

梁の微分方程式



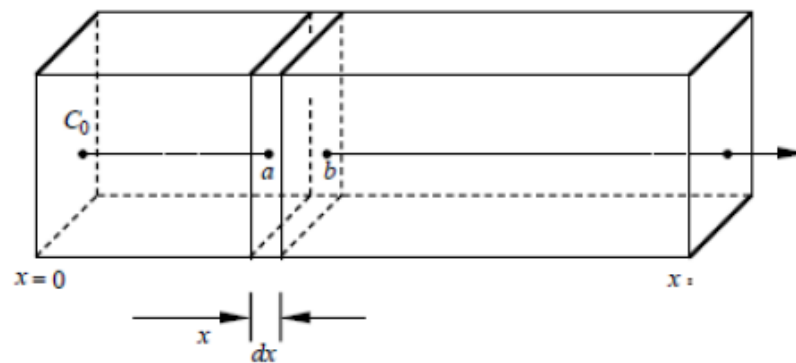
構造力学 I

第8回講義内容

- 1) 梁の微分方程式
- 2) 静定構造物のたわみ
- 3) 演習
- 4) まとめ

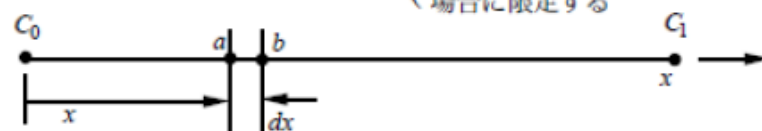
梁理論(ベルヌーイ・オイラー仮定)

