

# 梁のせん断応力



構造力学 I

# 第6回講義内容

- 1) 曲げによる梁のせん断応力分布
- 2) 薄肉断面におけるせん断流れ理論
- 3) 非対称断面におけるせん断中心
- 4) モールの応力円
- 5) 演習
- 6) まとめ

# 曲げによる断面内のせん断応力分布

梁の曲げによってせん断力が発生するが、ここでは断面内のせん断応力分布を求める。せん断力の定義は

$$Q = \int_A \tau dA$$

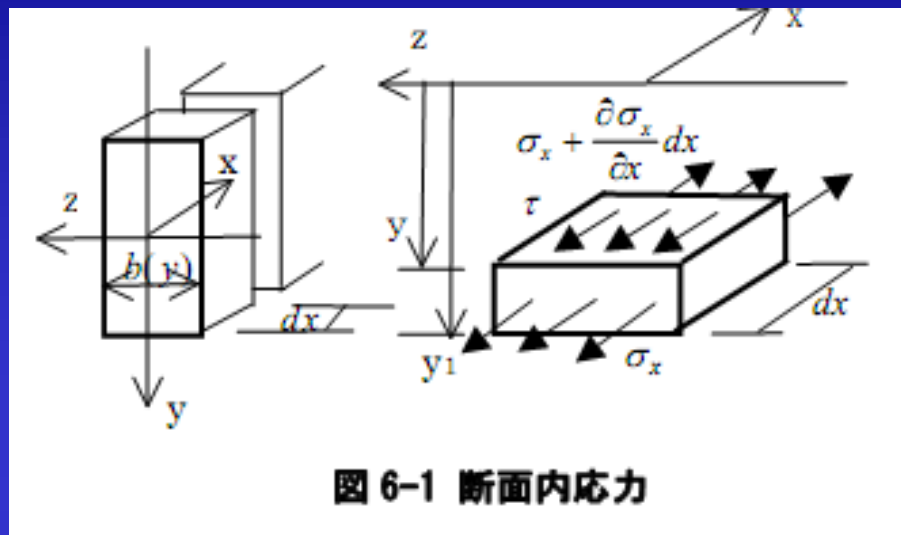
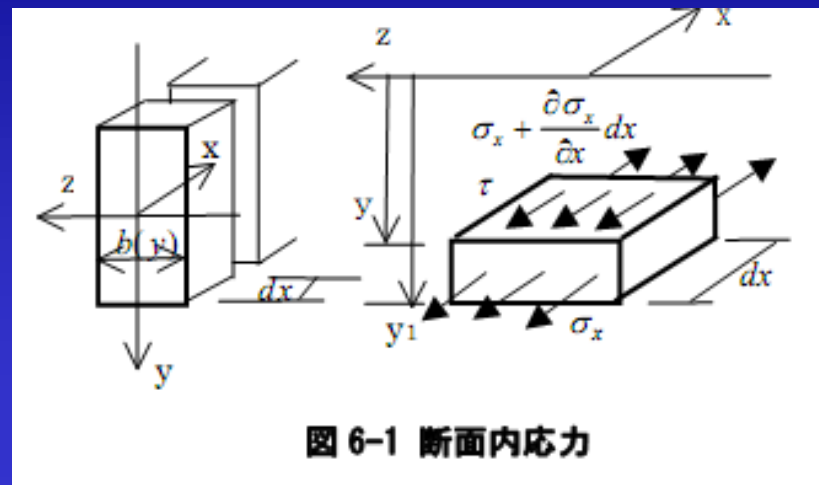


図6-1の矩形断面を材軸方向に $dx$ の幅で切断し、その断面内の応力状態を考える。さらにこの切り出した断面を $y$ より断面端部の $y_1$ まで切断し、その断面における $x$ 方向の力の釣合を次のように求める。ここで、 $b(y)$ は断面の幅である。

$$-\int_y^{y_1} \int_0^{b(y)} \sigma_x dz dy - \int_0^{b(y)} \tau dz dx + \int_y^{y_1} \int_0^{b(y)} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dz dy = 0$$

## 曲げによる断面内のせん断応力分布

軸方向応力が幅方向では一定であることを考慮して、 $z$  軸方向の積分を行い、 $dx$  で割った後、上式を整理すると



$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1} \int_0^{b(y)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz dy = \int_y^{y_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b(y) dy$$

曲げを受ける断面内の応力分布及び、 $x$  に関する微分項は

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y; \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{y}{I_z} \frac{dM}{dx} = \frac{y}{I_z} Q$$

これを代入することで、切断した断面における  $x$  方向の釣合式を評価する。

# 曲げによる断面内のせん断応力分布

$$\int_0^{b(y)} \tau dz = \int_y^{y_1} \frac{yQ}{I_z} b(y) dy = \frac{Q}{I_z} S(y); \quad S(y) = \int_y^{y_1} yb(y) dy$$

