

曲げを受ける部材の応力



構造力学 I

第2回講義内容

- 1) 曲げを受ける梁内部の応力状態を知る
- 2) 梁部材の応力とひずみ
- 3) 演習
- 4) まとめ

軸方向ひずみの復習

長さ l の棒が引っ張られて
 Δl だけ伸びたとすると、ひ
ずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \frac{(l + \Delta l) - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

実際のひずみの定義は、長
さ l を無限小にとる

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

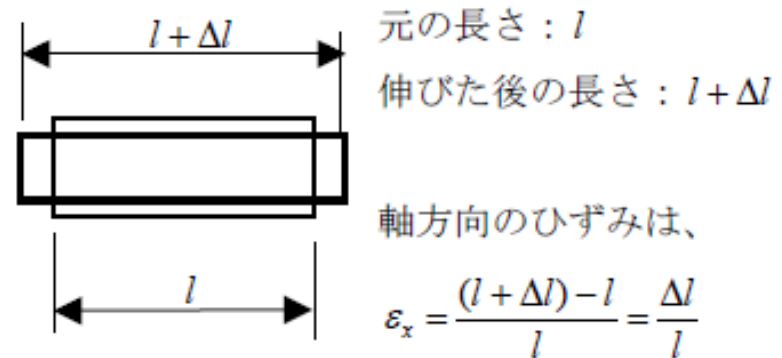
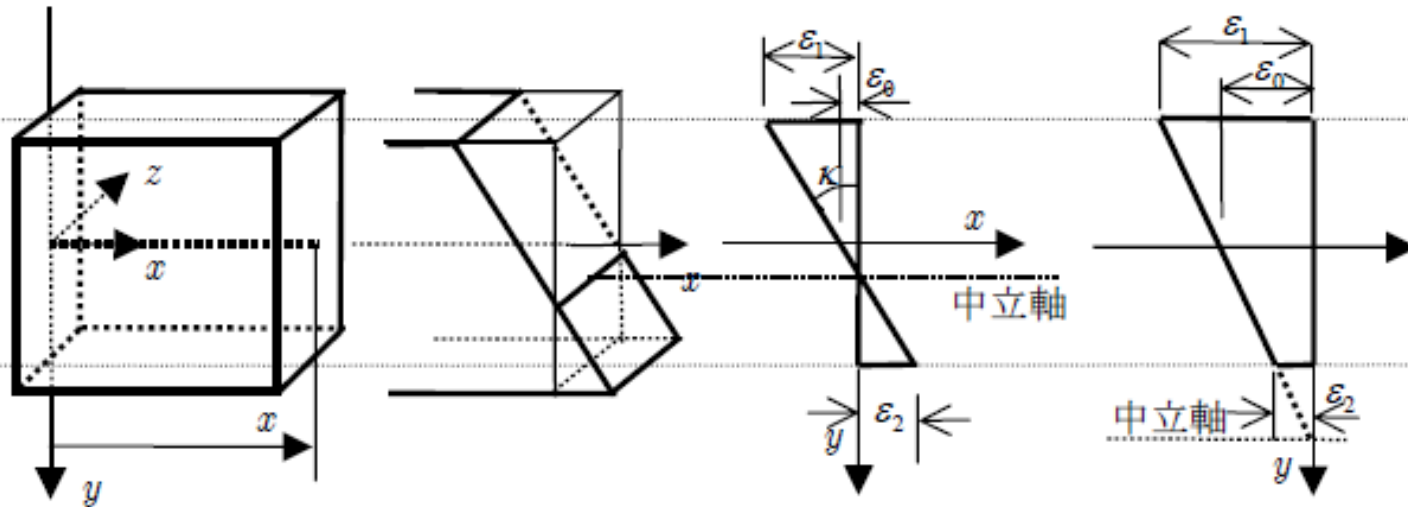


