

静的構造物のたわみ



構造力学 I

第9回講義内容

- 1) 単純梁のたわみ
- 2) 片持ち梁のたわみ
- 3) 演習
- 4) まとめ

断面力と荷重の釣合、梁の微分方程式

梁の変形を支配する微分方程式は前回次のように得られた。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -P_w(x)$$

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

さらに、梁全体で断面が一様であると、上の2式は、次式の微分方程式となる。

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = P_w(x)$$

静的構造物のように、曲げモーメントの分布状態が先に分かっている場合は、梁の微分方程式を用いるのが最も簡単である。この場合は、2階の微分方程式を解くことになる。

単純梁のたわみ

静定構造物で、最も基本的な静的梁の変形と中央のたわみを求めてみよう。解析モデルは図9-1に示す単純梁で、中央に集中荷重が加わっている。梁の曲げモーメント分布は、下のようになっている。

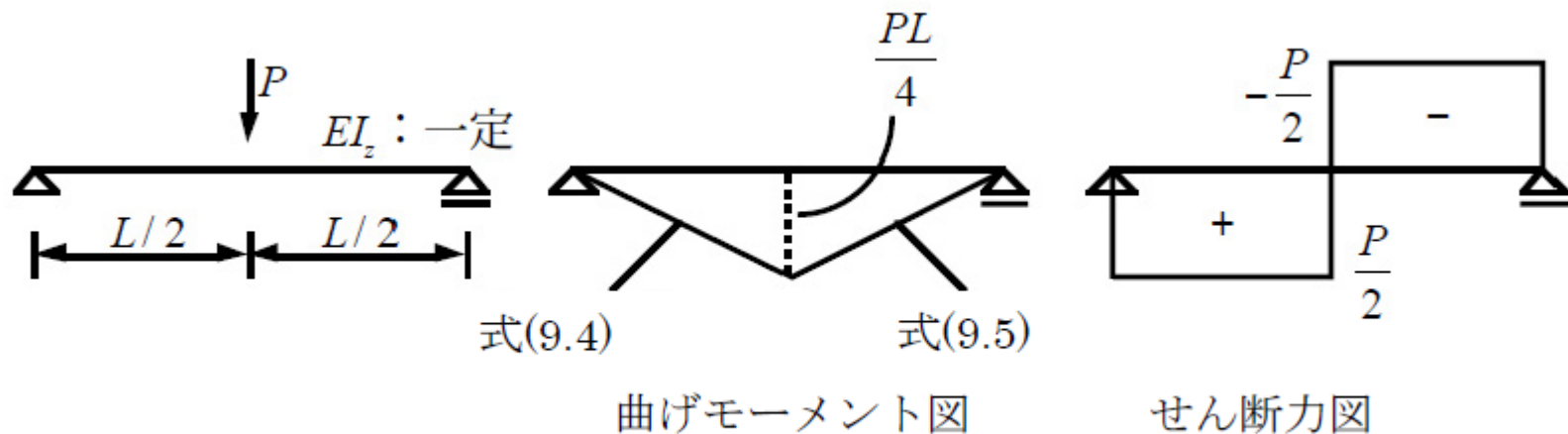


図 9-1 中央集中荷重を受ける単純梁の断面力分布

単純梁のたわみ

曲げモーメントの分布は、図9-2 に示されており、その関数は次のよう2 つに分けられた直線式で表される。

$$M(x) = \frac{P}{2}x \quad \left(0 \leq x < \frac{L}{2}\right)$$

$$M(x) = \frac{P}{2}(L - x) \quad \left(\frac{L}{2} \leq x < L\right)$$

曲げモーメントの関数が2つに分かれていることから、一般的に微分方程式は2つに分けて解く必要がある。しかし、曲げモーメント分布が対称であり、また断面が一様であることから変形状態も対称となり、梁の半分を解析することになる。最初に、梁の中央で変位が対称であるという条件を用いて解くことにする。

単純梁のたわみ

梁の微分方程式は、

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{P}{2}x \quad (0 \leq x < \frac{L}{2})$$