ここで、 $S(y)$  は  $z$  軸に関する  $y$ より外の断面の断面一次モーメントを表す。

上式の右辺において、せん断応力が断面幅で一定であると仮定すると、幅方向の積分は単純で、せん断応力は次のように求められる。

$$\tau = \frac{Q}{I_z b(y)} S(y)$$

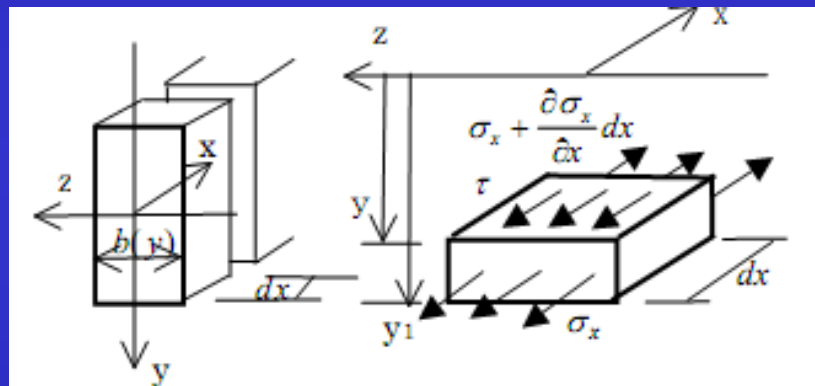


図 6-1 断面内応力

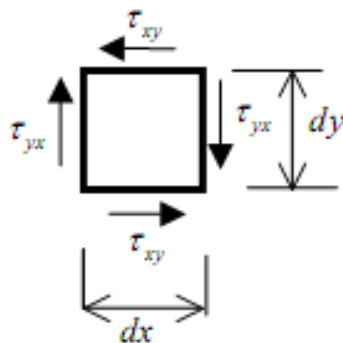


図 6-2 せん断応力の釣合

# 長方形断面の曲げによる断面内のせん断応力分布

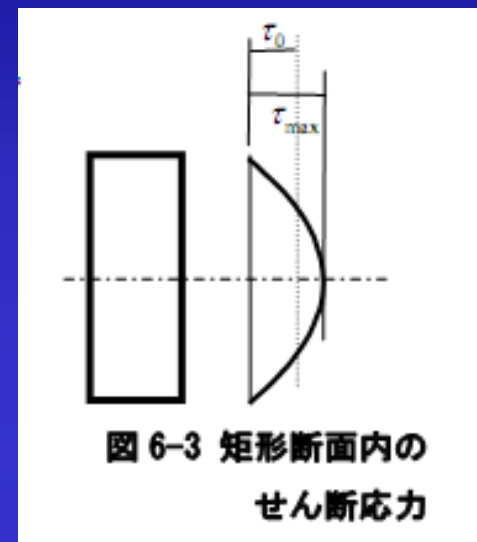
梁幅  $b$  でせい  $D$  の矩形断面の曲げによるせん断応力分布を求めてみよう。まず、矩形断面の断面一次モーメント  $S(y)$  を求める。

$$S(y) = \int_y^{\frac{D}{2}} y b dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_y^{\frac{D}{2}} = \frac{b}{2} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right)$$
$$= \frac{bD^2}{8} \left( 1 - \left( \frac{2y}{D} \right)^2 \right)$$

上式をせん断応力分布式に代入すると、矩形断面のせん断応力分布が次のように得られる。

$$\tau = \frac{Q}{I_z b(y)} S(y)$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{I_z b} \left( 1 - \left( \frac{2y}{D} \right)^2 \right) \frac{bD^2}{8} = \frac{3Q}{2A} \left( 1 - \left( \frac{2y}{D} \right)^2 \right)$$

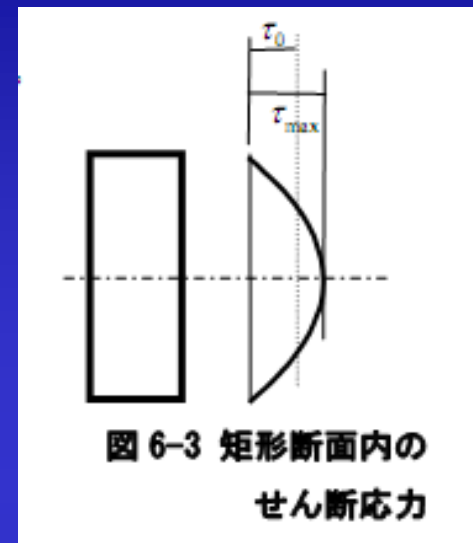


# 長方形断面の曲げによる断面内のせん断応力分布

$$\tau(y) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \left(\frac{2y}{D}\right)^2\right)$$

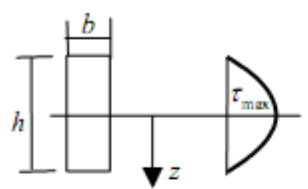
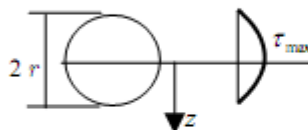
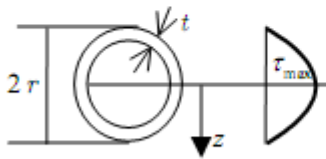
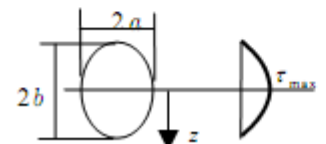
せん断応力分布は、図のように断面の上端と下端でゼロ、中央で最大となる放物線である。また、最大せん断応力は上に代入すると、次式のように平均せん断応力の1.5倍となる。

$$\tau_{\max} = k \frac{Q}{A} = k \tau_0; \quad k = 1.5; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A}$$