図 3-2 軸方向ひずみ

曲げを受ける梁内部のひずみ分布



(a) 梁内部のひずみ分布

(b) 中立軸が断面の外になる場合

図 3-4 軸力と曲げを同時に受ける梁断面内のひずみ

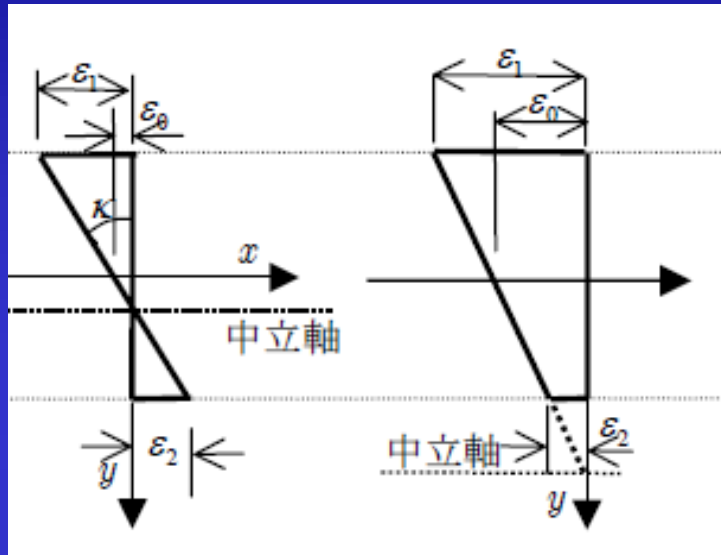
軸力と曲げを同時に受ける部材の断面内に生じるひずみ

梁理論でもっと重要な仮定である「平面保持」を用いる

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \kappa y$$

ひずみ分布を一次式に仮定

軸ひずみと曲げひずみ



断面内に生じる軸方向ひずみ

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \kappa y$$

ϵ_0 : 軸ひずみ

κy : 曲げひずみ

κ : 曲率

ひずみ分布は、梁幅方向には常に同じ値となり、定数 ϵ_0 は断面内に分布しているひずみの平均値を表す。上図で示すようなひずみ分布は、断面の両端で、圧縮ひずみと引張ひずみとに分かれており、そのため、断面内にひずみの生じない位置が存在する。これを中立軸という。

例題2-1

次に示す断面内のひずみ分布から、次式の係数 ε_0 と κ を求めよ。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa y$$

