

複雑な不静定梁の解析



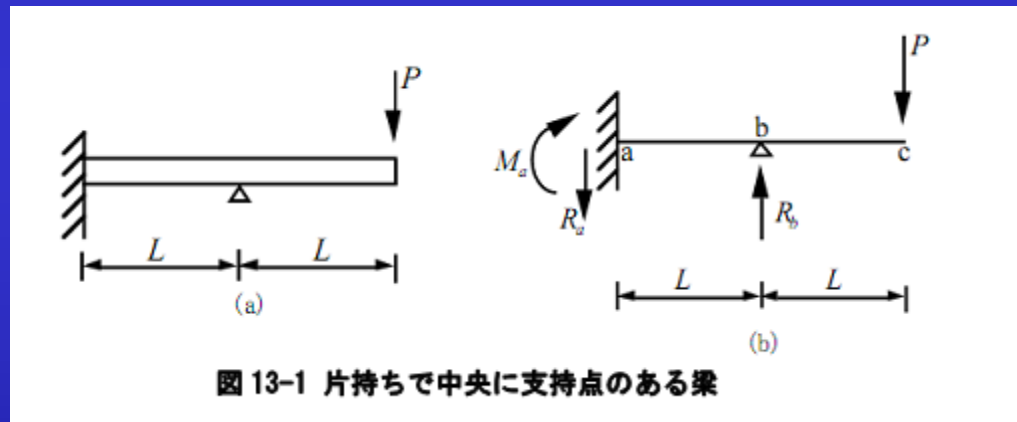
構造力学 I

第12回講義内容

- 1) 複雑な不静定梁のたわみ
- 2) 片持ちで中央に支点のある梁
- 3) ひじ型の骨組の解析
- 4) まとめ

片持ちで中央に支点のある梁の解析

下に片持ち梁の中央に支持点がある不静定構造物を示す。この構造物の曲げモーメントとせん断力を求め、さらに、変形を求める。



梁の微分方程式を用いて解析するためには、2つの梁に分解して解析する必要がある。

片持ちで中央に支点のある梁の解析

まず、b～c間の梁について考える。この部分は片持ち梁となっているので、断面力は図13-2 に示す片持ち梁と同じとなる。図中の点を原点とする座標系を用いると、曲げモーメントを表す関数は、

