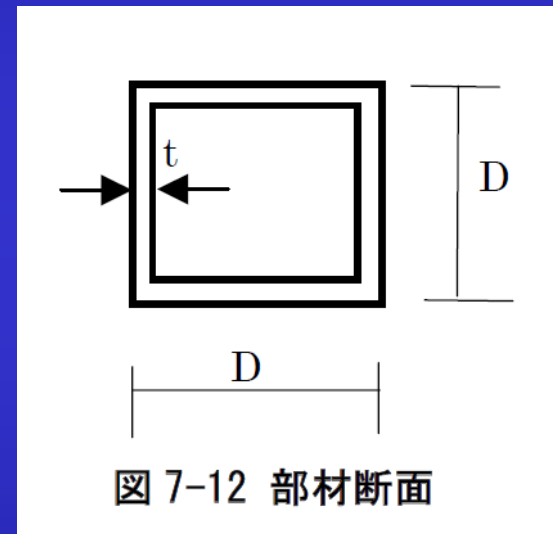
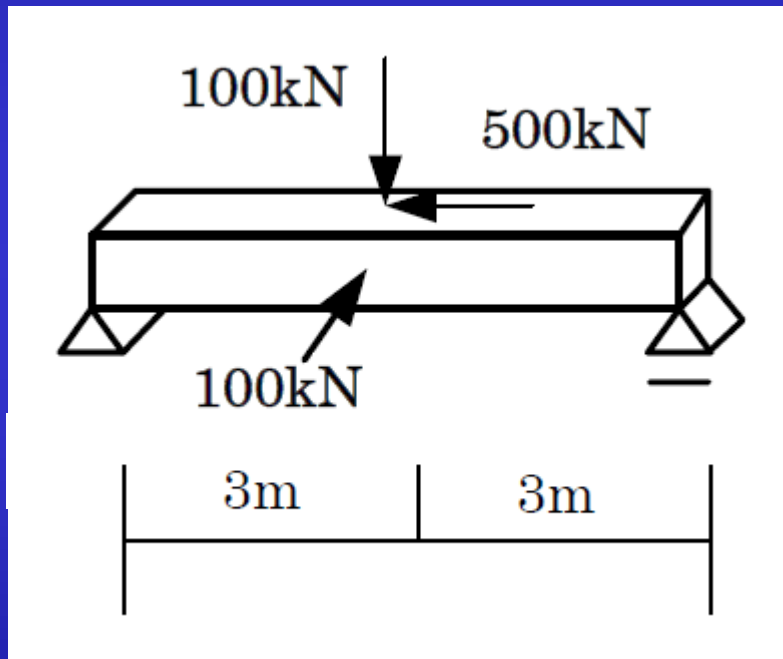


部材中央における断面内2軸応力状態を上図に示す。右図は中央部で切断した断面で、上図骨組の向う側からこちら側を見た図である。、

断面左上が最大圧縮応力、右下が最大引張応力状態となっている。同図より中立軸が断面右上角から左下角部分に現れていることが良く理解できる

例題7-2

軸力と2次句の曲げを受ける単純梁の最大応力を求めよ。



例題7-2の答え

最初に、角型鋼管の断面性能を求める。

$$D = 40\text{cm}; \quad t = 1.2\text{cm}$$

$$A = D^2 - (D-2t)^2 = 40^2 - 37.6^2 = 186.24\text{cm}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{D^4}{12} - \frac{(D-2t)^4}{12} = \frac{40^4}{12} - \frac{37.6^4}{12} = 0.4677 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