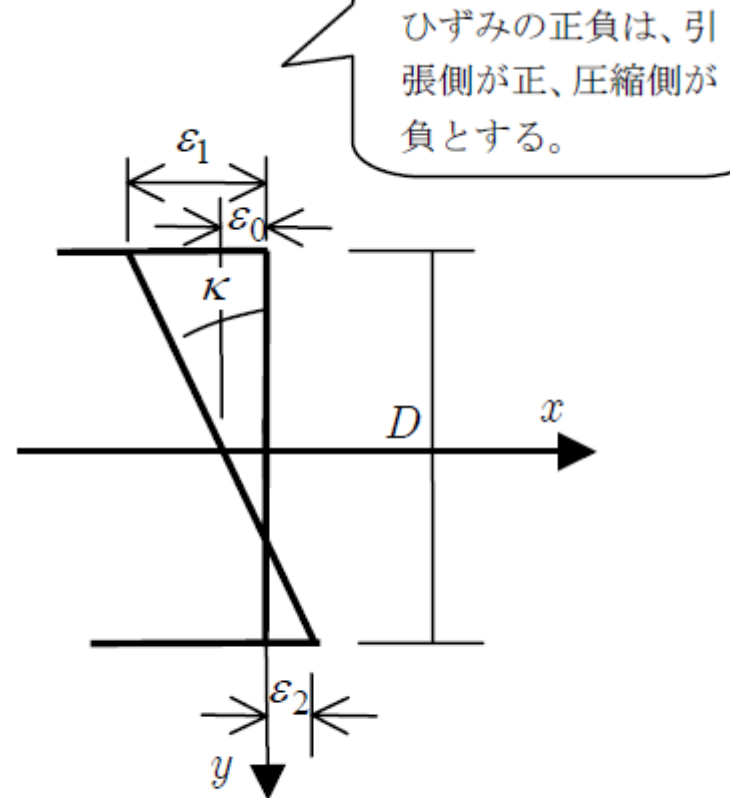


図 3-5 断面内のひずみ分布

例題2-1の答え

次に示す断面内のひずみ分布から、下式の係数 ε_0 と κ を求めよ。

ひずみの分布 $\varepsilon(y)$ は

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + \kappa y$$

であるから、断面縁部分の値を代入すると、

