

断面性能を知る



構造力学 I

第3回講義内容

- 1) 断面性能を具体的に計算して求める
- 2) 断面性能の特徴を知る
- 3) 演習
- 4) まとめ

断面一次モーメントと図芯

2つの座標系

1) 原点G y-z座標系(図芯)

2) 原点O Y-Z座標系

図芯の定義：断面一次モーメントがゼロとなる座標系の原点

図芯位置における両軸に関する断面一次モーメントは、

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A z dA$$

両座標系の関係は、図より

$$y = Y - Y_0$$

$$z = Z - Z_0$$

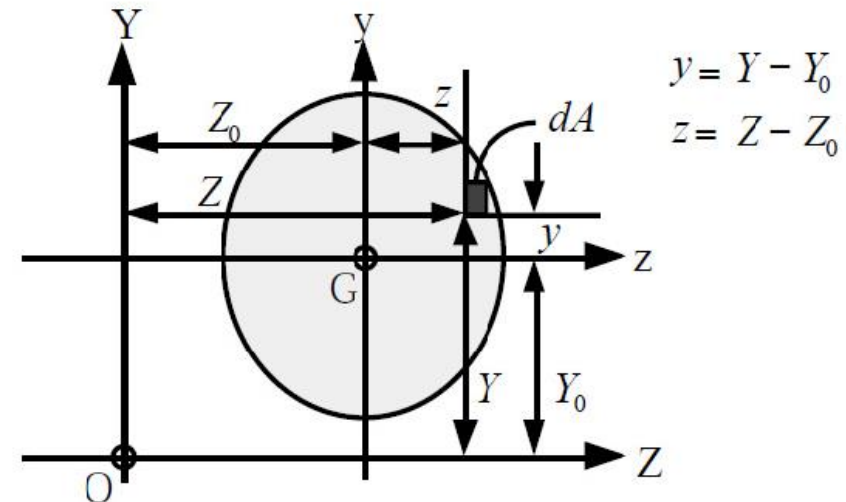


図 4-1 断面の図芯位置

断面一次モーメントと図芯

$$S_z = \int_A (Y - Y_0) dA = \int_A Y dA - Y_0 \int_A dA = S_Z - Y_0 A$$

$$S_y = \int_A (Z - Z_0) dA = \int_A Z dA - Z_0 \int_A dA = S_Y - Z_0 A$$

S_z, S_y は図芯位置の両軸に関する断面一次モーメントであることから、

$$S_z - Y_0 A = 0$$

$$S_y - Z_0 A = 0$$

従って、図芯位置は、