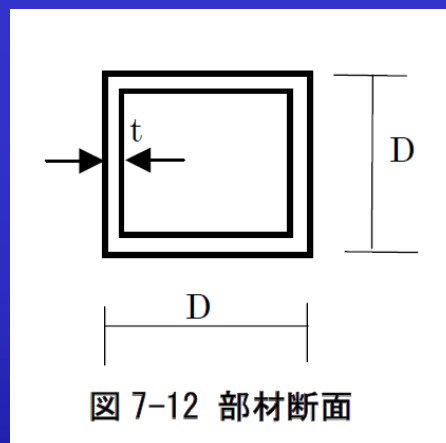
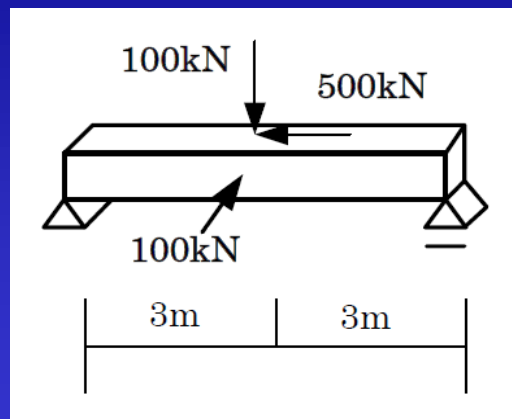
$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{0.4677 \times 10^5}{20} = 2339\text{cm}^3$$

単純梁の最大曲げモーメントは2軸とも次式で与えられる。

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = \frac{100 \cdot 600}{4} = 15000\text{kNcm}$$

圧縮力は、

$$N_{\max} = -500\text{kN}$$

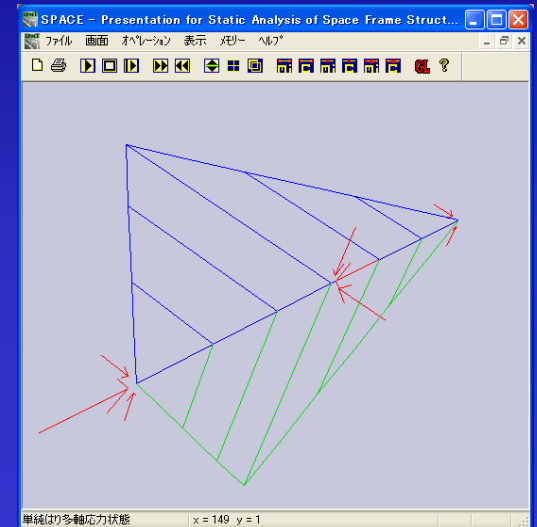
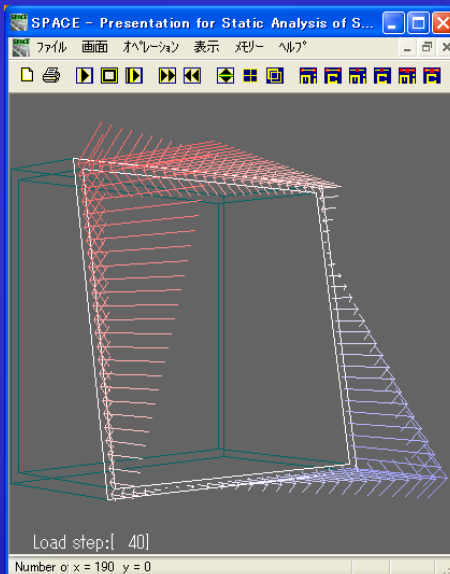
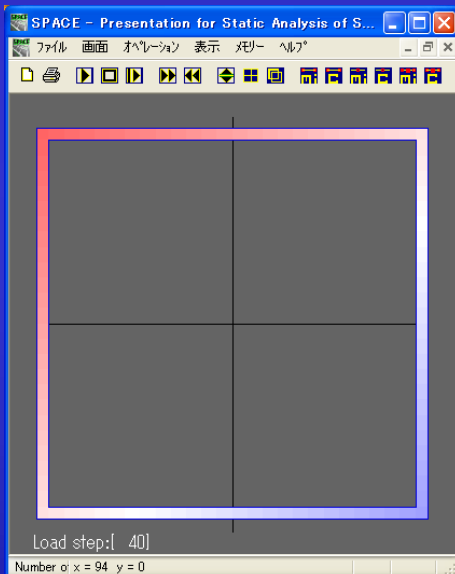