$$\varepsilon\left(-\frac{D}{2}\right) = \varepsilon_0 - \kappa \frac{D}{2} = \varepsilon_1;$$

$$\varepsilon\left(\frac{D}{2}\right) = \varepsilon_0 + \kappa \frac{D}{2} = \varepsilon_2$$

従って、各係数は、次式となる。

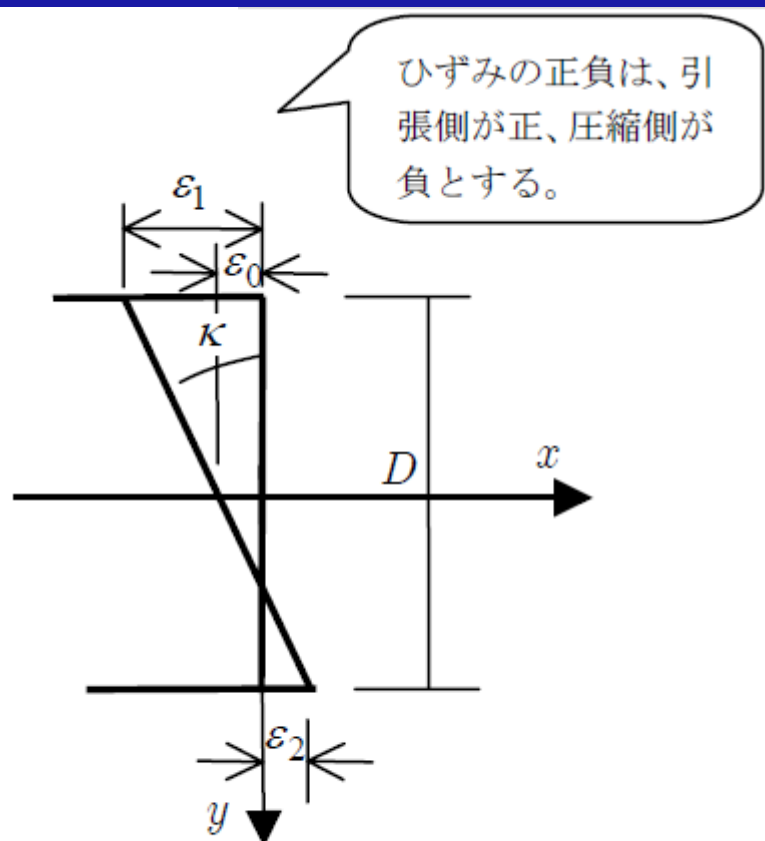
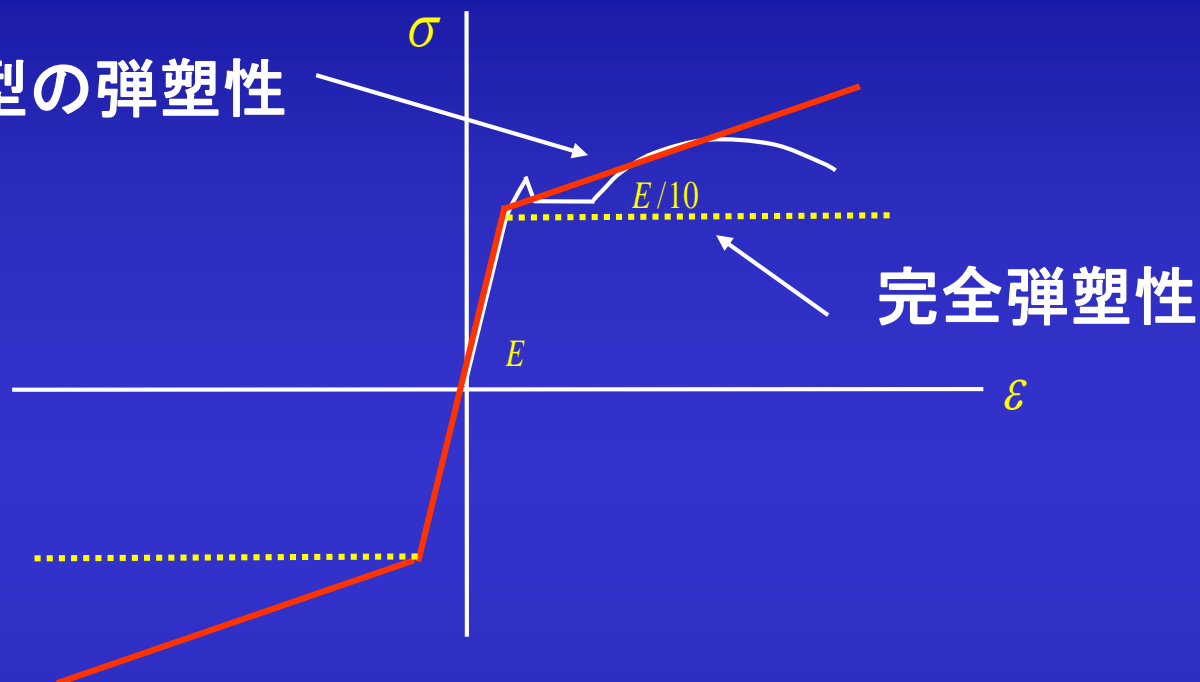