$$Y_0 = \frac{S_Z}{A}; \quad Z_0 = \frac{S_Y}{A}$$

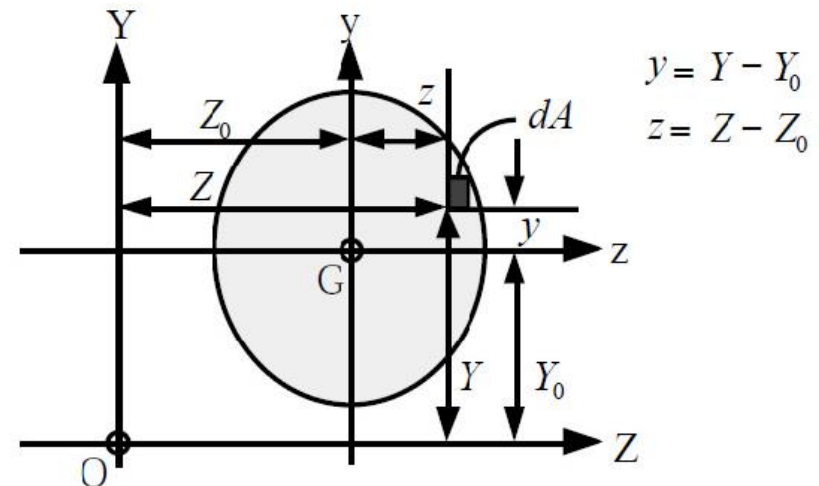
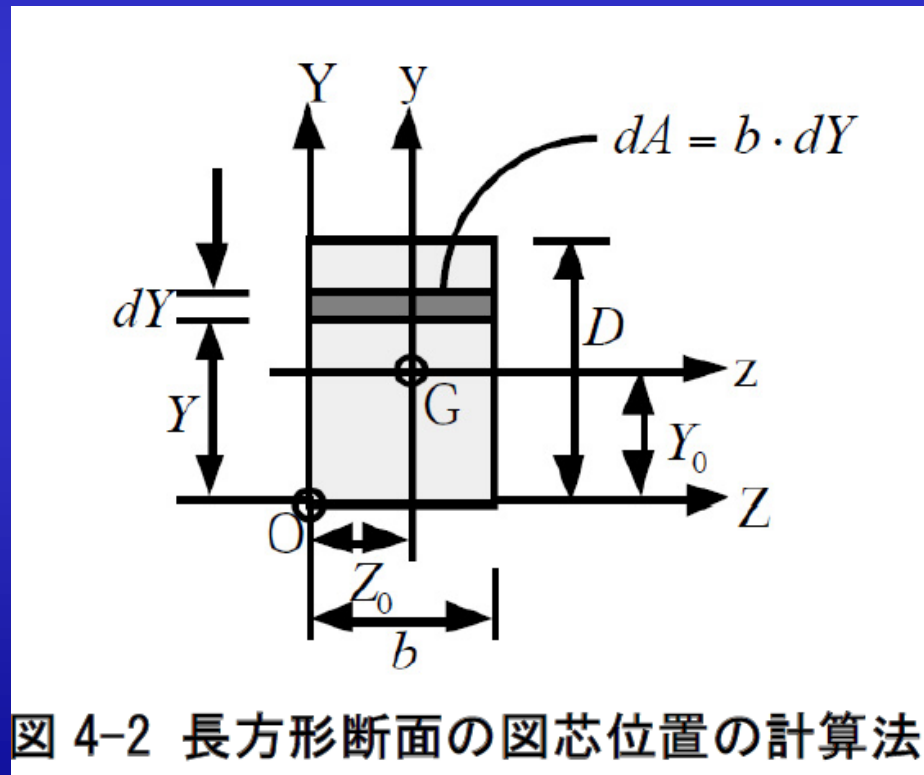


図 4-1 断面の図芯位置

例題3-1

幅 b で、せいが D の長方形断面の図心位置を求めよ。

図のように、座標原点を O とする断面積と断面一次モーメントから、 Y_0 と Z_0 を求めよ。



例題3-1の答え

幅 b で、せいが D の長方形断面の図心位置を求めよ。

座標原点を O とする断面積と断面一次モーメントは、

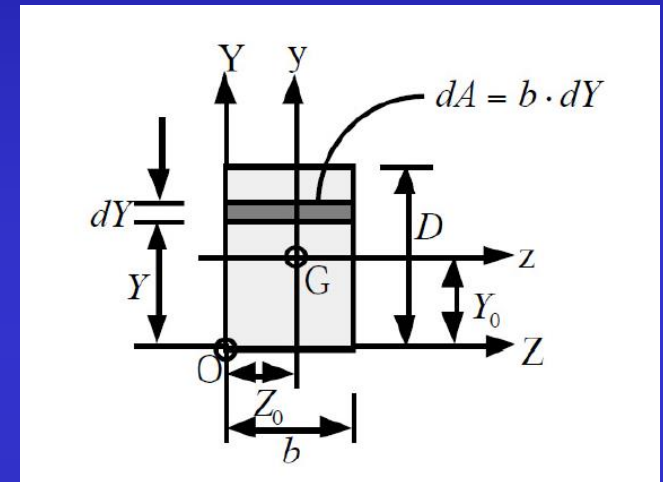
$$A = \int_A dA = bD$$

$$S_Z = \int_A Y dA = \int_0^D bY dY = \left[\frac{1}{2} bY^2 \right]_0^D = \frac{bD^2}{2}$$

$$S_Y = \frac{b^2 D}{2}$$

従って、図心位置は、

$$Y_o = \frac{S_Z}{A} = \frac{bD^2}{2} / bD = \frac{D}{2}; \quad Z_o = \frac{S_Y}{A} = \frac{b^2 D}{2} / bD = \frac{b}{2}$$