例題7-2の答え

断面内の最大応力は、部材中央で、断面の両隅に

$$\sigma_{t_max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{Z_t} + \frac{M_z}{Z_t} = -\frac{500}{186.24} + \frac{15000}{2339} + \frac{15000}{2339} = 10.15 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{c_max} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{Z_c} - \frac{M_z}{Z_c} = -\frac{500}{186.24} - \frac{15000}{2339} - \frac{15000}{2339} = -15.51 \text{ kN/cm}^2$$

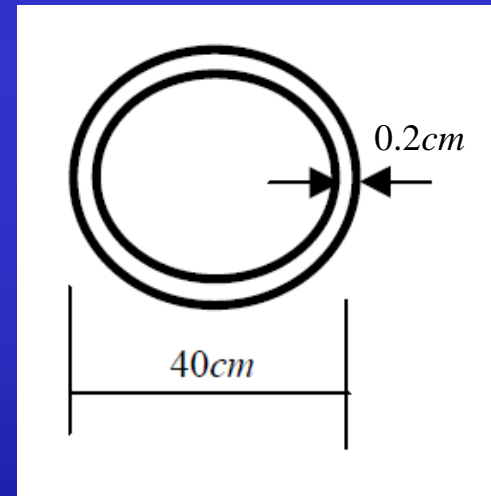
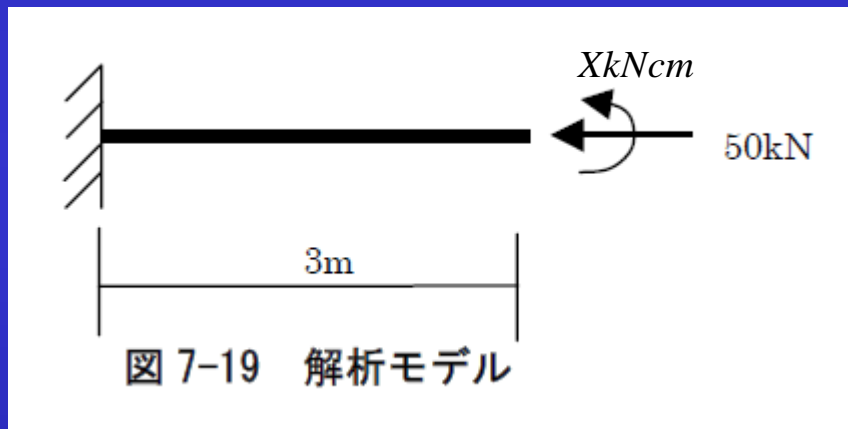


断面左上が最大圧縮応力、右下が最大引張応力状態となっている。同図より中立軸が断面右上から左下部分に現れているが、前例とは異なり、中立軸は角部分より少し下がった位置に生じている。

部材中央における断面内2軸応力状態を上図に示す。右図は中央部で切断した断面で、上図骨組の向う側からこちら側を見た図である。

例題7-3

下に示す片持ち梁に軸力が50kN加わっている。さらに曲げ荷重が先端に加わるとする。その際、曲げ荷重がいくらになった時断面内に引張応力が発生するか求めよ。断面は、下に示す薄肉鋼管とする。薄肉鋼管の断面は、半径 $R=20\text{cm}$; $t=0.2\text{cm}$ とする。