図 3-5 断面内のひずみ分布

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}; \quad \kappa = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{D}$$

応力とひずみの関係

バイリニア型の弾塑性



$$\sigma_X = E \varepsilon_X$$

弾性範囲の応力とひずみの関係

断面力である軸力と曲げモーメントの定義

弾性範囲の 応力とひず みの関係

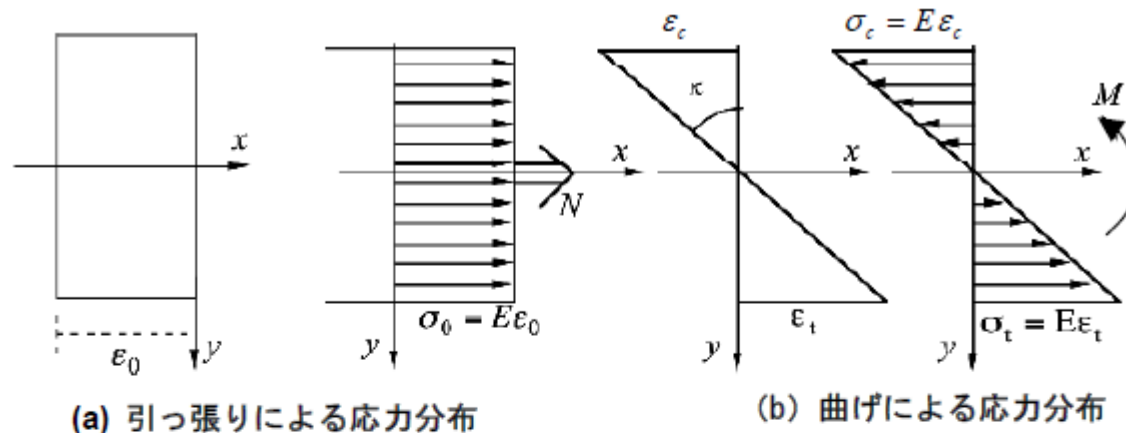


図 3-6 断面内のひずみ分布と応力分布

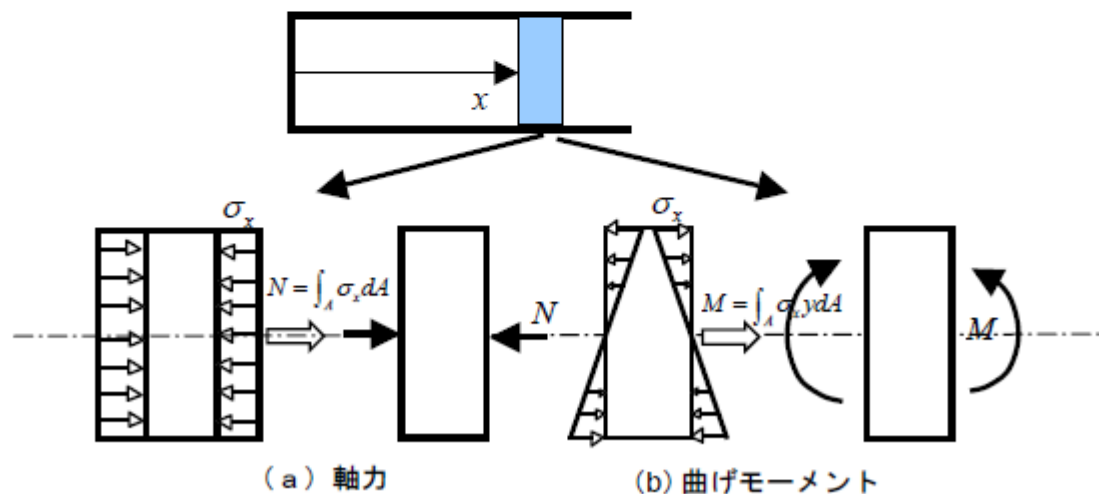


図 3-7 応力分布と断面力の定義

断面力である軸力と曲げモーメントの定義

ひずみの分布 $\varepsilon(y)$ は

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_0 + \kappa y$$

弾性範囲の応力とひずみの関係

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

断面力の定義

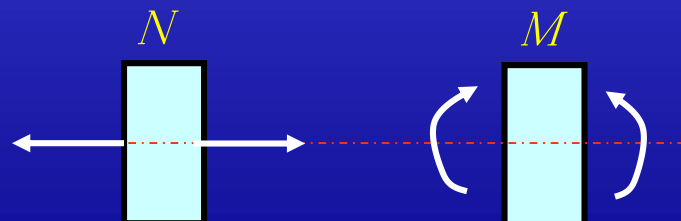
軸力

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

曲げモーメント

$$M = \int_A \sigma_x y dA$$

断面力の正負



引張が正

上の状態が正

断面力である軸力と曲げモーメントの計算

軸力の計算

$$N = \int_A \sigma_x dA = E(\varepsilon_0 \int_A dA + \kappa \int_A y dA)$$

ここで、

$$A = \int_A dA \quad \text{断面積}$$

$$S_z = \int_A y dA \quad \text{z軸に関する断面一次モーメント}$$

上式を用いると、
$$N = E(\varepsilon_0 A + \kappa S_z)$$

y軸の原点を移動することによって、モーメントがゼロとなる位置が存在するはずである。この位置を図芯という。この位置をy 軸の原点とすれば、断面一次モーメント S_z はゼロとなる。従って、

$$N = EA\varepsilon_0 = \sigma_0 A$$

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0$$

断面力である軸力と曲げモーメントの計算

曲げモーメントの計算

$$M = \int_A \sigma_x y dA = E(\varepsilon_0 \int_A y dA + \kappa \int_A y^2 dA)$$

ここで、

$$S_z = \int_A y dA \quad \text{z軸に関する断面一次モーメント}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad \text{z軸に関する断面二次モーメント}$$