平面保持と法線保持

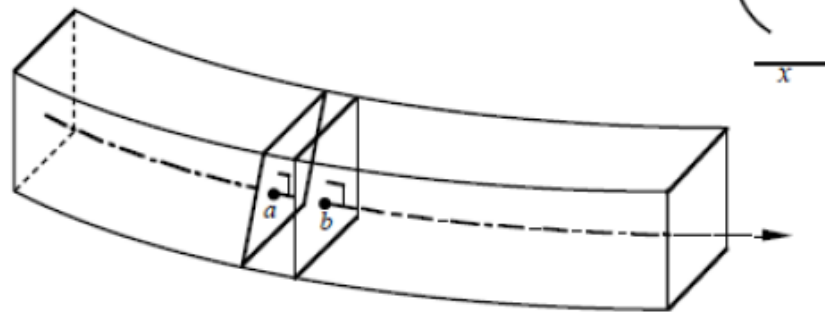


(a) 変形前の梁

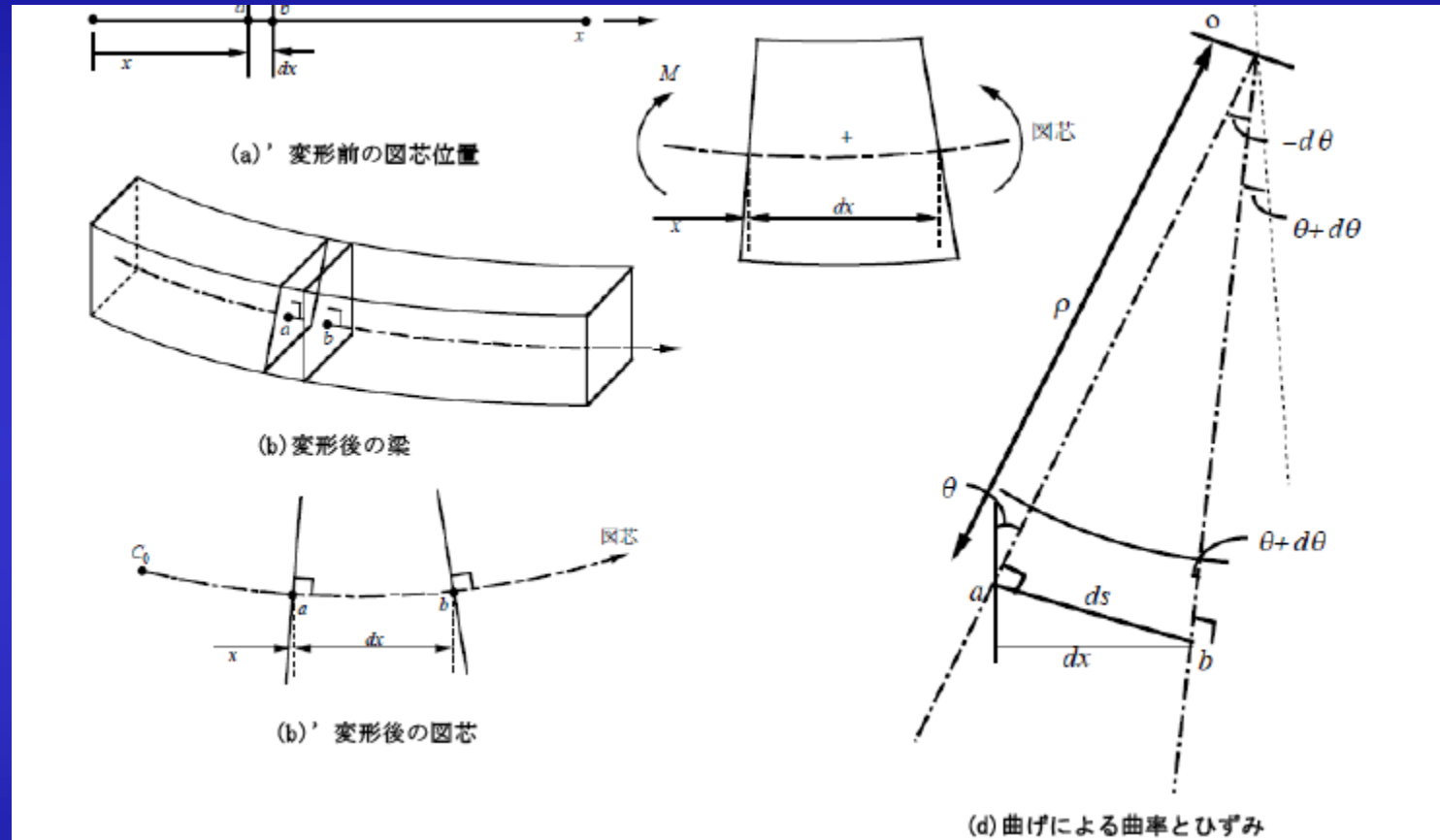
(C_0C_1 は図芯軸で直線の場合に限定する)



(a)' 変形前の図芯位置



梁理論 (ベルヌーイ・オイラー仮定)



曲率半径 ; ρ

回転角 ; $\theta(x) = \frac{dw}{dx}$

$$-\rho d\theta = ds; \quad ds \cong dx \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\rho}$$

梁理論(ベルヌーイ・オイラー仮定)

曲率半径 ; ρ

回転角 ; $\theta(x) = \frac{dw}{dx}$

$$-\rho d\theta = ds; \quad ds \cong dx \rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{\rho}$$

断面内の軸方向ひずみ

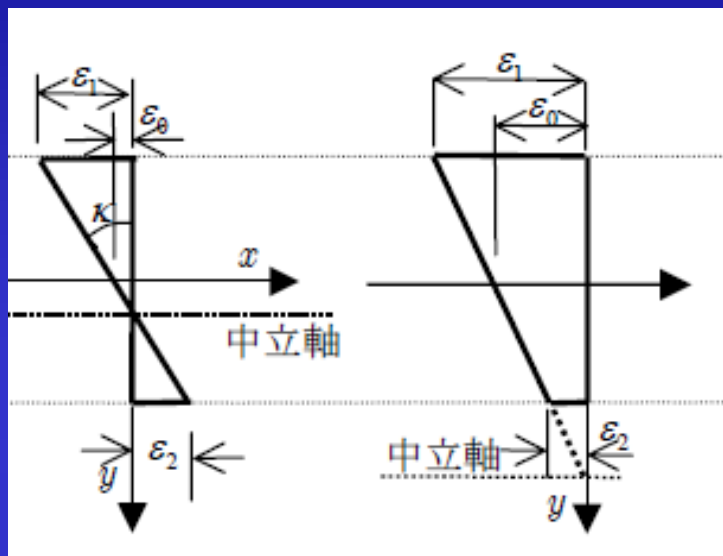
$$\varepsilon_x = \frac{(dx + dl) - dx}{dx} = \frac{dl}{dx}; \quad \leftarrow dl = -d\theta y$$

$$\varepsilon_x = -y \frac{d\theta}{dx} = y \frac{1}{\rho} = -y \frac{d^2w}{dx^2}$$