# その他の断面の曲げによる断面内のせん断応力分布

表 6-1 曲げに伴うせん断応力分布

断面	せん断応力	$k$ の最大値
	$\frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left\{ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \left\{ 1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right\}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{Q}{\pi r t} \left\{ 1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right\}$	$2$
	$\frac{4}{3} \frac{Q}{\pi ab} \left\{ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right\}$	$\frac{4}{3}$

# 薄肉断面で構成された断面のせん断応力分布

H型断面内のせん断応力分布を古典的な方法で求めると、右図のようになるがこの分布には矛盾がある。フランジの内端にはせん断応力が発生しているが、このせん断応力に対応する外力が存在しない。また、フランジとウェブに大きな応力の不連続があり、応力の連続性がどのように成立しているか説明できていない。これらの矛盾を解決するために、せん断流れの仮定による理論がある

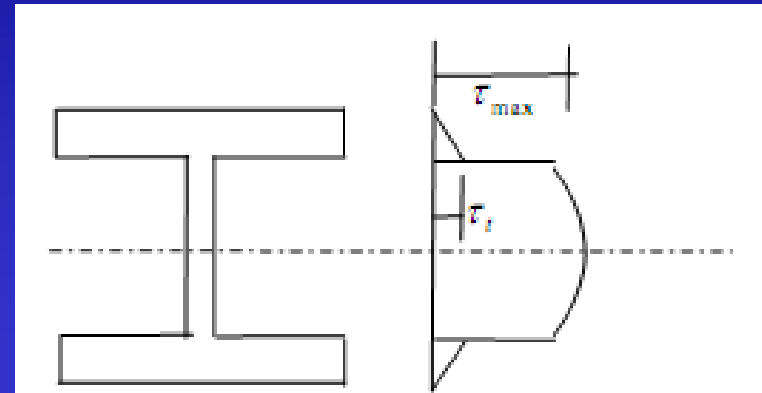


図 6-4 H 型断面せん断応力分布

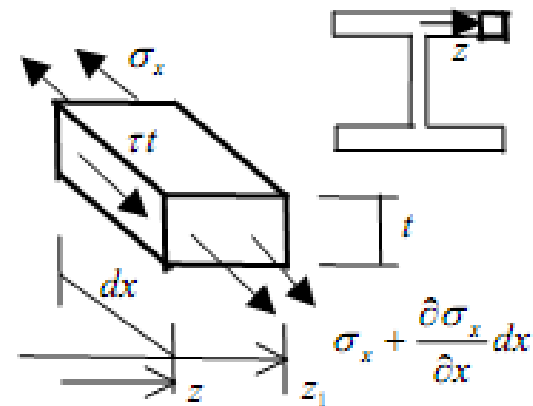


図 6-5 せん断流れ理論による釣合

# 薄肉断面におけるせん断流れ理論

肉厚  $t$  の薄肉断面では、せん断応力は断面内一様に大ききさ  $\tau t$  で、断面内に沿って流れ、その方向は断面内の中心線に一致するという考えである。