例題7-3

薄肉鋼管の断面核は、半径の1/2であり、この断面では、10cmとなる。従って、

$$X = P \cdot \alpha = 50 \cdot 10 = 500 \text{ kNcm}$$

実際に、軸力が50kNで曲げモーメントが500kNcmの最大・最小軸方向応力を求める。

薄肉鋼管の断面特性を計算する。()内の値は薄肉鋼管の略算式

$$R = 20 \text{ cm}; \quad t = 0.2 \text{ cm}$$

$$A = \pi(R^2 - (R-t)^2) = 3.1415(20^2 - 19.8^2) = 25.00 \text{ cm}^2$$

$$(A = 2\pi R t = 2 \cdot 3.1415 \cdot 20 \cdot 0.2 = 25.13 \text{ cm}^2)$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{(R-t)^4}{4} = \frac{3.1415}{4} (20^4 - 19.8^4) = 4952 \text{ cm}^4$$

$$(I_y = I_z = \pi R^3 t = 3.1415 \cdot 20^3 \cdot 0.2 = 5026.4 \text{ cm}^4)$$

$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{4952}{20} = 247.6 \text{ cm}^3$$

$$(Z_c = Z_t = \frac{5026.4}{20} = 251.32)$$

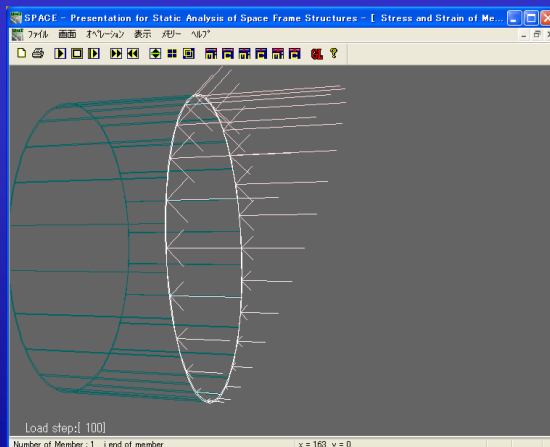
例題7-3

実際に、軸力が50kNで曲げモーメントが500kNcmの最大・最小軸方向応力を具体的に求める。

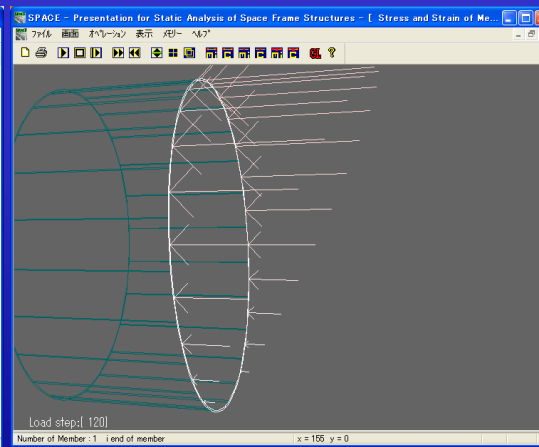
$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = -\frac{50}{25} + \frac{500}{247.5} = -0.02 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_t} = -\frac{50}{25} - \frac{500}{247.5} = 4.02 \text{ kN/cm}^2$$

$$(\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = -\frac{50}{25.13} + \frac{500}{25.13} = 0 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_t} = -\frac{50}{25.13} - \frac{500}{25.13} = 3.98 \text{ kN/cm}^2)$$

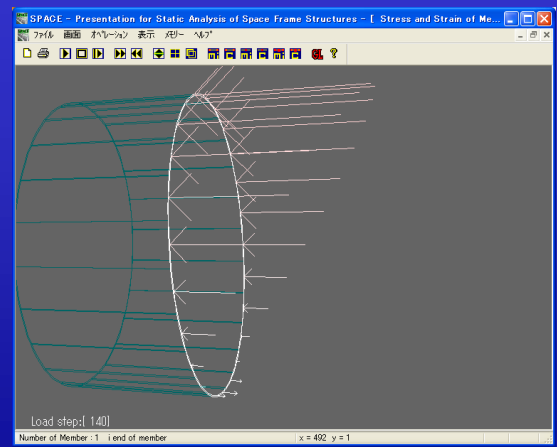
N = 50kN ; M = 400kNcm



N = 50kN ; M = 500kNcm



N = 50kN ; M = 600kNcm



まとめ

- 1) 2方向曲げと軸力を受ける断面内の
応力分布
- 2) 断面の核
- 3) 演習