図 8-2 梁断面内の曲げによるひずみと応力

梁理論(ベルヌーイ・オイラー梁)



断面内に生じる軸方向ひずみ

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \kappa y$$

ϵ_0 : 軸ひずみ

κy : 曲げひずみ

κ : 曲率

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

ベルヌーイ・オイラー仮定よると κ は次式であった。

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

梁理論

曲げモーメントの計算

$$M = \int_A \sigma_x y dA = E(\kappa \int_A y^2 dA)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

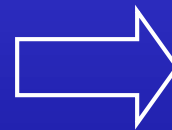
$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

梁の微分方程式

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

断面力の荷重の釣合

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -P_w(x)$$



$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x)$$

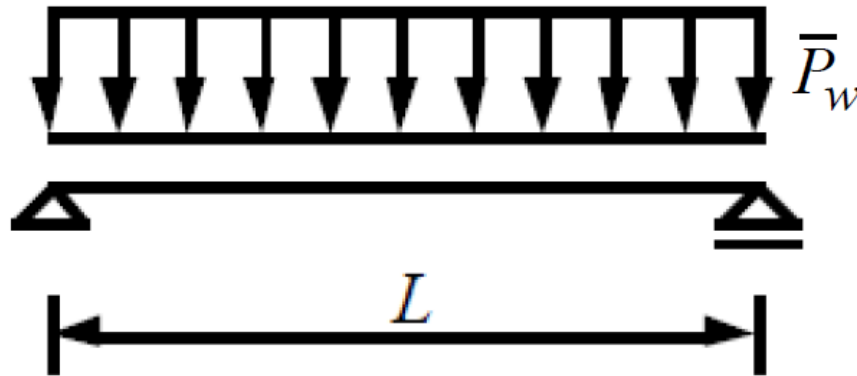
梁の釣合から得られる情報

表 8-1 荷重とせん断力、曲げモーメント及びたわみ

荷重の状態	荷重がない部分	集中荷重	等分布荷重
せん断力	定数	荷重位置で荷重と同じ大きさの不連続が生じる	一次式（直線）
曲げモーメント	一次式（直線）	荷重位置で折れ曲がる	放物線
回転角	放物線	三次式	三次式
たわみ曲線	三次式	四次式	四次式

例題8-1(復習)

単純梁に等分布荷重が加わっている。このときの断面力分布（曲げモーメント図、せん断力図）を求めよ。
断面力と荷重の釣合式を用いて、解を求める。



(a) 解析モデル

例題8-1の答え

断面力と荷重の釣合は、

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\bar{P}_w$$

ここで、 \bar{P}_w は等分布であることより、定数である。両式を2階積分すると、

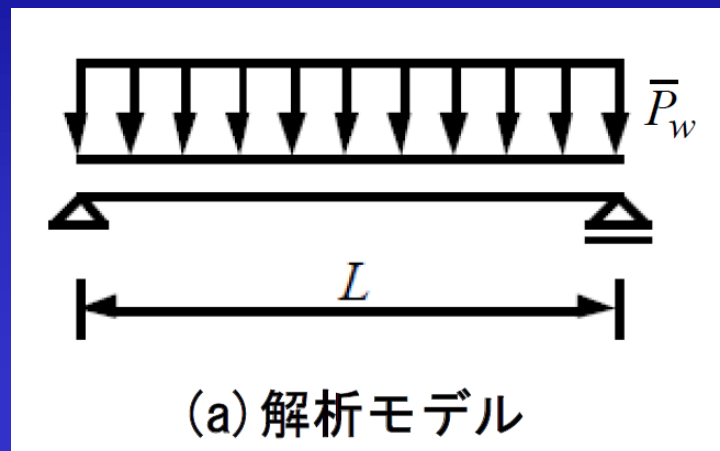
$$\frac{dM}{dx} = Q = -\bar{P}_w x + C_1$$