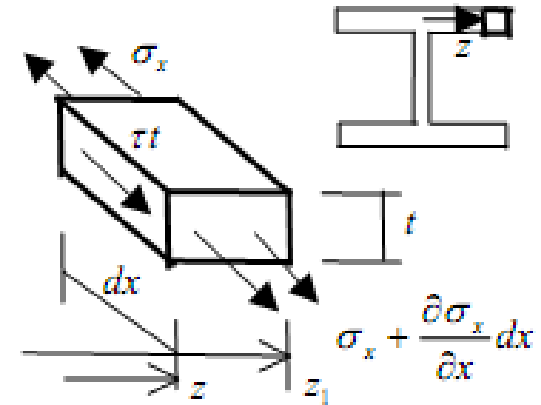


図 6-5 せん断流れ理論による釣合

このせん断流れ理論によると、H型断面におけるせん断応力は、図6-6のようになる。

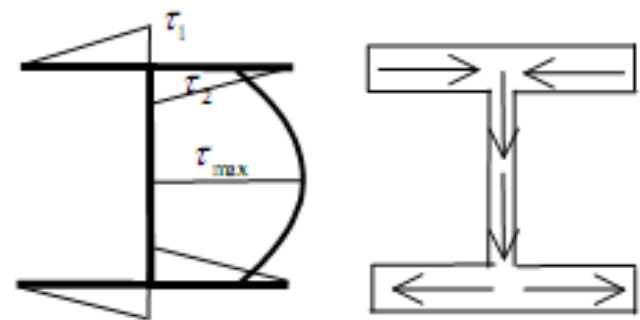
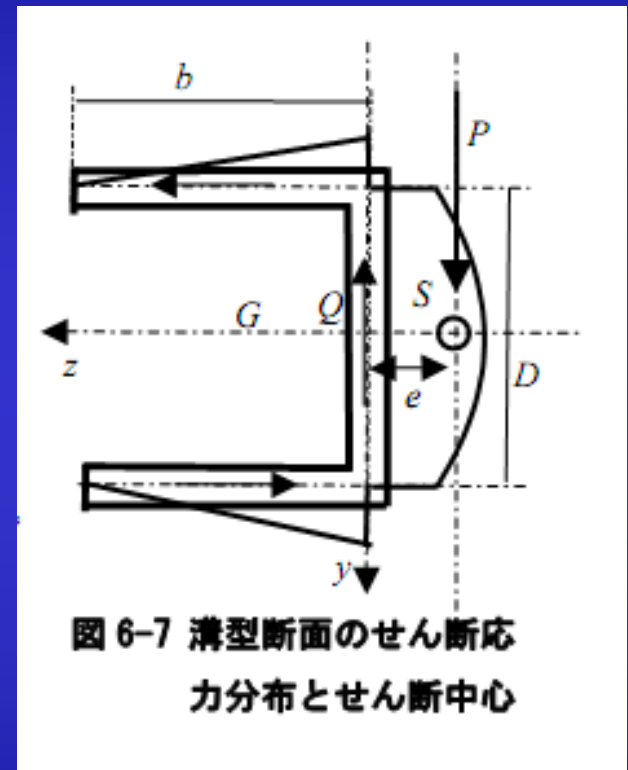


図 6-6 せん断流れ理論による H 型断面せん断応力分布

# 薄肉断面で構成された非対称断面におけるせん断応力とせん断中心

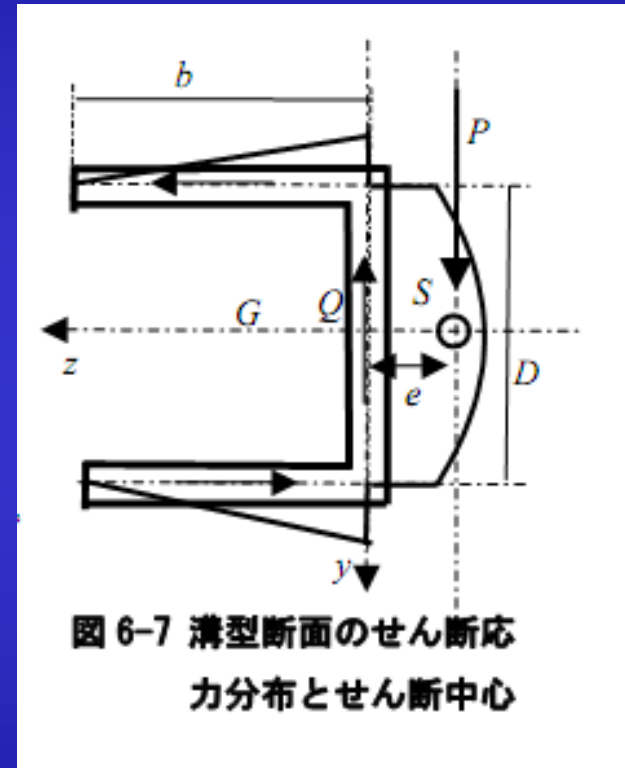
せん断流れ理論によると、C型断面におけるせん断応力は、図6-7のようになる。

この断面では偶力によるモーメントが発生するため、外力の作用点はこのモーメントと釣合う位置に存在する必要がある。外力  $P$  はウェブのせん断応力と釣合、フランジのせん断応力は  $Pe$  のモーメントに等しくなる。この位置がせん断中心と呼ばれる。