両辺を2階積分すると

$$EI_z \frac{dw}{dx} = -\frac{P}{4}x^2 + C_1$$
$$EI_z w = -\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

境界条件として、左端がピン支持であることから、たわみがゼロであり、梁の変形が対称であることから、中央部分では変位を許すが、その微分であるたわみの勾配はゼロとなる

$$w(0) = 0; \quad \theta\left(\frac{L}{2}\right) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

単純梁のたわみ

$$w(0) = 0; \quad \theta\left(\frac{L}{2}\right) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

従って、

$$EI_z w(0) = C_2 = 0$$

$$EI_z \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 = 0$$

上式より、積分定数は、以下のように求められる。

$$C_1 = \frac{P}{16} L^2$$

$$C_2 = 0$$

単純梁のたわみ

たわみ式を整理すると

$$EI_z w = -\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2 \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{16}L^2 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$w(x) = \frac{PL^3}{48EI_z} \left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\frac{x}{L} \right)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{PL^2}{16EI_z} \left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right)$$

最大たわみは、上式に $x = L/2$ を代入すると、

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{48EI_z}$$

上の式は、下図の左の部分のみ適用される

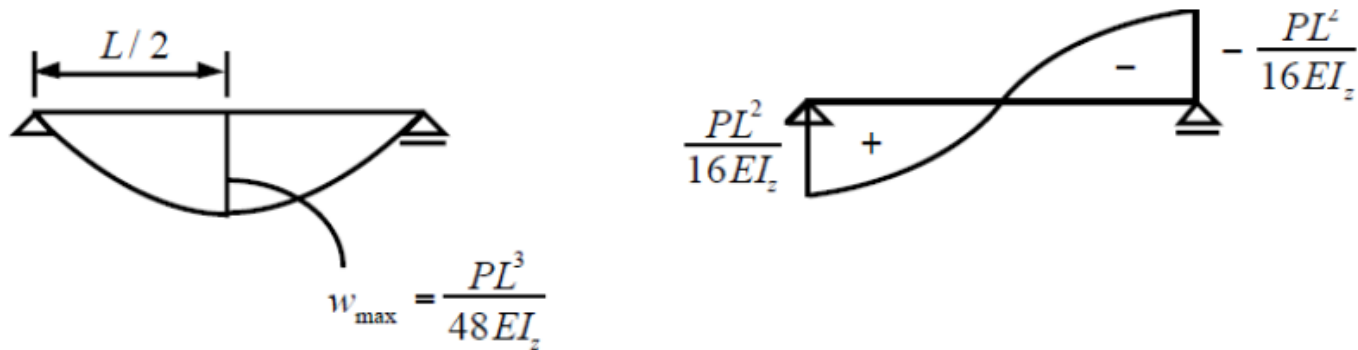
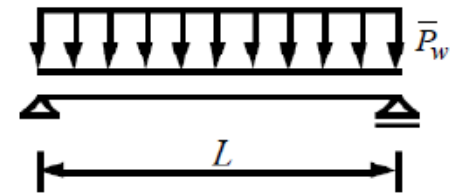


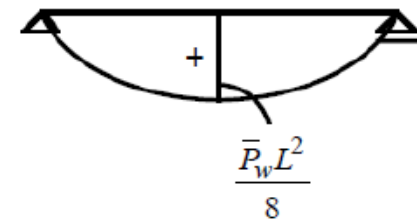
図 9-2 中央集中荷重を受ける単純梁のたわみと回転角分布

例題9-1

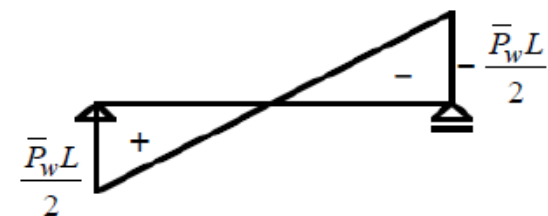
右図に示す等分布荷重を単純梁の最大変位を求めよ。



(a) 解析モデル



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

例題9-1の答え

曲げモーメント関数

$$M(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} x(L-x)$$

上式を梁の釣合式に適用すると

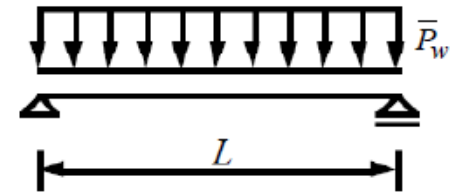
$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\bar{P}_w}{2} x(L-x)$$