上式を用いると、 $M = E(\varepsilon_0 S_z + \kappa I_z)$

y軸の原点を移動することによって、モーメントがゼロとなる位置が存在するはずである。この位置をy 軸の原点とすれば、断面一次モーメント S_z はゼロとなる。従って、

$$M = EI_z \kappa$$

軸力と曲げモーメントによる断面内の応力

曲げによって生じる軸方向応力 σ_b は、応力とひずみの関係式と曲げモーメントが軸方向ひずみ ε_0 に無関係であることを考慮すると、

$$\sigma_b(y) = E\varepsilon_x = E\kappa y$$

従って、軸力によって生じる応力 σ_0 と曲げモーメントによって生じる応力 σ_b は、

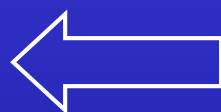
$$\sigma_0 = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_b = \frac{M}{I_z} y$$

$$N = EA\varepsilon_0 = \sigma_0 A$$

$$M = EI_z \kappa$$

$$E\kappa = \frac{M}{I_z}$$



従って、

$$\sigma_x = \sigma_0 + \sigma_b = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y$$

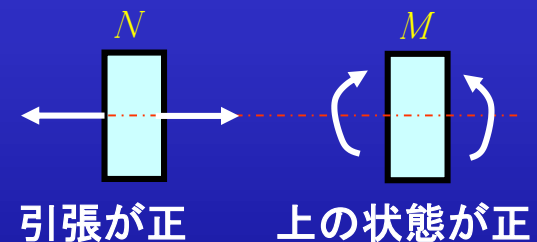
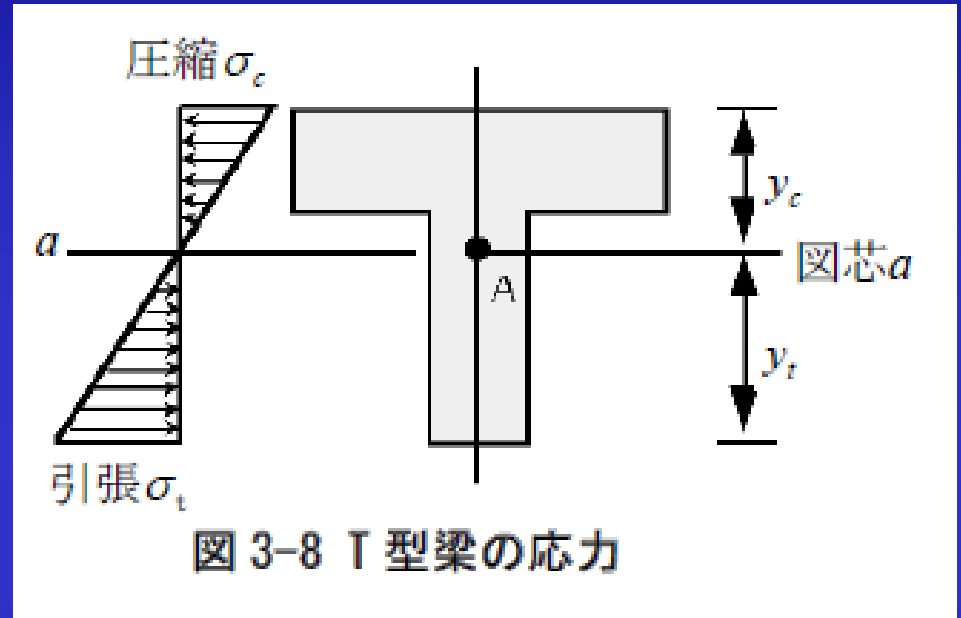
断面内に生じる最大応力

軸力と曲げモーメントが同時に加わる場合、断面内の応力分布は、

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y$$

応力分布が一次式であることから、応力が最大となる位置は断面の縁に発生する。この応力を**縁応力**と呼ぶ。図のような圧縮側と引張側の縁応力は、

$$\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y_c; \quad \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y_t$$