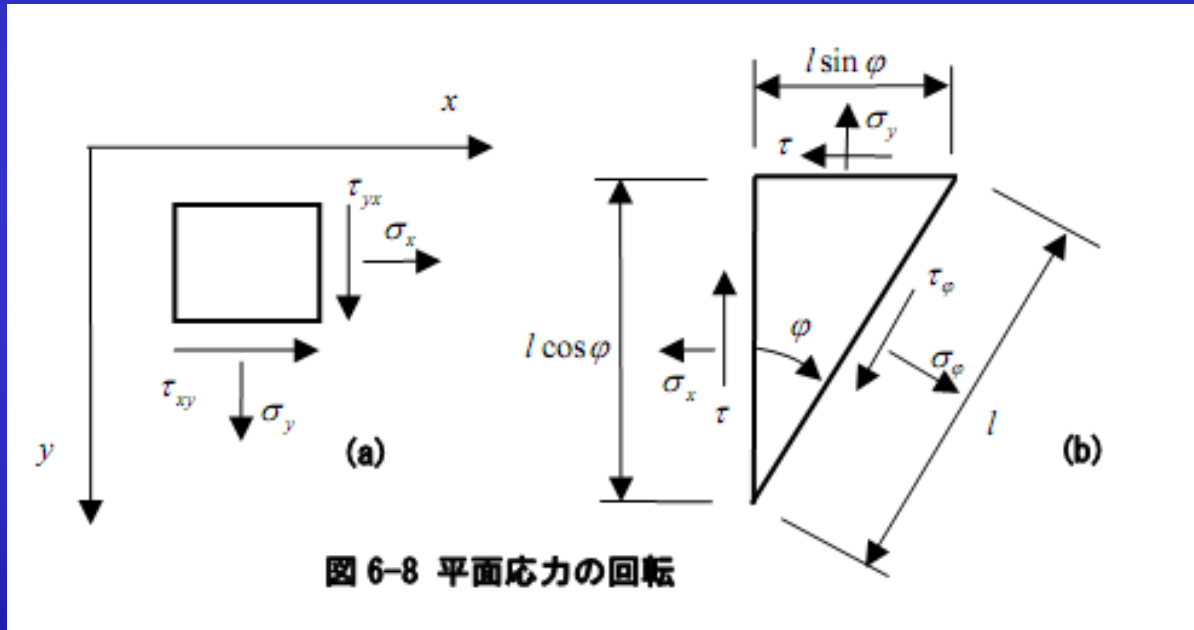
# 薄肉断面で構成された非対称断面におけるせん断応力とせん断中心

上記2つの外力が作用する直線の交点はせん断中心と呼ばれ、この点は断面の形状で決定され、断面固有の値となる。このせん断中心を通して外力が作用すると断面は捩じれることなく純粋に曲げ変形を生じる。この点を通らずにせん断力が作用すると曲げ変形と共に断面が捩じれることになる。逆に、このせん断中心を軸にして捩じると曲げ変形が生じず、純粋に捩じれのみが発生する。



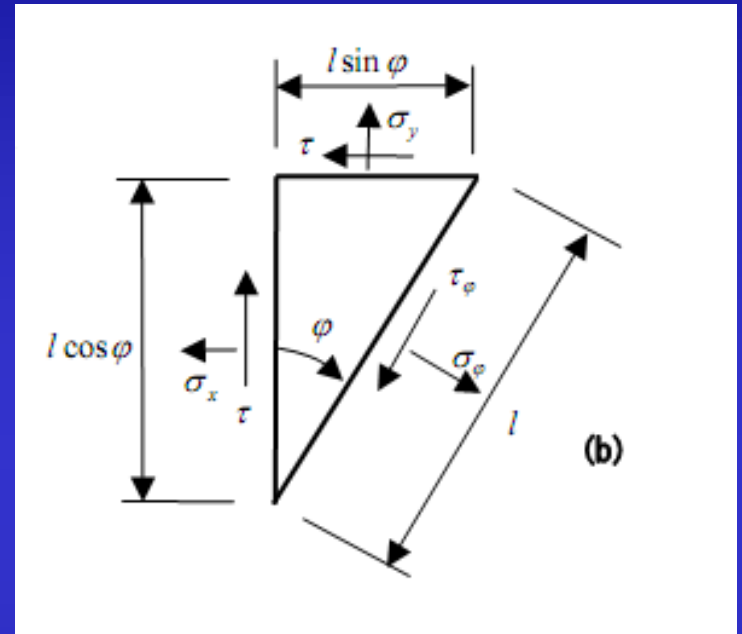
# モールの応力円

ここまでは、断面内の応力は図芯垂直の面で考えていた。本節では、斜めの面において、応力状態がどのようなになっているかについて考える。



# モールの応力円

図6-8(a)には座標に平行で微小な矩形を取り出し、そこに働く応力を示す。ここでは、 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$  である。次に、図6-8(b)のように角度  $\varphi$  で長さ  $l$  の斜面上に働く応力 ( $\sigma_\varphi, \tau_\varphi$ ) を力の釣合より求めてみよう。図6-8より方向と 方向の力の釣合は次式で与えられる。



$$l\sigma_\varphi \cos \varphi - l\tau_\varphi \sin \varphi - l \cos \varphi \sigma_x - l \sin \varphi \tau = 0$$

$$l\sigma_\varphi \sin \varphi + l\tau_\varphi \cos \varphi - l \sin \varphi \sigma_y - l \cos \varphi \tau = 0$$

上式を( $\sigma_\varphi, \tau_\varphi$ ) に付いて解くと、角度に  $\varphi$  における応力が求められる。

# モールの応力円

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\varphi} = \tau(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= \tau \cos 2\varphi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$

次に、応力が最大、最小となる角度を  $\varphi = \alpha$  とし、最大・最小の応力を求める。まず、上の第1式を用いて応力が極値となる角度を、以下のように  $\partial \sigma_{\varphi} / \partial \varphi = 0$  より求める。上式を微分し、整理すると

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha = 0; \quad \rightarrow \quad \tan 2\alpha = \frac{\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

上式は角度が  $2\alpha + \pi$  でも成立する。このことより、最大応力と最小応力を示す方向間の角度は90度ずれており、従って、互いに直交している。上式の最大応力を示す角度  $\alpha$  を用いると次の関係が得られる。

# モールの応力円

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}}$$

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \frac{\tau}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}}$$

また、最小応力となる角度  $\alpha + \pi/2$  を用いると上式の右辺項には、両者共に負記号が加えられる。最大応力を  $\sigma_1$ 、最小応力を  $\sigma_2$  とし、上式を式(6.29)の第1 式に代入すると最大応力と最小応力が得られる。

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi$$

# モールの応力円

このときのせん断応力は下式のようにゼロとなる。

$$\frac{\tau_\phi}{\cos 2\alpha} = \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tan 2\alpha = \tau - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = 0$$