$$M(x) = -P(L - x)$$

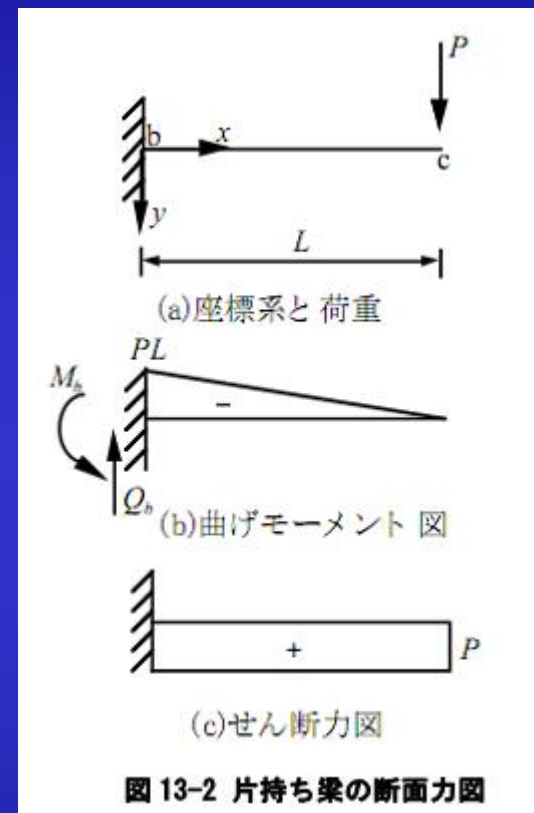
となる。また、反力 M_b は力の釣合より

$$M_b = PL$$

梁の微分方程式は、

$$EI_z \frac{d^2 w_2}{dx^2} = P(L - x)$$

ここで、関数 $w_2(x)$ はb～c間の梁の変位を表す。



片持ちで中央に支点のある梁の解析

上の微分方程式の両辺を2回積分する。

$$EI_z \frac{dw_2}{dx} = P(Lx - \frac{x^2}{2}) + C_1$$

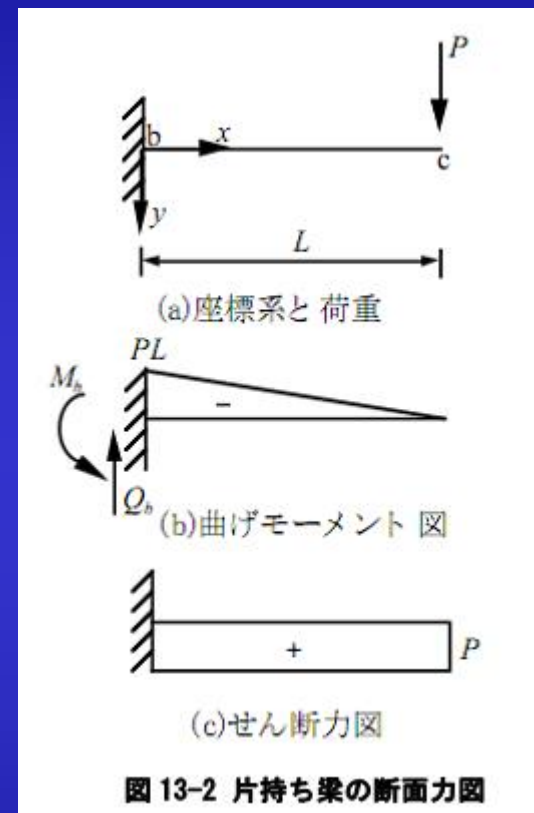
$$EI_z w_2(x) = P(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + C_1x + C_2$$

境界条件は、b 点がピン支持であることから、

$$w_2(0) = 0$$

$$\left. \frac{dw_2}{dx} \right|_{x=0} = \theta_b$$

ただし、上式の回転角 θ_b は、a～b間の梁の影響を受けるので、ここでは、値を決定できない。上記の境界条件より、



片持ちで中央に支点のある梁の解析

$$EI_z w_2(0) = C_2 = 0$$

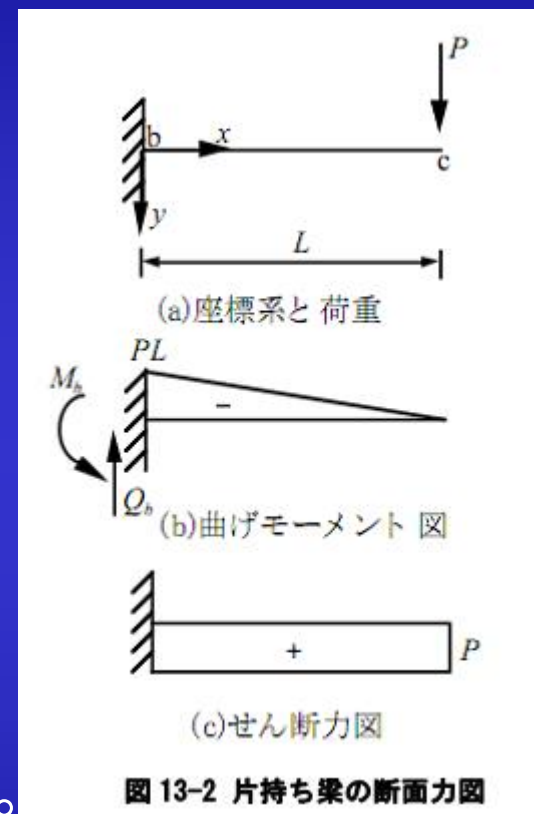
$$\left. \frac{dw_2}{dx} \right|_{x=0} = \frac{C_1}{EI_z} = \theta_b$$

積分定数 C_1 は、

$$C_1 = EI_z \theta_b$$

たわみ式は、上の積分定数を代入すると以下のように表される。右辺の第1項は、片持ち梁のたわみであり、第2項は、支点 b の節点回転角の影響による項である。

$$w_2(x) = \frac{PL^3}{6EI_z} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} + \theta_b \cdot x$$



片持ちで中央に支点のある梁の解析

次に、a～b間の梁について考えよう。この梁のa点を原点とする座標系を導入する。荷重として、図13-3 に示すように、b～c梁の反力 M_b がb点に加わることになる。ただし、梁の中間部に荷重がないことと、不静的梁であることから、梁の微分方程式は次式となる。