上式を2回積分すると

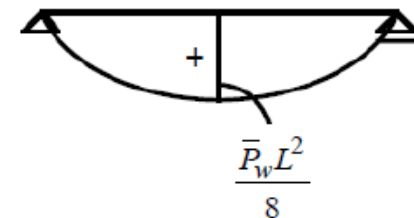
$$EI_z \frac{dw}{dx} = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(\frac{L}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$EI_z w = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(\frac{L}{6} x^3 - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

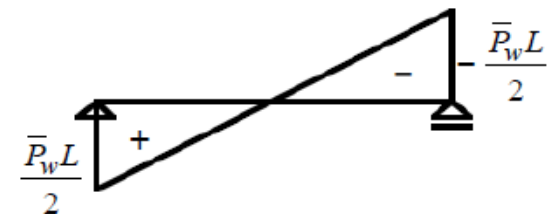
境界条件は、梁両端で変位がゼロ
となることより



(a) 解析モデル



(b) 曲げモーメント図



(c) せん断力図

例題9-1の答え

$$EI_z w(0) = C_2 = 0$$

$$EI_z w(L) = -\frac{\bar{P}_w}{2} \left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} \right) + C_1 L = 0$$

従って、積分定数は、

$$C_1 = \frac{\bar{P}_w L^3}{24}; \quad C_2 = 0$$

従って、変位 $w(x)$ は、

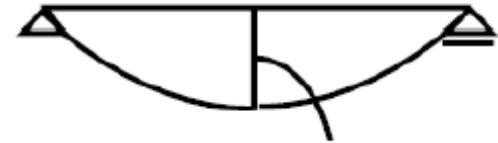
$$w(x) = \frac{\bar{P}_w L^4}{24EI_z} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right)$$

最大変位は、 $x = L/2$ の位置に、

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$

回転角分布は、上式を微分すると

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w L^3}{24EI_z} \left(4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right)$$



$$w_{\max} = \frac{5\bar{P}_w L^4}{384EI_z}$$

図 9-5(d) たわみ曲線と最大たわみ

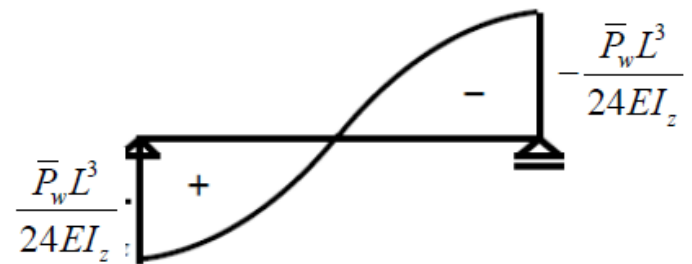


図 9-5(e) 回転角図

片持ち梁のたわみ

静的構造物の代表のひとつである片持ち梁の応力解析を行い、たわみ曲線と最大変位を求める。

曲げモーメントの関数より、梁の微分方程式は以下ようになる。

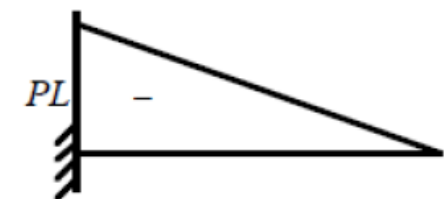
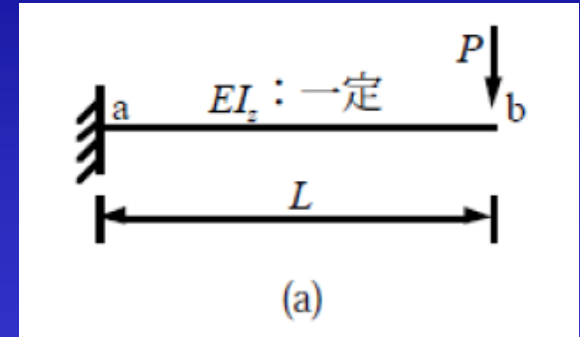
$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) = -P(x - L)$$