この直交する2 断面を主応力面、また、その方向の応力  $\sigma_1, \sigma_2$  を主応力  
という。その際、せん断応力はゼロとなる。

次に、せん断応力が最大、最小となる角度を求めてみよう。条件として、  
を式(6.29)の下式に適用すると、

$$\frac{\partial \tau_\phi}{\partial \phi} = -\tau \sin 2\phi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi = 0$$
$$\tan 2\phi = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau}$$

$$\tau_\phi = \tau \cos 2\phi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi$$

となる。この面は、先の主応力面と45 度の角度をなし、主せん断応力面という。そのときの最大せん断応力を  $\tau_1$  、最小せん断応力を  $\tau_2$  とすると、最大せん断応力と最小せん断応力は、

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \tau_2 = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

となり、この応力を主せん断応力という。

# モールの応力円

以上の応力関係を図示したものに、モール (Mohr) の応力円がある。応力円では、角度は 2 倍で測り、時計回りを正とする。例えば、応力が  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$  の場合、モールの応力円の中心は  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  となり、半径は前記の  $\tau_1$  となる。逆に、主応力  $(\sigma_1, \sigma_2)$  から一般の  $(\sigma_\phi, \tau_\phi)$  を求めるには、その応力は  $\sigma_1$  の方向から反時計回りに  $2\phi$  の角度の面に存在する。例えば、静水圧の状態 ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \tau = 0$ ) では、モールの応力円の半径は 0 であり、どの方向でも主応力面となる。また、純せん断の状態では、モールの応力円の中心は原点となり、半径はこのせん断応力に等しくなる。この場合の主応力は、せん断応力と同じで、逆向きの応力状態となる。(軸力のない梁の断面中央)

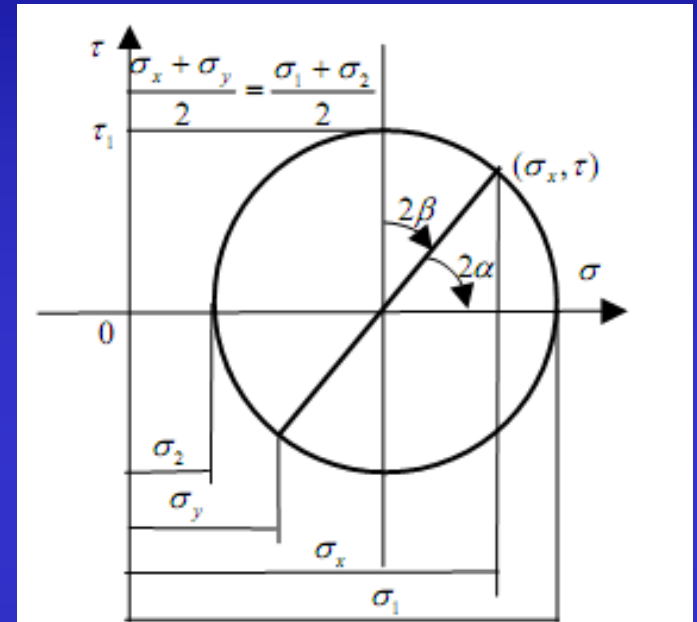


図 6-9 モールの応力円

# 梁部材におけるモールの応力円

平板上における主応力の2方向を求め、同じ主応力の方向を続けて描いた曲線を**主応力線**と呼ぶ。この主応力線の特徴として、最大応力と最小応力から描かれる曲線は互いに直交し、せん断外力のない部材の端部、例えば、梁の上下端では、一方の主応力線は平行で他は縁に直交する。また、軸方向応力がゼロとなる中立軸上では純せん断状態となり、主応力線は中立軸に対し45度となっている。