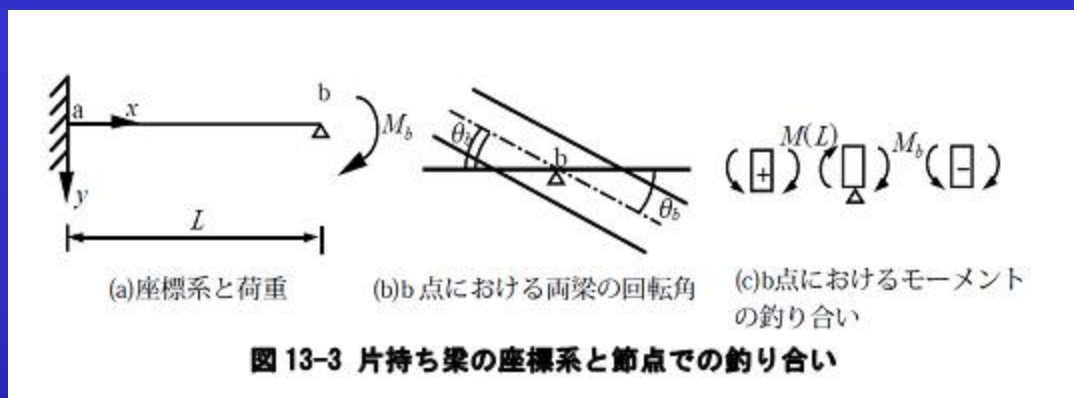
$$EI_z \frac{d^4 w_1}{dx^4} = 0$$

ここで、 $w_1(x)$ はa～b間の変位を表す。上式を4回積分すると、

$$EI_z \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -M(x) = C_3 x + C_4$$

$$EI_z \frac{dw_1}{dx} = C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

$$EI_z w_1(x) = \frac{C_3 x^3}{6} + \frac{C_4 x^2}{2} + C_5 x + C_6$$



片持ちで中央に支点のある梁の解析

境界条件は、a 点が固定であることから

$$EI_z w_1(0) = C_6 = 0$$

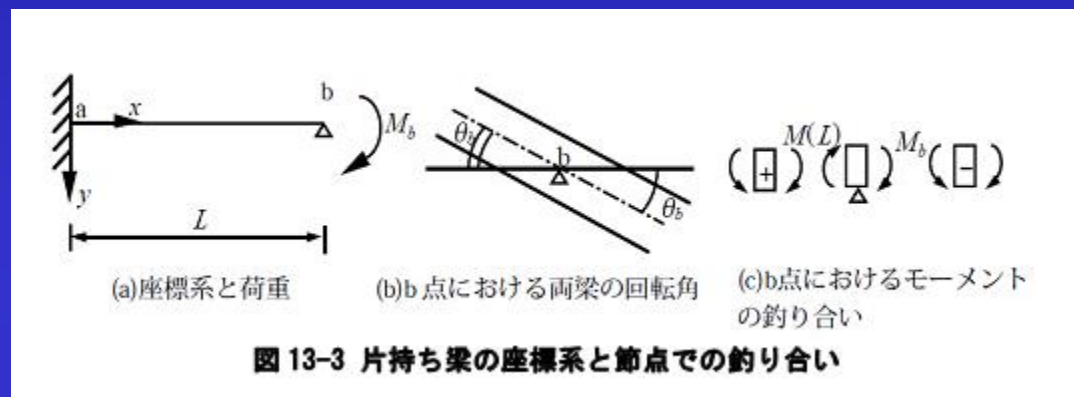
$$EI_z \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=0} = C_5 = 0$$

また、b 点における境界条件は、

$$EI_z w_1(L) = \frac{C_3 L^3}{6} + \frac{C_4 L^2}{2} = 0$$

$$EI_z \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=L} = \frac{C_3 L^2}{2} + C_4 L = EI_z \theta_b$$

ただし、上式の回転角 θ_b は、図13-3(b)に示すように、b～c間の梁のb 点の回転角と同じであり、現時点では未定である。そこで、他の境界条件として、点におけるモーメントの釣り合いを考える。