断面二次モーメントと特性

断面二次モーメントは、ヤング係数とともに、梁部材の曲げにくさ(剛性)を示す値である。梁部材が曲げ易いか曲げにくいかは、まず使用する材料によって決まる。断面の形状によっても曲げ剛性は影響を受ける。これが断面二次モーメントである。同じ断面積であるなら、当然断面二次モーメントが大きい形状が有利である。

図芯位置での断面二次モーメントは

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

である。定義式から見ると断面二次モーメントは、微小断面に距離の2乗を掛けた値を寄せ集めたものである。従って、断面二次モーメントが大きくなるためには、図芯位置の近くに断面が少なく、遠い所により多くの断面が存在すると良い。

断面二次モーメントと特性

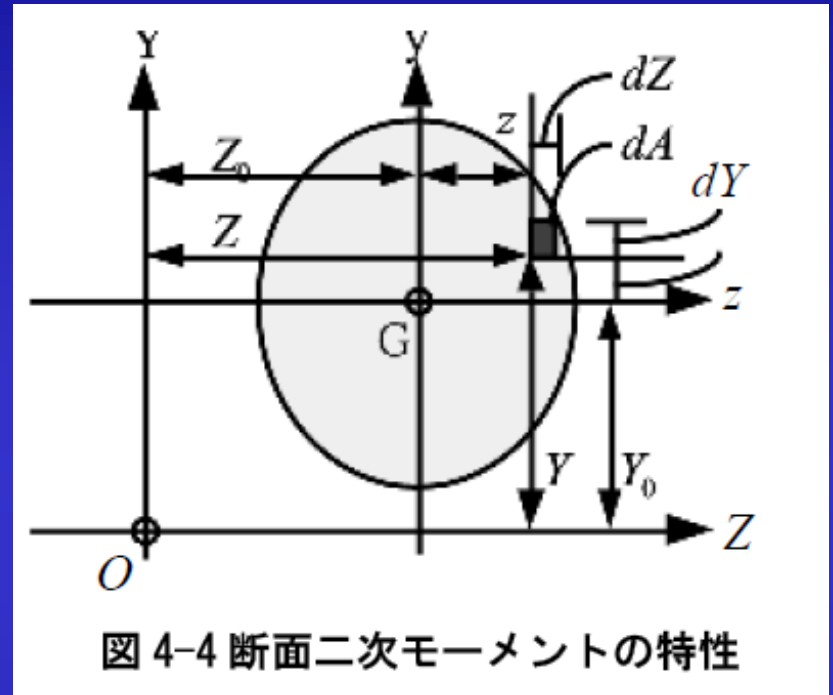
図4-4 に示すように、2つの座標系を考える。座標系 $y-z$ は図心位置に原点 G があり、また、座標系 $Y-Z$ は任意の位置に原点が存在する座標系 O とする。2つの座標系の関係は次式に示されている。

$$y = Y - Y_0$$

$$z = Z - Z_0$$

ここで、 Z 軸に関する断面二次モーメントは、上式を考慮すると、以下の式となる。

$$I_Z = \int_A (y + Y_0)^2 dA$$

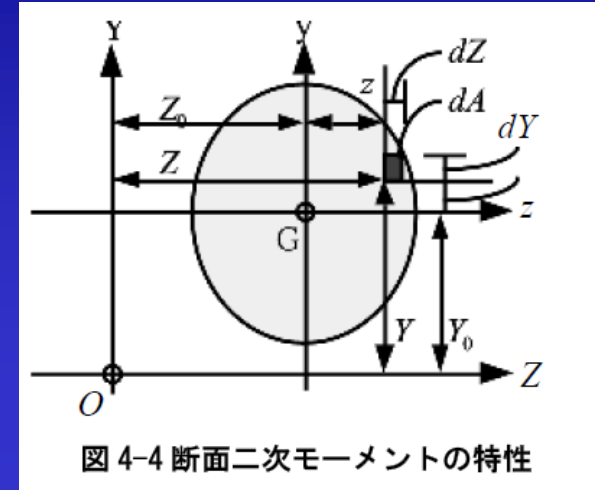


断面二次モーメントと特性

$$\begin{aligned} I_Z &= \int_A (y + Y_0)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2Y_0 \int_A y dA + Y_0^2 \int_A dA \end{aligned}$$