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

境界条件として、両端の曲げモーメントがゼロであることより、

$$M(0) = C_2 = 0$$

$$M(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} L^2 + C_1 L = 0$$



例題8-1の答え

2つの境界条件より、積分定数は、

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{\bar{P}_w}{2} L$$

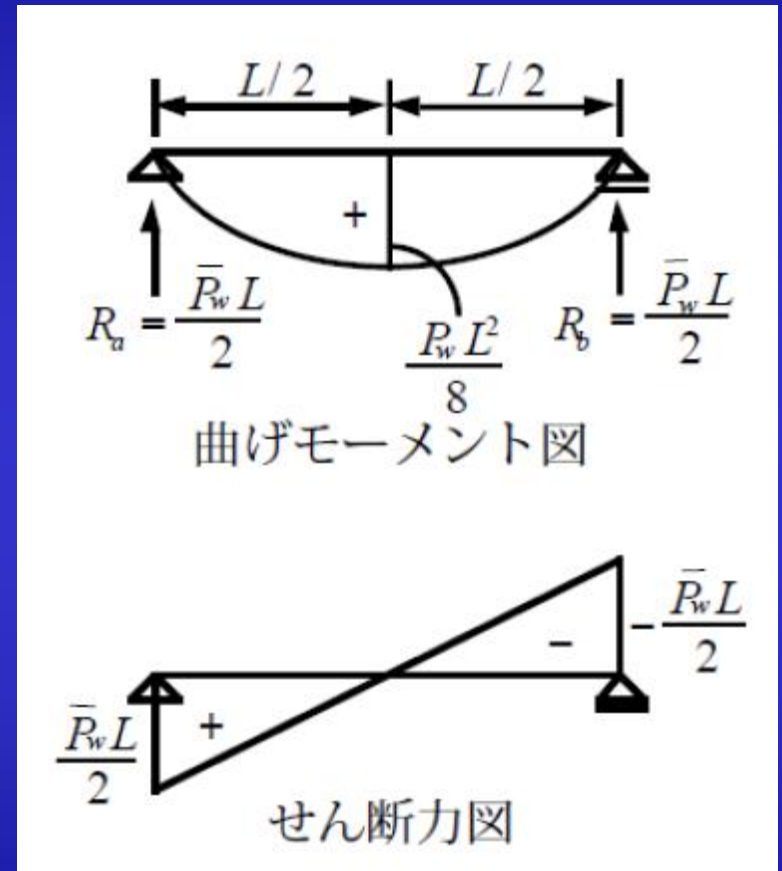
上記の定数を、たわみの式に代入すると、

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2} x^2 + \frac{\bar{P}_w L}{2} x = \frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x)$$

$$Q(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} (L - 2x)$$

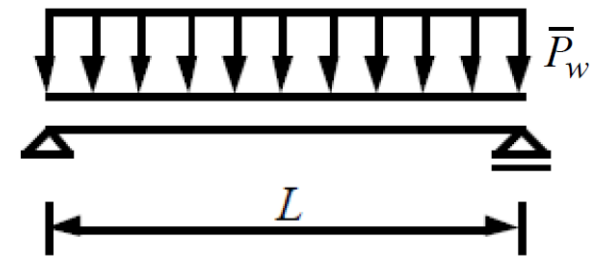
最大曲げモーメントは、せん断力がゼロの位置にあり、

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8}$$

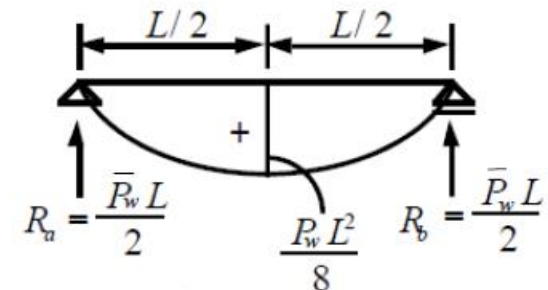


例題8-2

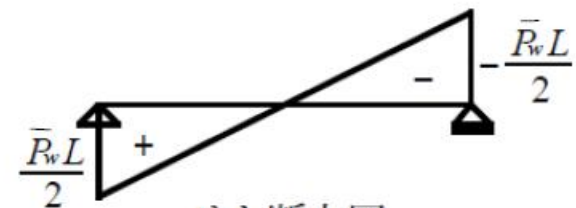
右図に示す単純梁に等分布荷重が加わっている。最大たわみを求めよ。
静定梁であるため、既に、力の釣合より、下図のように曲げモーメント図とせん断力図が得られている。