片持ちで中央に支点のある梁の解析

$$M(L) + M_b = 0; \quad M(L) = -M_b$$

上記の境界条件を曲げモーメント式に用いると、

$$EI_z \left. \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right|_{x=L} = -M(L) = M_b$$

$$C_3 L + C_4 = M_b$$

積分定数は、

$$M_b = PL$$

$$C_3 L + 3C_4 = 0$$

$$C_3 L + C_4 = M_b$$



$$C_3 = \frac{3P}{2} \quad C_4 = -\frac{PL}{2}$$

得られた積分定数より、変位と回転角は

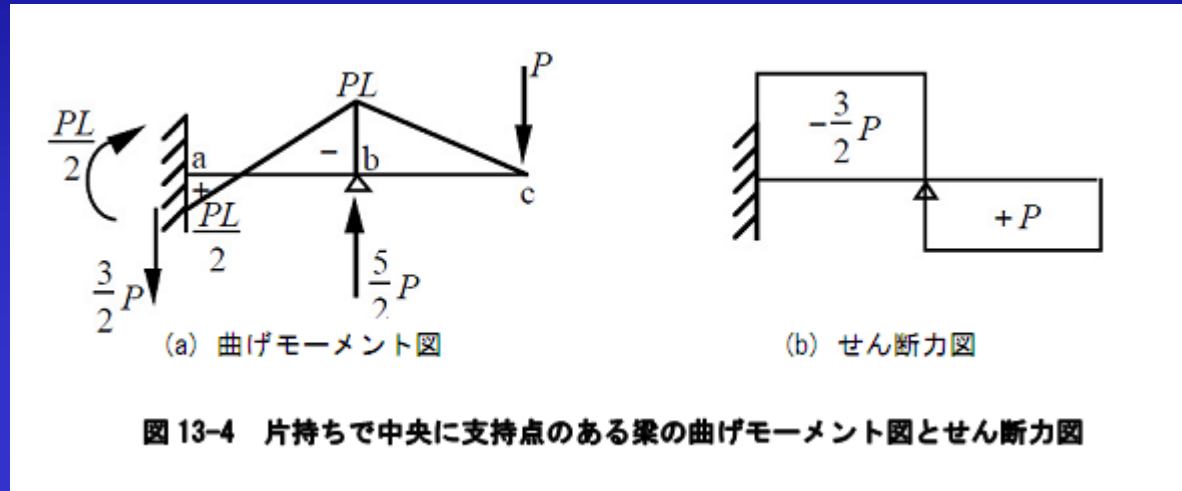
$$w_1(x) = \frac{PL^3}{4EI_z} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right\} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad \theta_1(x) = \frac{dw_1}{dx} = \frac{PL^2}{4EI_z} \left\{ 3 \left(\frac{x}{L} \right) - 2 \right\} \left(\frac{x}{L} \right)$$

片持ちで中央に支点のある梁の解析

b点の回転角 θ_b は、

$$\theta_b = \theta_1(L) = \frac{PL^2}{4EI_z}$$

次に、曲げモーメントは、



$$EI_z \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -M(x) = \frac{PL}{2} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right\}$$

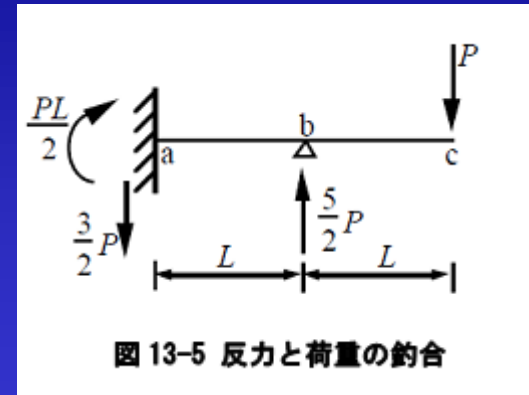
$$M(x) = -\frac{PL}{2} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right) - 1 \right\}$$