第1項は y 軸に関する断面二次モーメント I_z 、第2項は同じく断面一次モーメント、第3項は断面積 A を表す。図心位置での断面一次モーメントは定義よりゼロであり、従って、任意位置における断面二次モーメント I_Z は、

$$I_Z = I_z + Y_0^2 A$$



- 1) 図心位置の断面二次モーメントは最小値
- 2) 任意位置の断面二次モーメントは上式によって容易に求められる。

断面極二次モーメントはねじり剛性に関係

図4-5に示すように図芯位置から距離 r に存在する微小断面の二次モーメントを、次式で示すように全断面について寄せ集めたものを、断面極二次モーメントという。

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

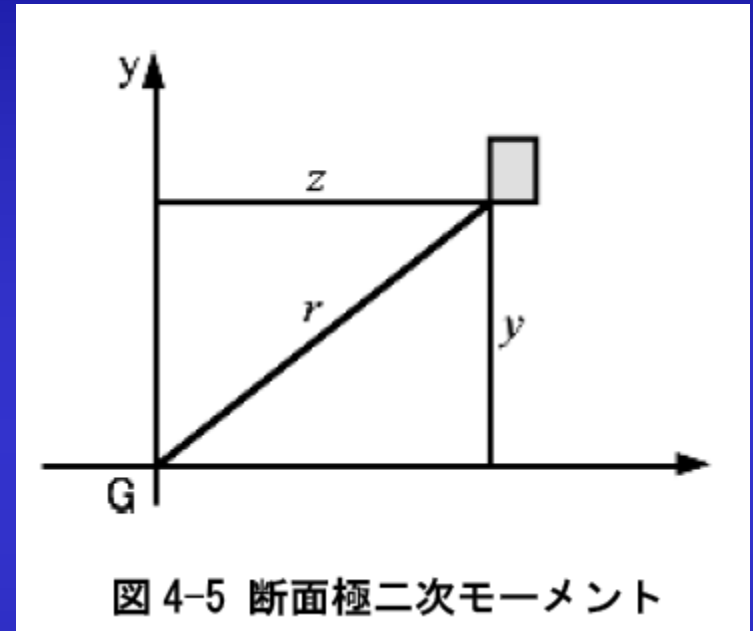
距離 r は、図に示されるように、

$$r^2 = y^2 + z^2$$

上式を断面極二次モーメントに代入し、整理すると

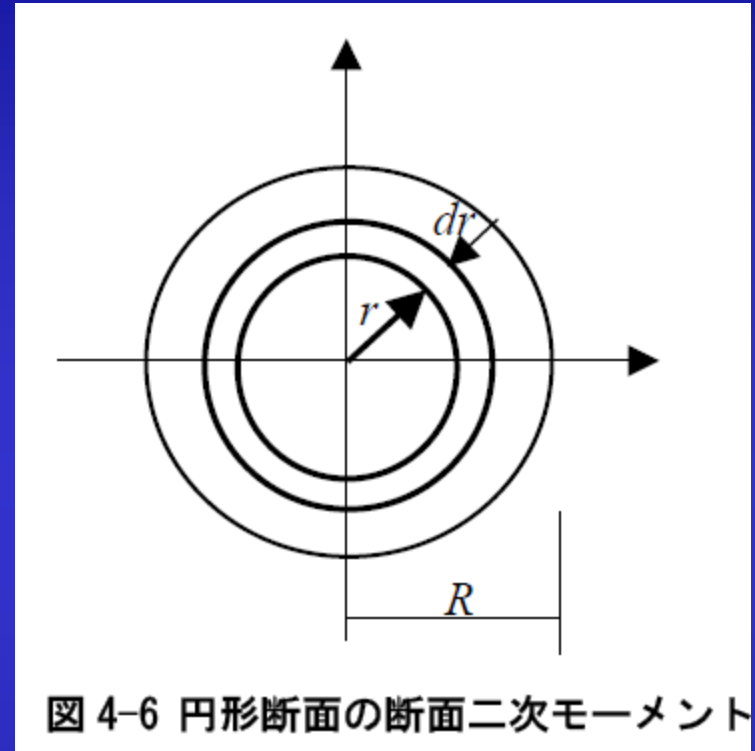
$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_y + I_z$$

