第1章　１質点系の自由振動

1.1　振動要素

　バネ定数kは、硬さを表す定数である。一般にバネは図のようなモデルで表され、バネ定数kは次式より定義される。

$$k = \frac{P}{y} \qquad ―――（1.1）$$

また、次式のようにも表される。

$$P = ky \qquad ―――（1.2）$$

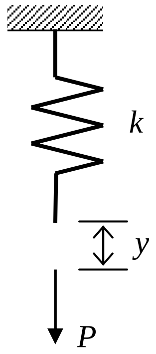
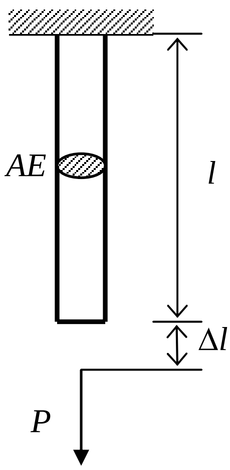


図1.1 バネ

[例題 1.1]
棒（長さ l、断面積 A、ヤング係数 E）のバネ定数を求めよ。



棒材

棒材軸方向の変位とひずみの関係は、

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x$$

で与えられる。変位場 $u(x)$ は荷重の状態から

$$u(x) = ax + b$$

となり、棒材の両端の境界条件は

$$u(0) = 0; \quad u(l) = \Delta l$$

であり、上式を適用すると、

$$u(0) = b = 0$$

$$u(l) = al = \Delta l; \quad a = \frac{\Delta l}{l}$$

として未定定数が決定される。従って、ひずみは次式で与えられることになる。

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d\frac{\Delta l}{l}x}{dx} = \frac{\Delta l}{l}$$

　次に、部材内の軸力は、

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E\varepsilon_x dA = EA\varepsilon_x$$

で与えられる。ここで、 σ_x は軸方向応力であり、応力とひずみの関係は線形で、次式で与えられる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

ひずみを軸力に代入すると

$$N = EA\varepsilon_x = EA\frac{\Delta l}{l}$$

となり、荷重点での力の釣合より、

$$P = N = EA\frac{\Delta l}{l}$$

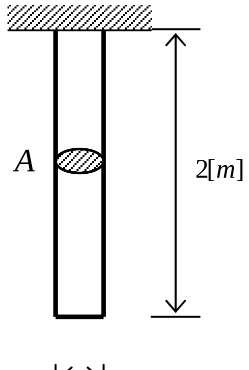
従って、バネ定数は、次式となる。

$$k = \frac{P}{\Delta l} = \frac{EA}{l} \qquad ―――（1.3）$$

[例題 1.2]
直径 1[㎜]、長さ 2[ｍ]の一端を固定したとき、他端におけるバネ定数を求めよ。ただし、針金はヤング係数 E=206[kN/㎜²]とする。

[例題 1.1]より、バネ定数は次式で与えられる。

$$k = \frac{P}{\Delta l} = \frac{AE}{l} \qquad ―――（1.4）$$



次に、各パラメータの次元を揃えることにする。ヤング係数 E 、断面積 A、長さ l はそれぞれ

$$E = 206\left[kN/mm^2\right]$$
$$= 206\times10^3\left[N/mm^2\right]$$

$$A = 0.5^2\pi$$
$$= 0.25\pi\left[mm^2\right]$$

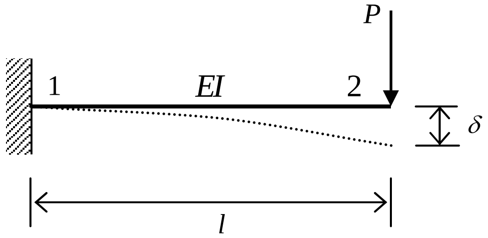
$$l = 2\left[m\right] = 2\times10^3\left[mm\right]$$