また、せん断力は、

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = -\frac{3}{2}P$$

片持ちで中央に支点のある梁の解析

これで、2つの部材の曲げモーメントとせん断力が決定した。これらを図13-4に示す。反力も節点での力の釣り合いより図13-5のように得られる。求めた反力が正しいか否かを判断するため、荷重と反力の釣り合いを考えてみよう。上下方向の力の釣り合いは、図13-5に示すように容易に成立することが分かる。また、モーメントの釣り合いは、a点を中心とするモーメントを計算すると、



$$M_a = \frac{PL}{2} - \frac{5}{2}P \cdot L + P \cdot 2L$$
$$\rightarrow 0$$

片持ちで中央に支点のある梁の解析

先端cの変位 δ は、回転角 θ_b が下式として求められているので、

$$\delta = w_2(L) = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{PL^2}{4EI_z} L = \frac{7PL^3}{12EI_z}$$

$$w_2(x) = \frac{PL^3}{6EI_z} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} + \theta_b \cdot x$$

$$\theta_b = \theta_1(L) = \frac{PL^2}{4EI_z}$$

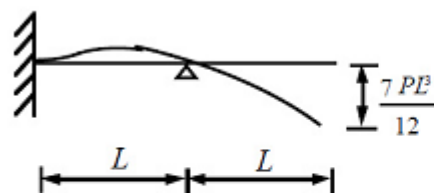
同様に、a～b間部材の変位と回転角は、

$$w_2(x) = \frac{PL^3}{6EI_z} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} + \theta_b \cdot x$$

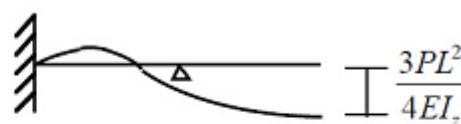
$$= \frac{PL^3}{6EI_z} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} + \frac{PL^3}{4EI_z} \frac{x}{L}$$

$$\theta_2(x) = \frac{dw_2}{dx} = \frac{PL^2}{2EI_z} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\} + \frac{PL^2}{4EI_z}$$

$$\theta_2(L) = \frac{PL^2}{2EI_z} + \frac{PL^2}{4EI_z} = \frac{3PL^2}{4EI_z}$$



(a) 変位分布

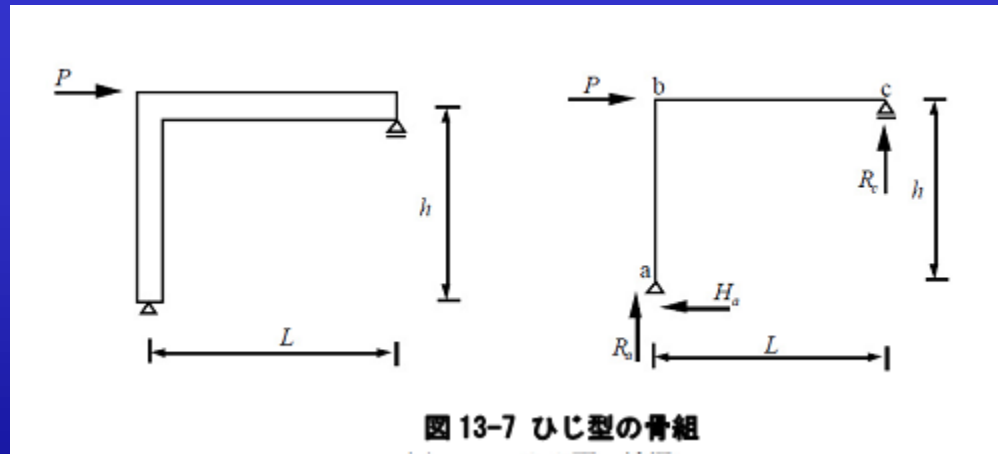


(b) 回転角分布

図 13-6 変位分布と回転角

ひじ型の骨組の解析

図13-7に示す骨組の断面力と変形を求めてみよう。骨組は静定構造物であることから、最初に力の釣合から断面力を求めることになる。静定構造物の応力解析は、最初に反力を求めることから始める。反力を図13-7のように仮定し、荷重との釣合よりその値を求める。