断面極二次モーメントと断面二次モーメントの関係が得られる。



例題3-2

次に示す半径 R の円形断面の
断面二次モーメントを求めよ。



例題3-2の答え

次に示す半径 R の円形断面の断面二次モーメントを求めよ。

中心位置から距離 r にある微小断面は、図を参照すると

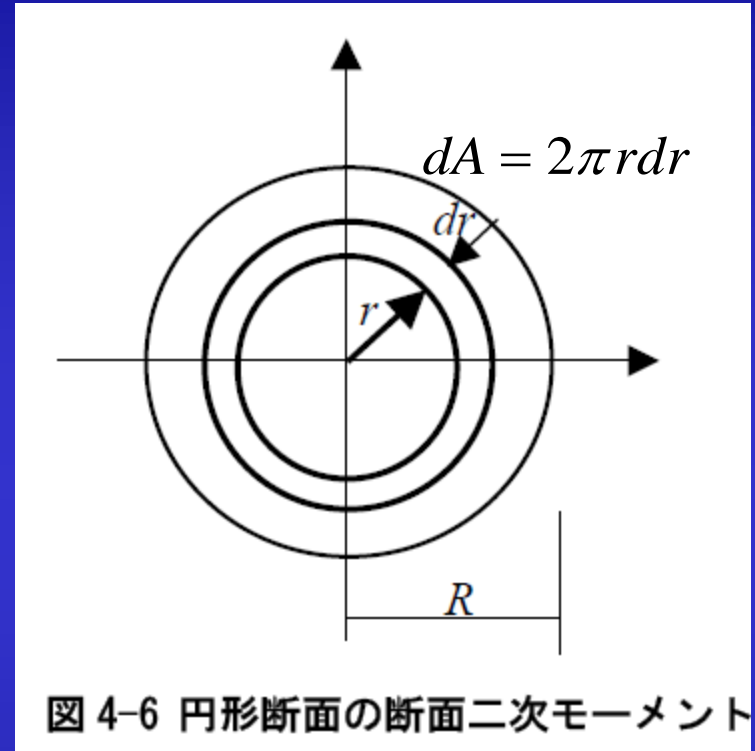
$$dA = 2\pi r dr$$

断面極二次モーメントは、以下のように計算される。

$$I_p = \int_0^R 2\pi r \cdot r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

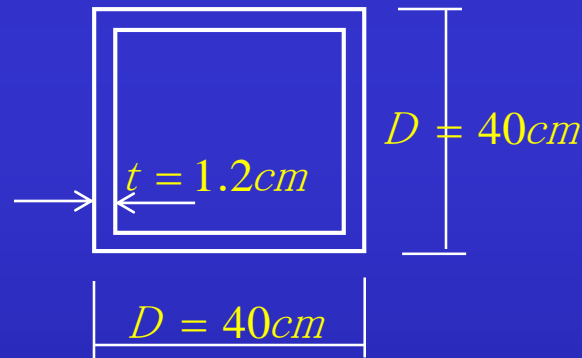
円形断面では、 I_y と I_z は同じ値であることから、前記の関係をを用いると断面二次モーメントは次式となる。