上式を2回積分すると

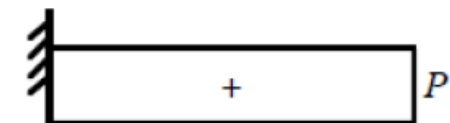
$$EI_z \frac{dw}{dx} = -P\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_1$$

$$EI_z w(x) = -P\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right) + C_1 x + C_2$$

として、変位 $w(x)$ の一般解が得られる。境界条件は、 a 端が固定であることから、



(d) 曲げモーメント図



(e) せん断力図

図 9-6 先端集中荷重を受ける片持ち梁モデルと断面力分布

片持ち梁のたわみ

$$EI_z w(0) = C_2 = 0$$

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_1 = 0$$

従って、以上の積分定数を用いると、変位は

$$w(x) = \frac{PL^3}{6EI_z} \left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right)$$

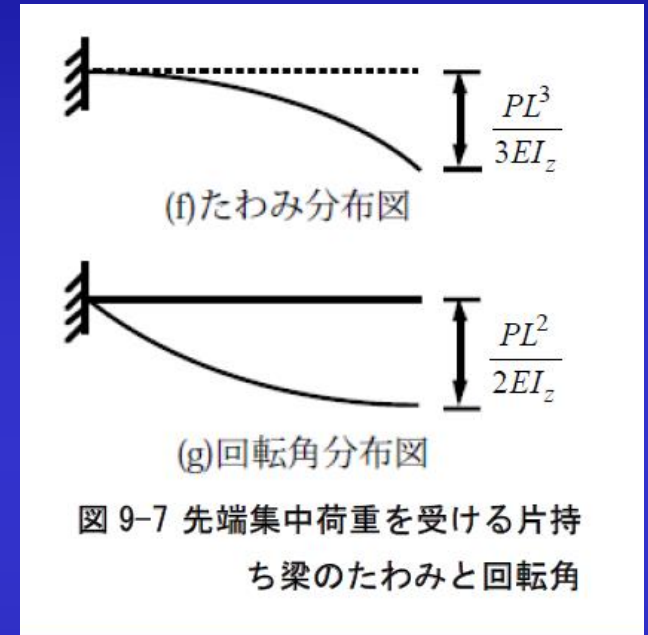
で与えられる。また、回転角 θ (x) は

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{PL^2}{2EI_z} \left(2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)$$

両関数の梁先端 b での値は、 $x = L$ を代入することで得られる

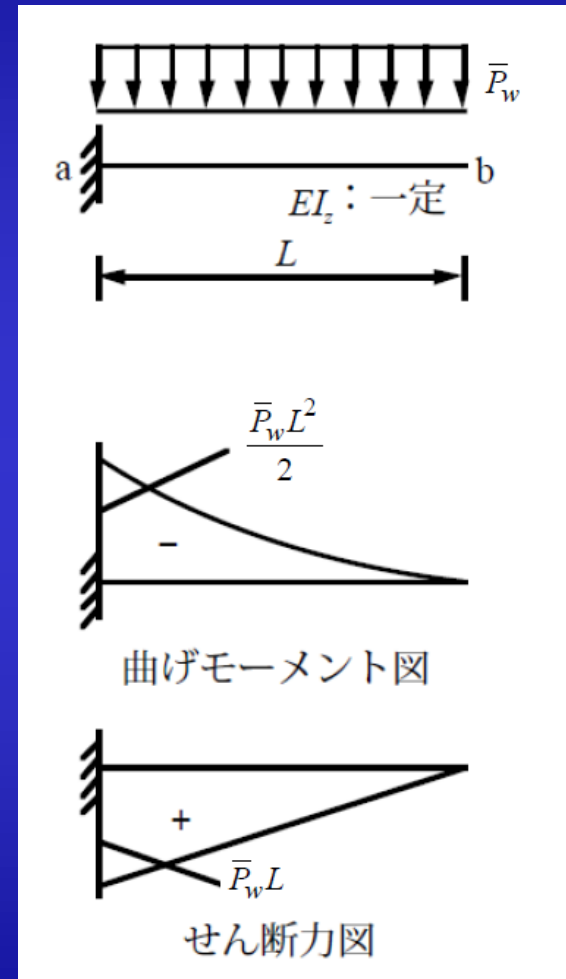
$$w_{\max} = w(L) = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