ひじ型の骨組の解析

上下及び水平方向の力の釣合より、

$$R_a + R_c = 0$$

$$H_a = P$$

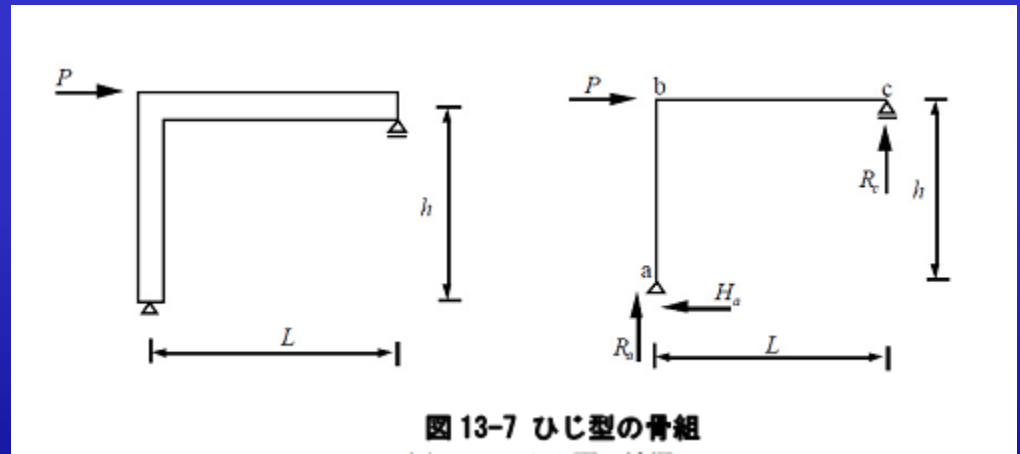
a点でのモーメントの釣合は、

$$Ph - R_c L = 0$$

従って、 反力は、

$$R_c = \frac{h}{L} P; \quad R_a = -\frac{h}{L} P$$

$$H_a = P$$



ひじ型の骨組の解析

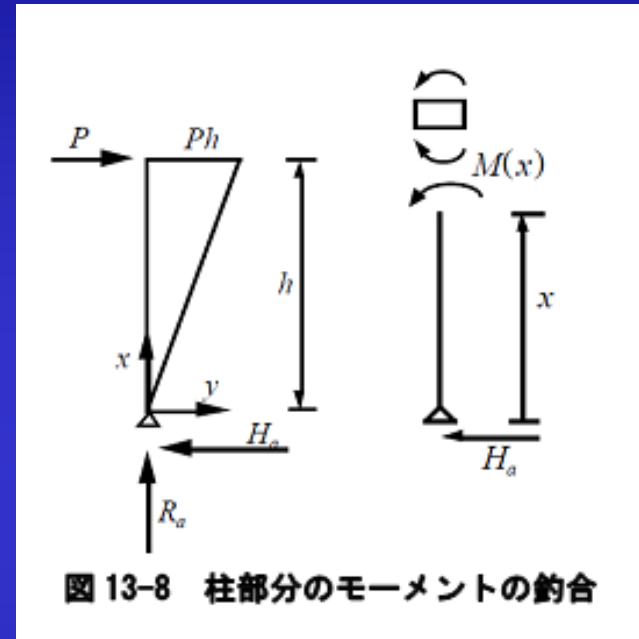
次に、柱と梁の断面力を求める。
図13-8 を参考にし、切断法を用いると、a～b間における x 点でのモーメントの釣合は、