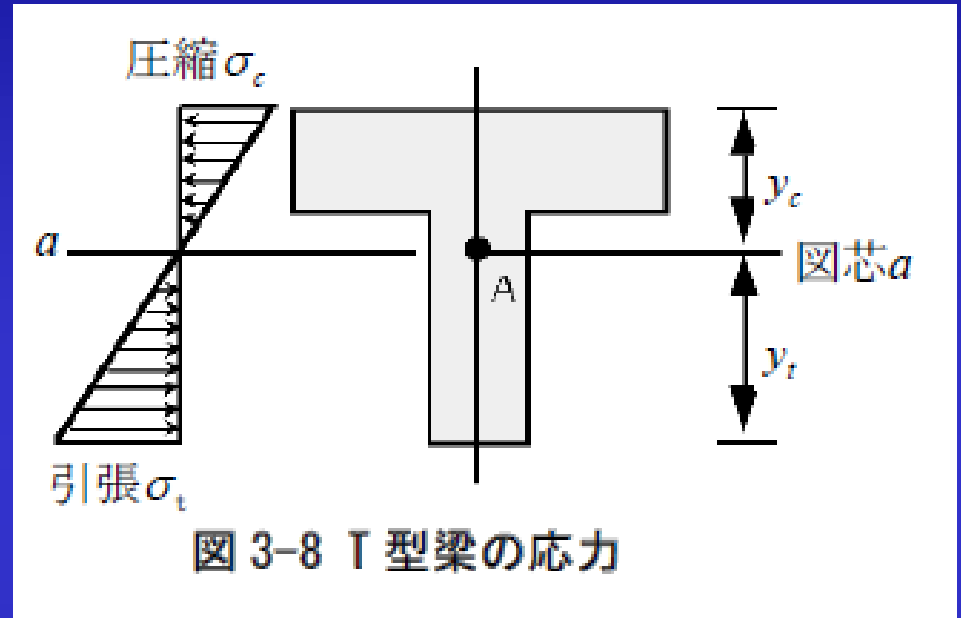
断面係数

$$\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$
$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}$$

断面係数

$$Z_c = \frac{I_z}{y_c}; \quad Z_t = \frac{I_z}{y_t}$$

軸力と曲げを受ける断面の最大応力

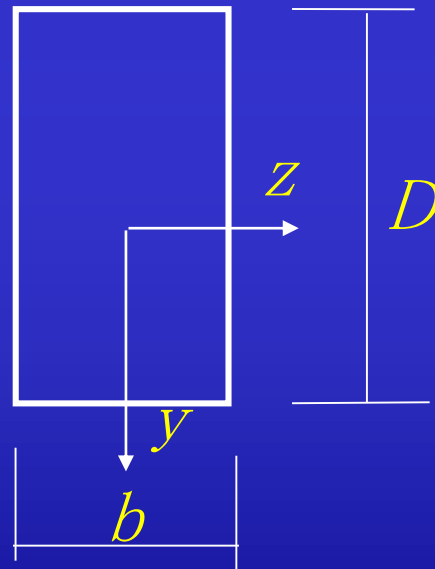


$$\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$
$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}$$

例題2-2

梁幅が b で、せいが D の長方形断面の断面性能を求めよ。
座標系は図芯位置である断面中央である。

断面積、断面一次モーメント、断面二次モーメント、断面係数



例題2-2の答え

梁幅が b で、せいが D の長方形断面の断面性能を求めよ。

$$A = \int_A dA = bD$$

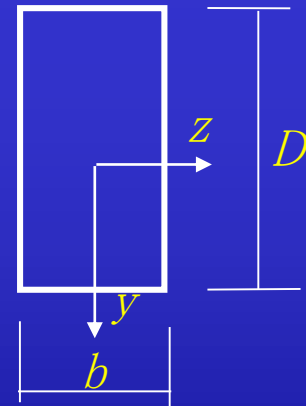
$$S_z = \int_A y dA = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} by dy = \left[\frac{1}{2} by^2 \right]_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = 0$$

$$S_y = \int_A z dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Dz dz = \left[\frac{1}{2} Dz^2 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0$$

断面二次モーメント

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} by^2 dy = \left[\frac{1}{3} by^3 \right]_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = \frac{bD^3}{12}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Dz^2 dz = \left[\frac{1}{3} Dz^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{b^3 D}{12}$$