となる。これらを式（1.3）に代入すると、

$$k=\frac{0.25\pi\times206\times10^3}{2\times10^3}=80.89\left[N/mm\right]$$

として、バネ定数が得られる。

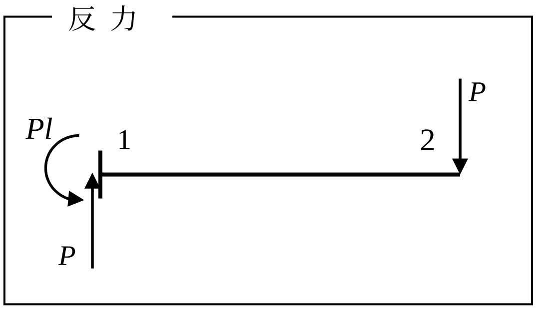
[例題 1.3]
図に示す片持ちばりで、自由端のバネ定数を求めよ。



片持ち梁

バネ定数を算出する上で、節点 2 での鉛直変位 y を求める必要がある。今回ははりの微分方程式を用いて、y を求めていくこととする。

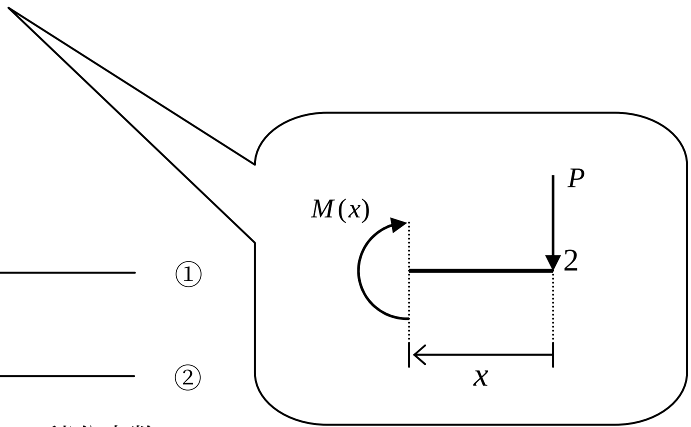
はりは各方向の力の釣り合いより図のような反力となり、また、力の釣合より



$$M(x)+Px=0$$
$$M(x)=-Px$$

として曲げモーメントの関数が求められる。この関数を用いると、はりの微分方程式は次式となる。

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-M(x)$$
$$=Px$$



上式の両辺を 2 回積分すると

$$EI\frac{dw}{dx}=EI\theta=\frac{1}{2}Px^2+C_1 \qquad ①$$

$$EIw=\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2 \qquad ②$$

[C_1、C_2 は積分定数]

はり左側の固定境界条件より

$x=l$ のとき、$\theta(0)=0$ かつ $w(0)=0$

まず、①式に $\theta(l)=0$ を適用すると、積分定数 C_1 が求められる。

$$EI\theta(l)=\frac{1}{2}Pl^2+C_1=0$$

$$C_1=-\frac{P}{2}l^2 \qquad \text{———————} \quad ③$$

次に、②③式、及び境界条件 $w(l)=0$ を用いると

$$EIw(0)=\frac{1}{6}Pl^3-\frac{P}{2}l^2\cdot l+C_2=0$$

$$C_2=\frac{P}{2}l^3-\frac{1}{6}Pl^3$$

$$=\frac{P}{3}l^3$$

として、積分定数 C_2 が求められる。以上より、変位関数は

$$w(x)=\frac{P}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}l^2x+\frac{1}{3}l^3\right)$$

となる。節点 2 の鉛直変位 δ は $x=0$ における変位であることから、

$$w(0)=\delta=\frac{P}{EI}\times\frac{1}{3}l^3$$

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI}$$

が得られる。

これより、バネ定数は以下のように求められる。

$$k=\frac{P}{y}=\frac{P}{\frac{Pl^3}{3EI}}$$

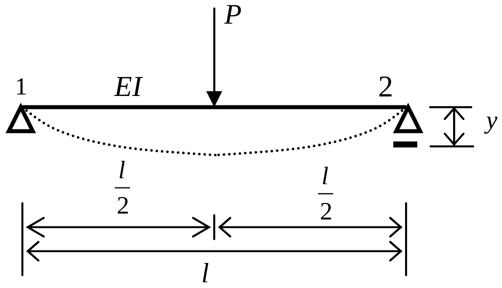
$$k=\frac{3EI}{l^3} \qquad \text{———} \quad (1.5)$$