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$



例題3-3

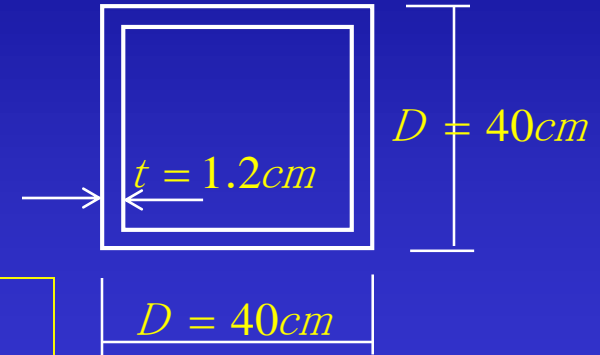
図に示す角型鋼管に圧縮力500kN、曲げモーメント200kNmが加わっている。最大応力を求めよ。
この角型鋼管は断面に強弱がないため、柱に使用される場合が多い。



角型鋼管

例題3-3の答え

図に示す角型鋼管に圧縮力500kN、
曲げモーメント200kNmが加わっている。
最大応力を求めよ。



角型鋼管

角型鋼管の断面性能を求める。

この断面は、対称断面であることから、ひとつの方向の特性を求めればよい。断面特性は、外側の矩形から内側の矩形に関する特性を引くことによって得られる。

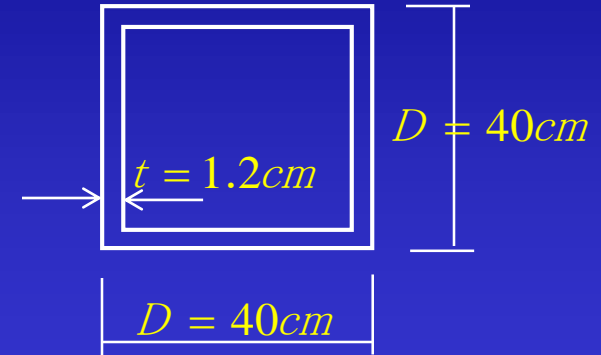
$$A = 40 \cdot 40 - 37.6 \cdot 37.6 = 186.24 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{40 \cdot 40^3}{12} - \frac{37.6 \cdot 37.6^3}{12} = 4.677 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$Z_t = Z_c = \frac{I_z}{D/2} = \frac{4.677 \cdot 10^4}{20} = 2339 \text{ cm}^3$$

例題3-3の答え

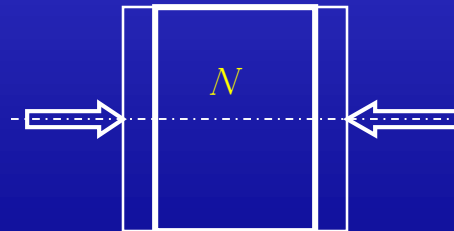
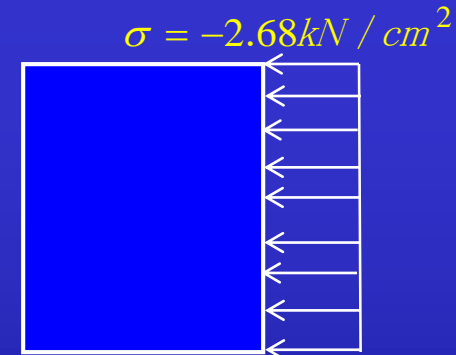
図に示す角型鋼管に圧縮力500kN、
曲げモーメント200kNmが加わっている。
最大応力を求めよ。



最初に、軸力のみ加わった場合
の最大応力は、

$$A = 186.24\text{cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} = \frac{-500}{186.24} = -2.68\text{kN/cm}^2$$