例題2-2の答え

断面係数：圧縮側、引張側共に、図芯からの距離は

$$y_c = y_t = \frac{D}{2}; \quad z_c = z_t = \frac{b}{2}$$

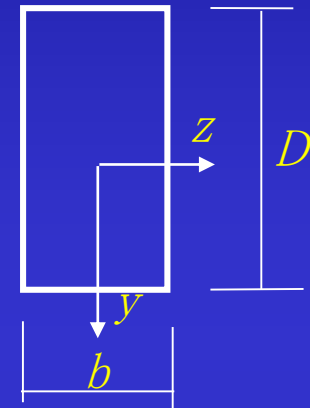
従って、断面係数は次式となる。

強軸の断面係数

$$Z_c = Z_t = \frac{I_z}{y_c} = \frac{bD^3}{12} / \frac{D}{2} = \frac{bD^2}{6}$$

弱軸の断面係数

$$Z_c = Z_t = \frac{I_y}{z_c} = \frac{b^3D}{12} / \frac{b}{2} = \frac{b^2D}{6}$$



例題2-3

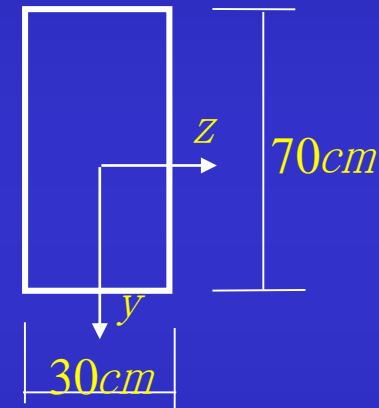
幅 30cm で、せいが 70cm の長方形断面に圧縮力 300kN と強軸方向に曲げモーメント 50kNm が加わっている。最大応力を求めよ。

各断面特性を計算する

$$A = 30 \cdot 70 = 2100\text{cm}^2$$

$$I_z = \frac{bD^3}{12} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} = 857500\text{cm}^4$$

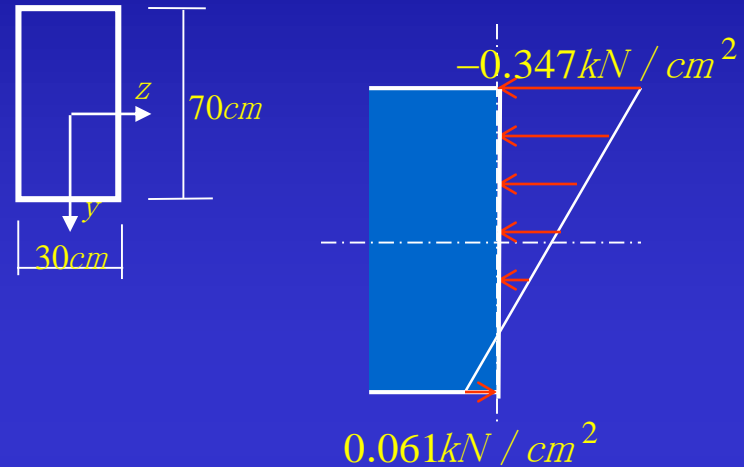
$$Z_t = Z_c = \frac{bD^2}{6} = \frac{30 \cdot 70^2}{6} = 24500\text{cm}^3$$



例題2-3の答え

断面の生じる最大応力は、

$$\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c}$$
$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t}$$



で与えられ、上式に圧縮力300kNと曲げモーメント50kNmを代入すると、

$$\sigma_c = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_c} = \frac{-300}{2100} - \frac{50 \cdot 100}{24500} = -0.143 - 0.204 = -0.347 \text{ kN} / \text{cm}^2$$
$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = \frac{-300}{2100} + \frac{500 \cdot 100}{24500} = -0.143 + 0.204 = 0.061 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

まとめ

曲げを受ける部材の断面特性を求めた。

- 1: 断面積
- 2: 断面一次モーメント → 図心位置の計算
- 3: 断面二次モーメント → 曲げに対する断面剛性
- 4: 断面係数 → 曲げを受ける断面内の最大応力を求める