[例題 1.4]
単純はりの中央に集中荷重が加わったときのバネ定数を求めよ。

はりの微分方程式より、中央のたわみ $y(x=l/2)$ は次式のように求めら

れている。

$$y=\frac{Pl^3}{48EI}$$

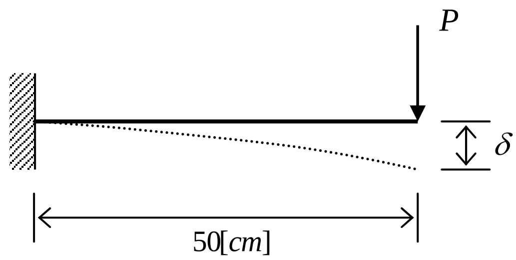


従って、バネ定数は、次式で与えられる。

$$k=\frac{P}{y}=\frac{48EI}{l^3}$$

―――（1.6）

[例題 1.5]
[例題 1.3]で求めた(1.5)式を用いて、断面が高さ h=3[㎜]、幅 b=5[㎝]、長さ l=50[㎝]のとき、自由端のバネ定数kを求めよ。ただし、ヤング係数 E=206[kN/㎜^{2}]とする。

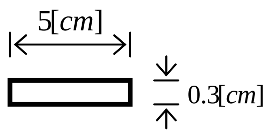


梁の断面二次モーメントIは、

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{5\times0.3^3}{12}=1.125\times10^{-2}\left[cm^4\right]$$

であり、ヤング係数は、

梁断面



$$E=206\left[kN/mm^2\right]\ \ =206\times10^5\left[N/cm^2\right]$$

従って、バネ定数は、式(1.5)より次のように求められる。

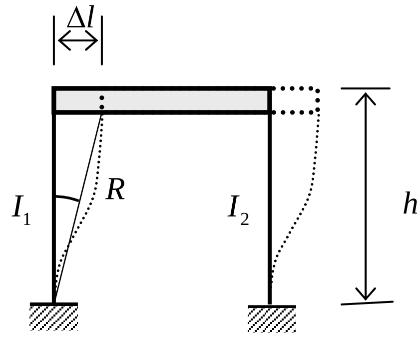
$$k=\frac{3EI}{l^3}=\frac{3\times206\times10^5\times1.125\times10^{-2}}{50^3}=5.562\left[N/cm\right]$$

[例題 1.6]
はりの曲げ剛性が無限大、つまり、剛である門形ラーメンのバネ定数を、たわみ角法を用いて求めよ。

この骨組は、節点回転角は全てゼロであり、未知変位は部材角のみとなる。

部材角と水平変位の関係は、

$$\Delta l = Rh; \quad R = \frac{\Delta l}{h}$$



であり、水平方向の力の釣合は次式で与えられる。

$$P = Q_1 + Q_2$$

せん断力は、次式で与えられる。

$$Q = -(\frac{M_{ij} + M_{ji}}{h})$$

また、部材端モーメントは、材端回転角がゼロであることを考慮すると、

$$M_{ij} = M_{ji} = \frac{2EI}{h}(-3R) = -\frac{6EIR}{h} = -\frac{6EI\Delta h}{h^2}$$