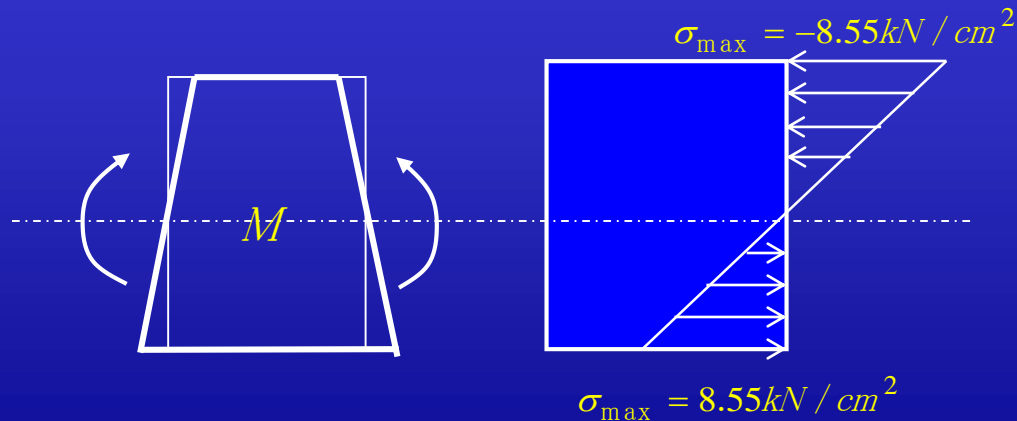
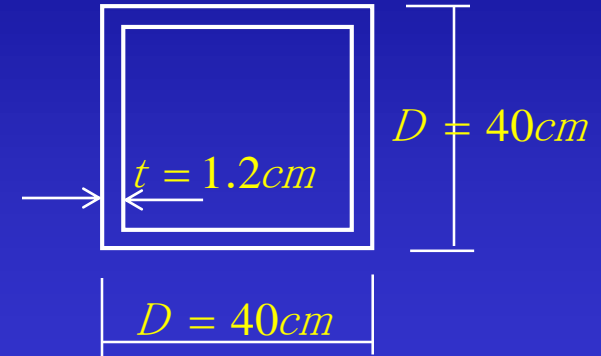


例題3-3の答え2

次に、曲げモーメントのみ加わった場合の最大応力は、

$$Z_t = 2339 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z_t} = \frac{20000}{2339} = 8.55 \text{ kN / cm}^2$$



例題3-3の答え3

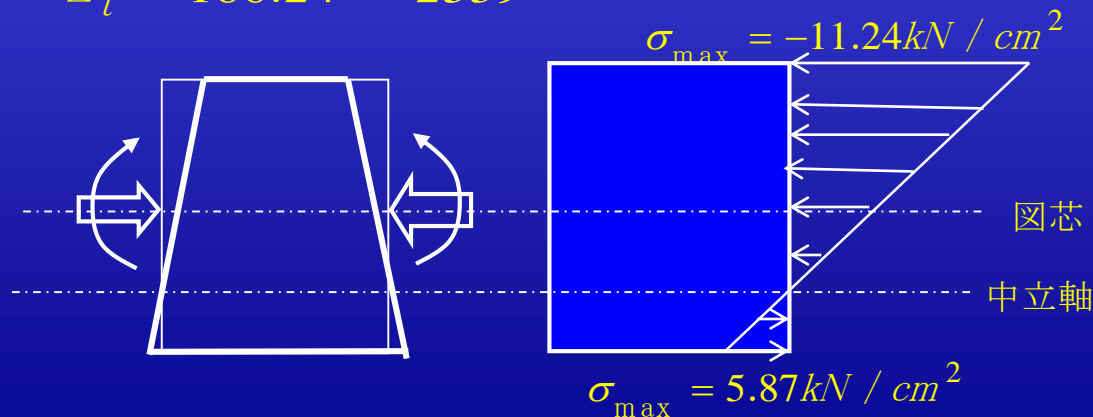
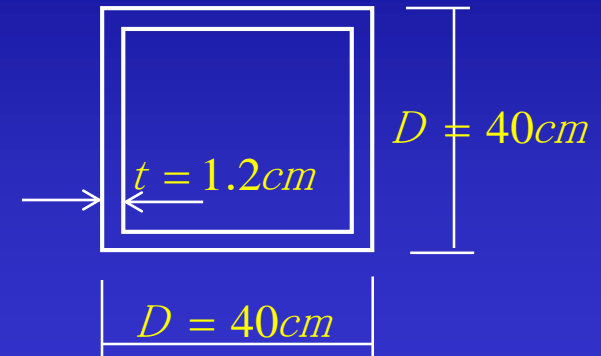
最後に、軸力と曲げモーメントが同時に加わった場合の最大応力は、