$$\theta(L) = \frac{PL^2}{2EI_z}$$



例題9-2

右図に示す等分布荷重を片持ち梁の最大変位を求めよ。



例題9-2の答え

曲げモーメント関数は、

$$M(x) = -\frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 - 2Lx + x^2)$$

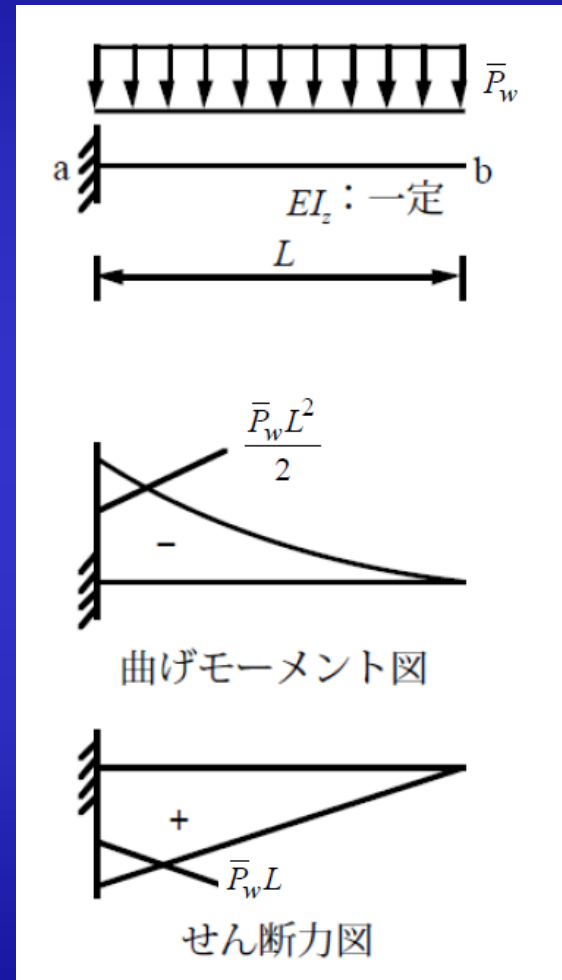
上の曲げモーメントの関数を用いると、梁の微分方程式は次式となる

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 - 2Lx + x^2)$$

両辺を2回積分すると

$$EI_z \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w}{2}(L^2 x - Lx^2 + \frac{1}{3}x^3) + C_1$$

$$EI_z w(x) = \frac{\bar{P}_w}{2}(\frac{L^2}{2}x^2 - \frac{L}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4) + C_1 x + C_2$$