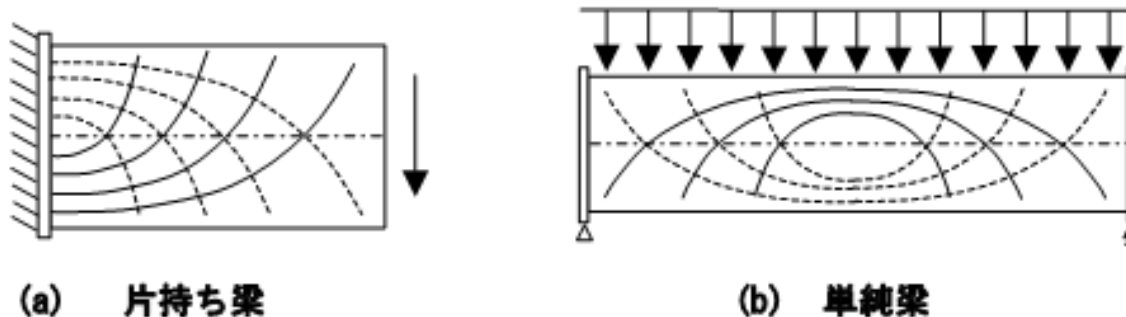
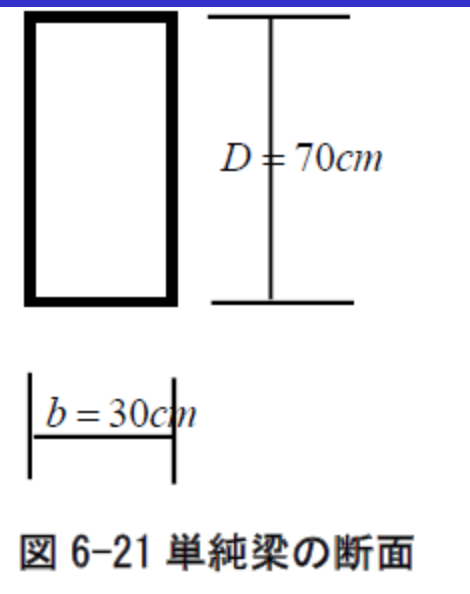
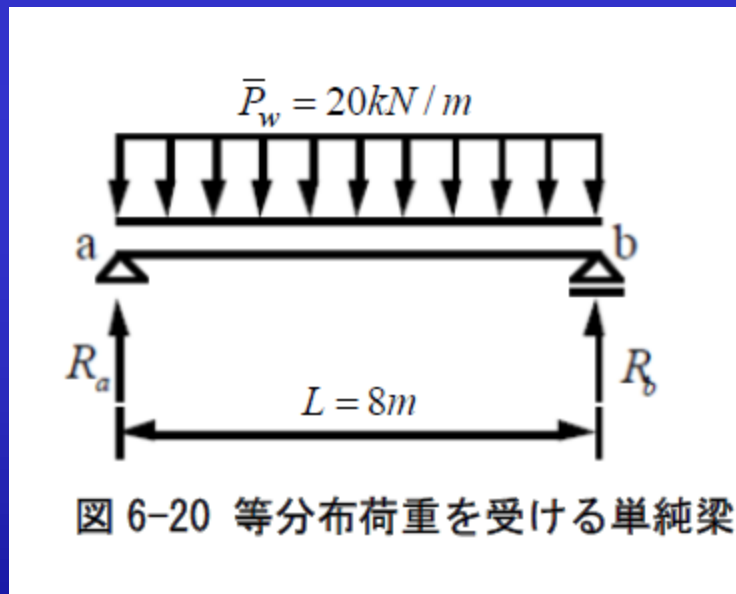


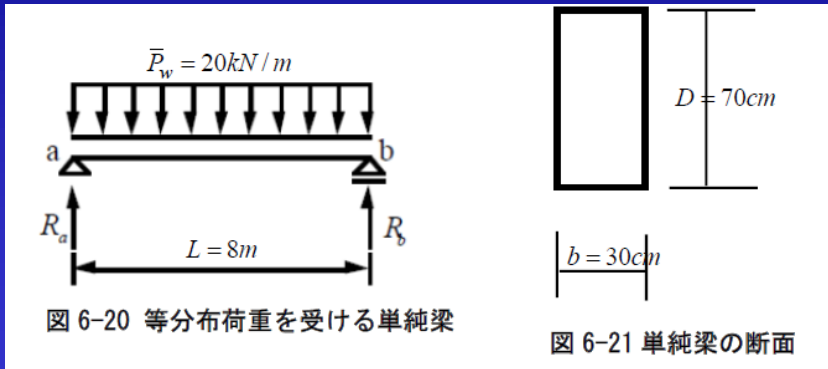
図 6-10 梁内部に生じる主応力線

## 例題6-1

図のような長方形断面の単純梁に等分布荷重  $\bar{P}_w = 20kN/m$  が加わっているとき、部材内に生じる最大応力及び最大せん断応力を求めよ。またその位置はどこか検討せよ。さらに、最大せん断応力から生じる軸方向応力はいくらになるか計算せよ。



## 例題6-1の答え



曲げモーメント分布とせん断力分布は

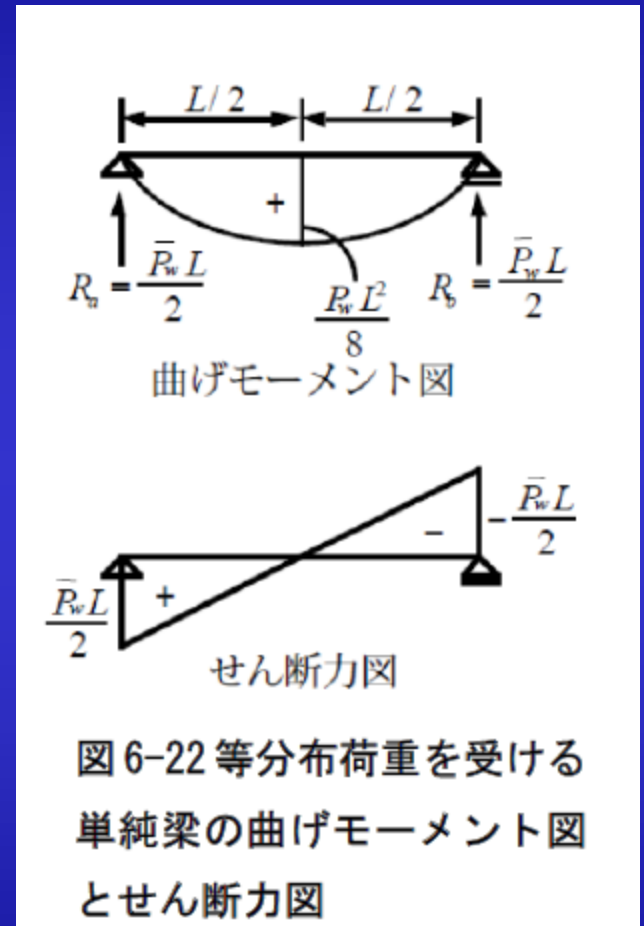
$$M(x) = \frac{\bar{P}_w x}{2} (L - x)$$