$$-M(x) + H_a x = 0$$

従って、点 x における曲げモーメントは、

$$M(x) = Px$$

次に、b～c間の梁において、図13-9(a)のように座標をおき、b 点より x の位置でのモーメントの釣り合いを以下のように考える。



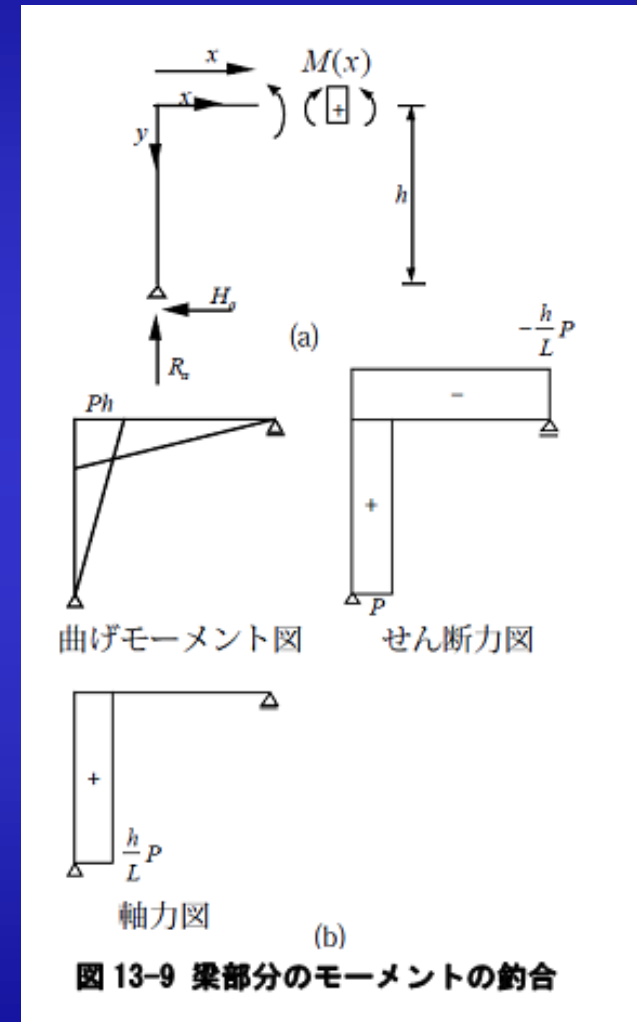
ひじ型の骨組の解析

$$-M(x) + H_a h + R_a x = 0$$

上式を整理すると、b～c間の梁の曲げモーメントを表す関数は、

$$M(x) = Ph - \frac{Ph}{L}x$$

部材の断面力と反力との力の釣合、及び、節点での力の釣合を考えることによって、曲げモーメント、せん断力、軸力を求め、図13-9(b)にそれらを示す。



ひじ型の骨組の解析

次に、骨組の変形を求めてみよう。梁の微分方程式は、曲げモーメント分布が分かっていることから、a～b間の柱とb～c間の梁に対して、各々、

$$EI_{z1} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -Px \quad (a \sim b \text{ 間})$$

$$EI_{z2} \frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{Ph}{L}x - Ph \quad (b \sim c \text{ 間})$$

ただし、部材の曲げ剛性は、柱では EI_{z1} で、梁では EI_{z2} とする。また、座標系は図13-8と図13-9(a)に示されている。上式を2回積分すると変位が次のように得られる。

$$EI_{z1} w_1(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$EI_{z2} w_2(x) = \frac{Ph}{6L} x^3 - \frac{Ph}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

ひじ型の骨組の解析

最初に、b～c間の梁について考える。境界条件としては、a～b間の柱が伸縮しないとすると、点aは上下に変位しないこと、また、点cは、ローラー支持であるため上下に変位をしないことより、次の境界条件が得られる。

$$EI_{z2}w(0) = C_4 = 0$$

$$EI_{z2}w(L) = \frac{PhL^3}{6L} - \frac{PhL^2}{2} + C_3L = 0$$

上式より、積分定数 C_3 は、

$$C_3 = -\frac{PhL^2}{6L} + \frac{PhL}{2} = \frac{PhL}{3}$$

従って、たわみと回転角は、

$$w_2(x) = \frac{PhL^2}{6EI_{z2}} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \quad \theta_2(x) = \frac{dw_2}{dx} = \frac{PhL}{6EI_{z2}} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) + 2 \right\}$$

ひじ型の骨組の解析

ここで、点bにおける梁の回転角 θ_b は、

$$\theta_2(0) = \theta_b = \frac{PhL}{3EI_{z2}}$$

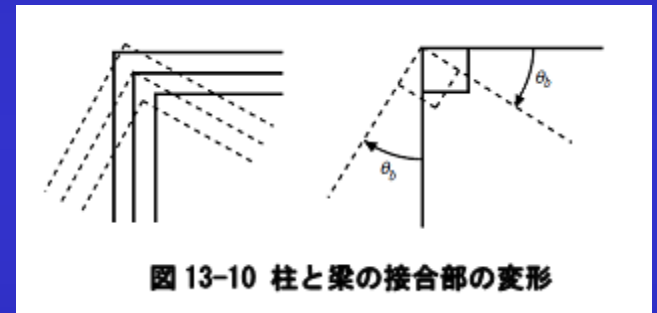
$$\theta_2(x) = \frac{dw_2}{dx} = \frac{PhL}{6EI_{z2}} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) + 2 \right\}$$