$$A = 186.24 \text{ cm}^2$$

$$Z_t = 2339 \text{ cm}^3$$

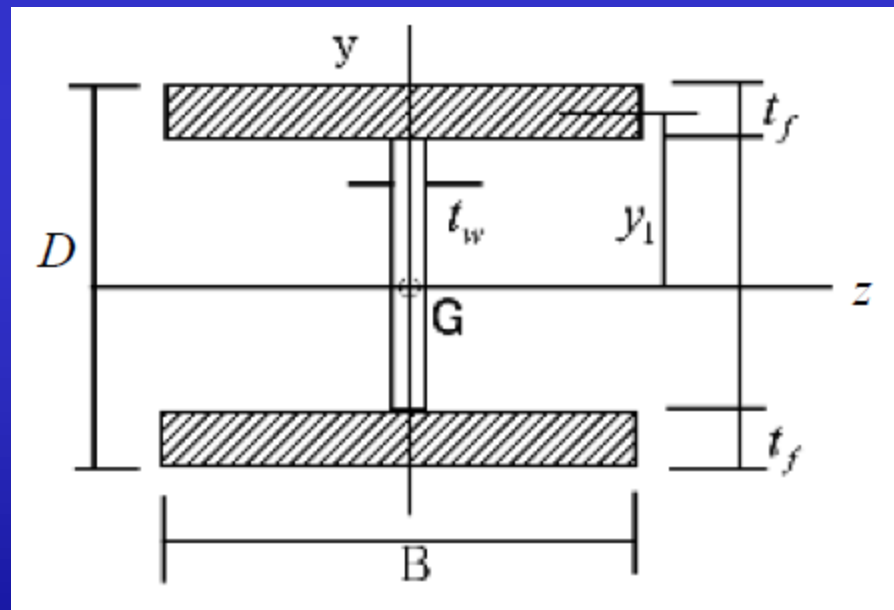
$$\sigma_{c_max} = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_t} = \frac{-500}{186.24} - \frac{20000}{2339} = -11.24 \text{ kN / cm}^2$$

$$\sigma_{t_max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_t} = \frac{-500}{186.24} + \frac{20000}{2339} = 5.87 \text{ kN / cm}^2$$



例題3-4

H型断面のフランジ部分
の図心位置における断面
二次モーメントを求めよ



例題3-4の答え

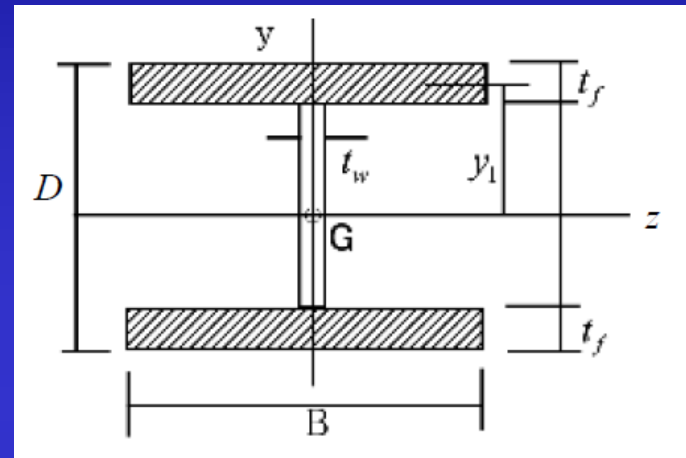
H型断面のフランジ部分
の図芯位置における断面
二次モーメントを求めよ

任意位置の断面二次モーメントは

$$I_Z = I_z + Y_0^2 A$$

従って、H型断面の図芯における2枚のフランジによる断面二次モーメント ${}_f I_Z$ は、

$${}_f I_Z = 2(I_z + y_1^2 A) = 2\left(\frac{B t_f^3}{12} + \left(\frac{D - t_f}{2}\right)^2 B t_f\right)$$



まとめ

- 1) 断面性能を求める
- 2) 断面一次モーメントと図心
- 3) 断面二次モーメント
- 4) 断面極二次モーメント
- 5) 断面内の応力分布