例題9-2の答え

図中a点での境界条件は、固定端であることより、たわみと回転角がゼロとなる。従って、境界条件が次のように得られる。

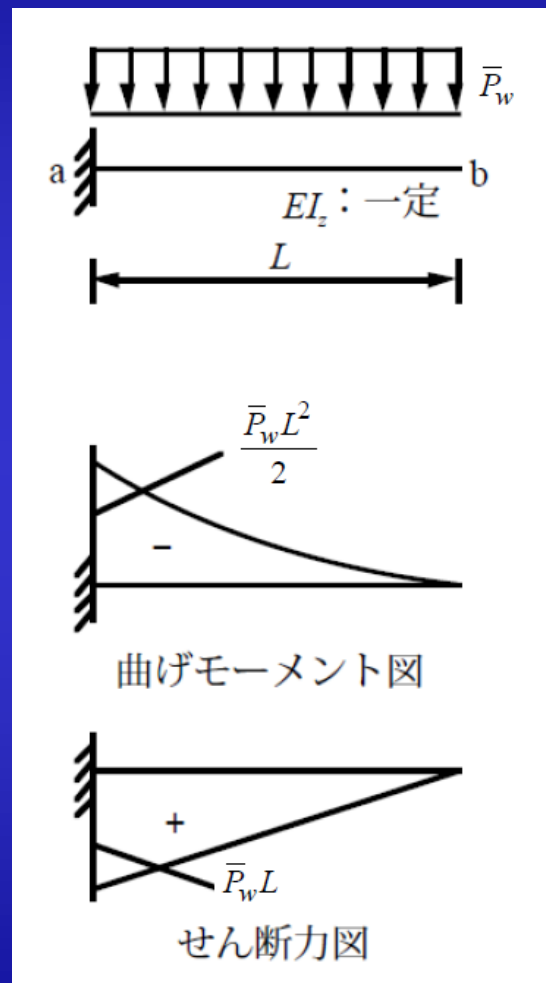
$$EI_z w(0) = C_2 = 0$$

$$EI_z \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = C_1 = 0$$

求めた積分定数を用いると、変位 $w(x)$ は、次式となる

$$EI_z w(x) = \frac{\bar{P}_w}{2} \left(\frac{L^2}{2} x^2 - \frac{L}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 \right) + C_1 x + C_2$$

$$w(x) = \frac{\bar{P}_w L^4}{24 EI_z} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



例題9-2の答え

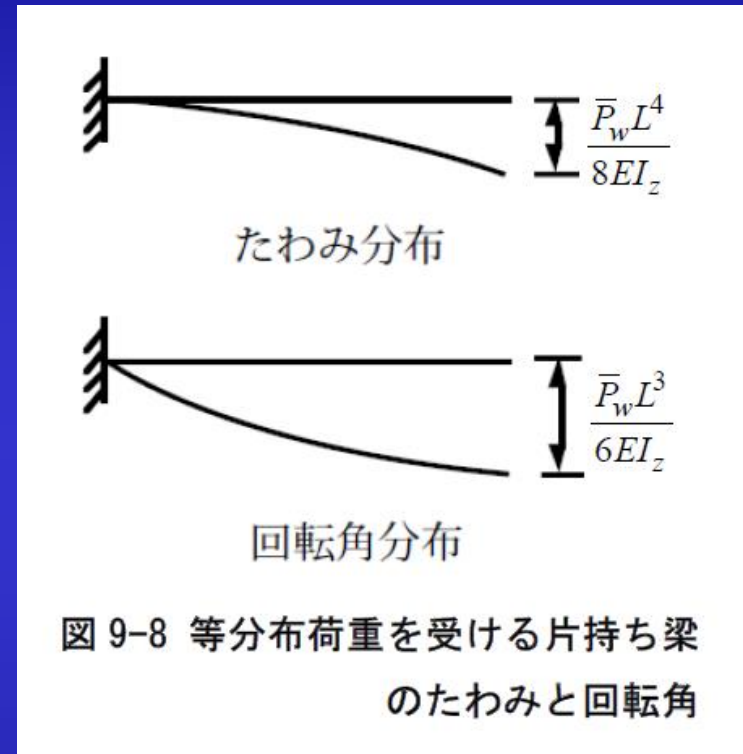
回転角は、たわみ式を一回微分することで次式のように得られる

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{P}_w L^3}{6EI_z} \left(3\left(\frac{x}{L}\right) - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right)$$

先端の変位(最大たわみ)と回転角は $x = L$ を代入すると

$$w_{\max} = w(L) = \frac{\bar{P}_w L^4}{24EI_z} (6 - 4 + 1) = \frac{\bar{P}_w L^4}{8EI_z}$$

$$\theta(L) = \frac{\bar{P}_w L^3}{6EI_z}$$



まとめ

静定構造物の代表である単純梁と片持ち梁のたわみを求めた

- 1) 単純梁のたわみ
- 2) 片持ち梁のたわみ