次に、a～b間の柱について解析を行う。境界条件としては、点aはピン支持であることより

$$EI_{z1}w_1(0) = C_2 = 0$$

となるが、点bでは、水平変位が生じる。この水平方向変位 δ は、たわみの式より

$$\delta = w_1(h) = \frac{h}{EI_{z1}} \left(-\frac{Ph^2}{6} + C_1 \right)$$



ひじ型の骨組の解析

他の境界条件として、点bでの回転角を用いる。図13-10に示すように、b点で梁と柱は90度の角度で剛接しており、変形後もこの角度が保たれる。このため、梁の回転角と柱の回転角は等しい。点bにおける柱の回転角は、

$$\left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=h} = \frac{1}{EI_{z1}} \left(-\frac{Ph^2}{2} + C_1 \right) = \theta_b$$

となり、梁と柱の回転角 θ_b を等しいと置くと

$$\theta_b = \frac{PhL}{3EI_{z1}} = \frac{1}{EI_{z1}} \left(-\frac{Ph^2}{2} + C_1 \right)$$

従って、積分定数は、

$$C_1 = \frac{I_{z1}}{3I_{z2}} PhL + \frac{Ph^2}{2}$$

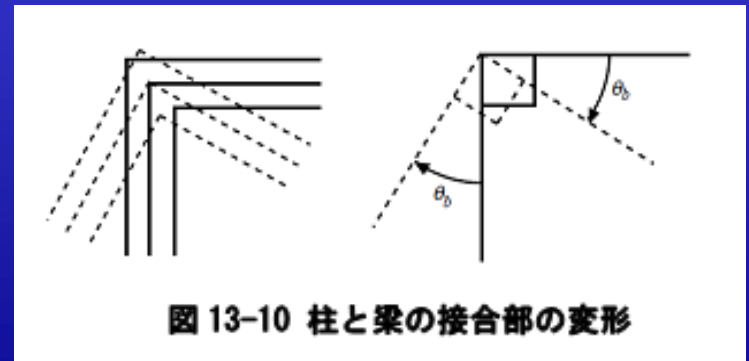


図 13-10 柱と梁の接合部の変形

ひじ型の骨組の解析

梁と柱の変形状態は、

$$w_2(x) = \frac{PhL^2}{6EI_{z2}} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$w_1(x) = \frac{Ph^3}{6EI_{z1}} \left(-\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 2\frac{I_{z1}}{I_{z2}}\left(\frac{L}{h}\right)\left(\frac{x}{h}\right) + 3\left(\frac{x}{h}\right) \right)$$

ここで柱と梁の曲げ剛性を次のように K_1, K_2 で表し、

$$K_1 = \frac{2EI_{z1}}{h}; \quad K_2 = \frac{2EI_{z2}}{L}$$

とすると水平変位 δ は次式で与えられる。骨組の変形を図13-11 に示す。

$$\delta = \frac{3Ph^2}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

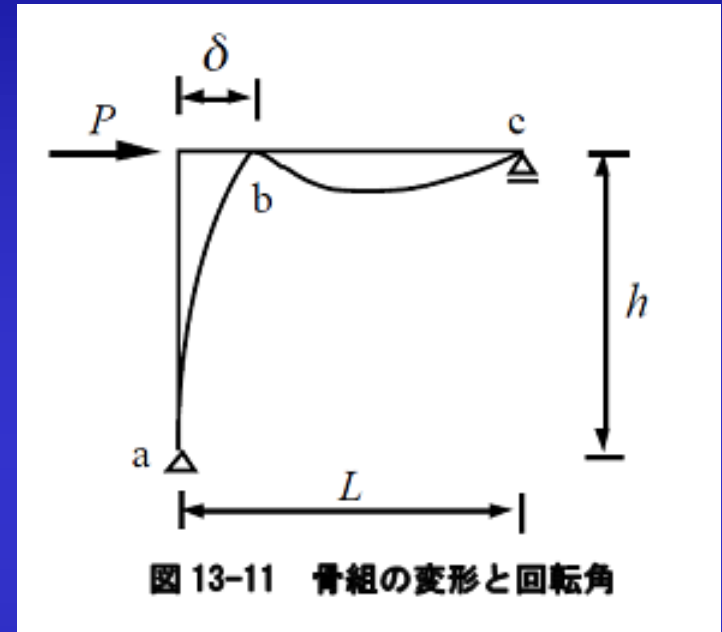


図 13-11 骨組の変形と回転角

まとめ

- 1) 不静定構造物の片持ちで中央に支点のある梁解析を行った
- 2) 静的構造物のひじ型の骨組の解析を行った