(a) 解析モデル



曲げモーメント図



せん断力図

例題8-2の答え

静定梁であるため、次式のように梁の微分方程式を使用する。

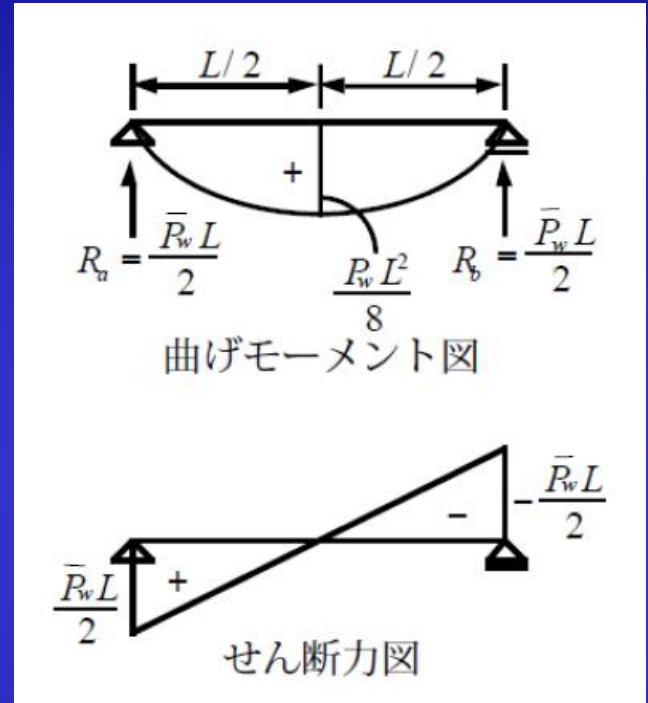
$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

曲げモーメント関数は、

$$M(x) = \frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x)$$

従って、梁の微分方程式は、

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x)$$



例題8-2の答え

微分方程式を2回積分する。

$$EI_z \frac{dw}{dx} = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$EI_z w = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

境界条件として、梁両端の変位ゼロとする。

$$EI_z w(0) = C_2 = 0$$

$$EI_z w(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(L \frac{L^3}{6} - \frac{L^4}{12} \right) + C_1 L + C_2 = 0$$

上式より、

$$C_1 = \frac{\bar{P}_w L^3}{24}$$

例題8-2の答え

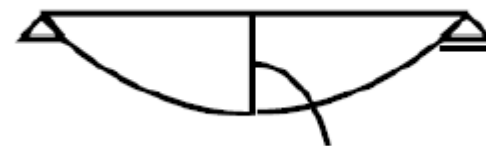
決定した積分定数を代入すると、たわみの式は、

$$w(x) = \frac{\bar{P}_w L^4}{24EI_z} \left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right) \right)$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w L^3}{24EI_z} \left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right)$$

最大たわみは、たわみが対称であることより、最大変位は $x=L/2$ に生じる。

$$\begin{aligned} w_{\max} &= w(L/2) = \frac{\bar{P}_w}{24EI_z} \left(\frac{L^4}{16} - 2L \frac{L^3}{8} + L^3 \frac{L}{2} \right) \\ &= \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z} \end{aligned}$$



$$w_{\max} = \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$

図 9-5(d) たわみ曲線と最大たわみ

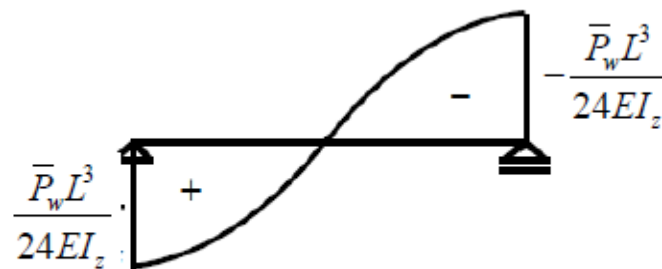


図 9-5(e) 回転角図

まとめ

- 1) 平面保持と法線保持の仮定より梁の微分方程式を導いた
- 2) 梁の微分方程式を解いて単純梁のたわみを求めた