$$Q(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} (L - 2x)$$

となり、図6-22に示す。最大曲げモーメントと最大せん断力は

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\bar{P}_w L^2}{8} = \frac{20 \cdot 8^2}{8} = 160 \text{ kNm}$$

$$Q(0) = \frac{\bar{P}_w L}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ kN}$$



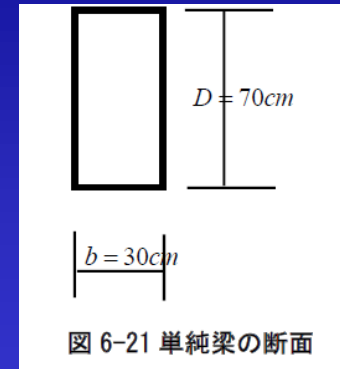
## 例題6-1の答え

断面の特性は、

$$A = 30 \cdot 70 = 2100 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{bD^3}{12} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} = 857500 \text{ cm}^4$$

$$Z_c = Z_t = \frac{857500}{35} = 24500 \text{ cm}^3$$



曲げモーメントによる最大軸方向応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z_c} = \frac{M}{Z_t} = \pm \frac{160 \cdot 100}{24500} = \pm 0.65 \text{ kN / cm}^2$$

となり、部材中央の断面の上端に最大圧縮応力が、また、下端に最大引張応力が発生する。

最大せん断応力は、せん断力図より部材両端で、せん断応力の分布状態から断面中央に生じる。その値は、

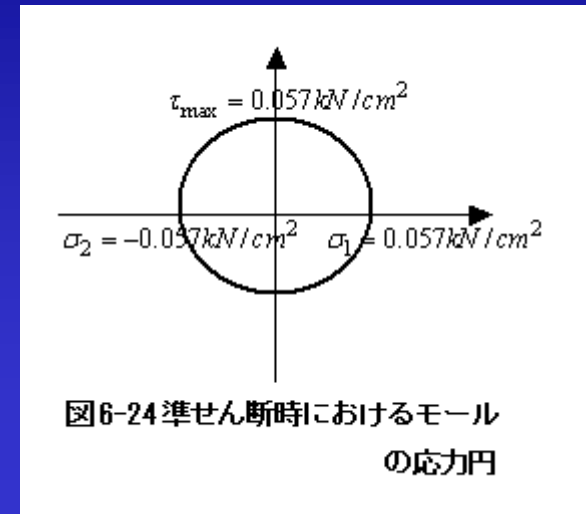
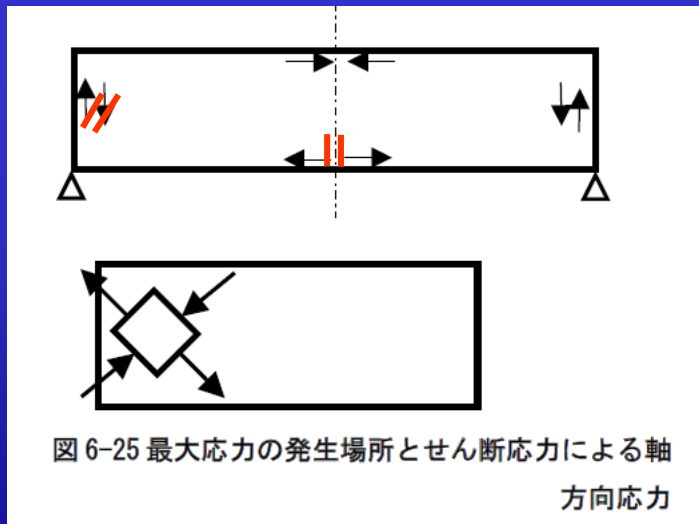
$$\tau_{\max} = k \frac{Q}{A} = 1.5 \frac{80}{2100} = 0.057 \text{ kN / cm}^2$$

$$\tau_{\max} = k \frac{Q}{A} = k \tau_0; \quad k = 1.5; \quad \tau_0 = \frac{Q}{A}$$

## 例題6-1の答え

また、モールの応力円を利用すると、純せん断の状態では、図6-24のようになり、45度の方向にせん断応力と同じ値の引張応力と圧縮応力が生じる。

単純梁に発生する最大応力は、図の位置にあり、



また、梁両端断面中央のせん断応力によって、45度の方向に軸方向応力が発生する。この応力によって、引張耐力のないコンクリートには、ひび割れが「ハ」の字型に発生することがある。

## まとめ

- 1) 曲げによる梁のせん断応力分布
- 2) 薄肉断面におけるせん断流れ理論
- 3) 非対称断面におけるせん断中心
- 4) モールの応力円
- 5) 演習