上式をせん断力に適用し、さらに、水平方向の釣合式に代入すると、

$$P = Q_1 + Q_2 = \frac{12E\Delta h}{h^3}(I_1 + I_2)$$

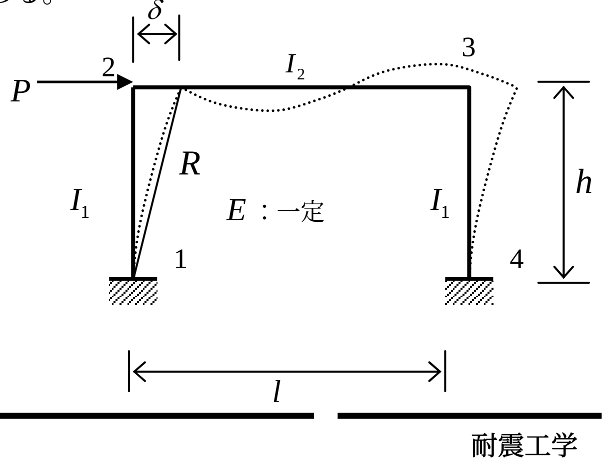
となり、従って、バネ定数は、

$$k = \frac{P}{\Delta h} = \frac{12E}{h^3}(I_1 + I_2) \qquad ――― (1.7)$$

として与えられる。

[例題 1.7]
図に示す門形ラーメンのバネ定数を、たわみ角法を用いて求めよ。

たわみ角法の解析手順にしたがって解析を進める。



ｉ）境界条件（柱端部固定）$\theta_1 = \theta_4 = 0$

ii）逆対称条件　$\theta_2 = \theta_3$

iii）たわみ角法の基本式

$$M_{12}=\frac{2EI_1}{h}\left(\theta_2-3R\right)$$

$$M_{21}=\frac{2EI_1}{h}\left(2\theta_2-3R\right)$$

$$M_{23}=M_{32}=\frac{2EI_2}{l}\left(3\theta_2\right)$$

$$M_{34}=\frac{2EI_1}{h}\left(2\theta_2-3R\right)=M_{21}$$

$$M_{43}=\frac{2EI_1}{h}\left(\theta_2-3R\right)=M_{12}$$

たわみ角法基本式

$$M_{ij}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_i+\theta_j-3R\right)$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_j+\theta_i-3R\right)$$

節点２でのモーメントの釣合より

$$M_{21}+M_{23}=0$$

$$\frac{2I_1}{h}\left(2\theta_2-3R\right)+\frac{2I_2}{l}\cdot 3\theta_2=0$$

$$\frac{3I_1}{h}R=\left(\frac{2I_1}{h}+\frac{3I_2}{l}\right)\theta_2$$

$$\therefore\theta_2=\frac{\dfrac{3I_1}{h}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\cdot R$$

iv）層方程式

$$P=Q_1+Q_2$$

$$Q_1=-\frac{M_{12}+M_{21}}{h}$$

$$=-\frac{6EI_1}{h^2}(\theta_2-2R)=-\frac{6EI_1}{h^2}\left(\frac{3\dfrac{I_1}{h}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}-2\right)R$$

$$=\frac{6EI_1}{h^2}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right)R$$

$$Q_2=-\frac{M_{34}+M_{43}}{h}=Q_1$$　（∵基本式）

以上より層方程式の釣合からバネ定数 K_H を求めると

$$P = 2Q_1$$
$$= \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right)\delta \qquad \because R = \frac{\delta}{h}$$

部材角と水平変位の関係

$$R = \frac{\delta}{h}$$

$$\therefore K_H = \frac{P}{\delta} = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right) \qquad ―――（1.8）$$

上で得られた結果を用いて、はりが剛の場合のバネ定数 $K_H^{'}$ を求め、検証する。これは $I_2 \to \infty$ となった場合なので

$$K_H^{'} = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right)$$

分母、分子を I_2 で割ると

$$K_H^{'} = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{1}{h}\dfrac{I_1}{I_2}+\dfrac{6}{l}}{\dfrac{2}{h}\dfrac{I_1}{I_2}+\dfrac{3}{l}}\right) \to \frac{24EI_1}{h^3} \qquad (I_2 \to \infty)$$

梁が剛のとき柱１本のバネ定数 K_H は

$$K_H = \frac{12EI}{h^3}$$

となり、一般に n 本あればそのバネ定数 K は次式となる

$$K = \sum_{i=1}^{n}\frac{12E_iI_i}{h^3}$$

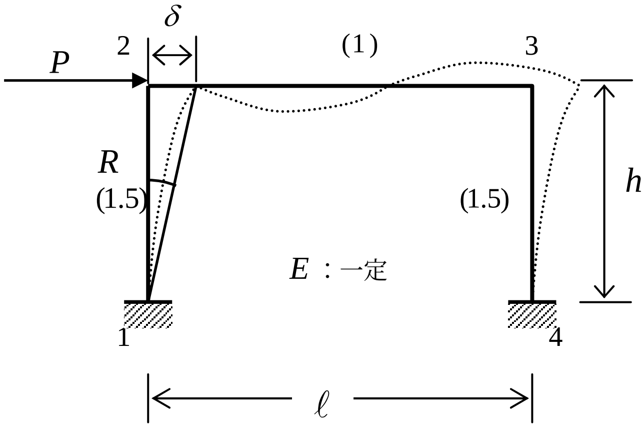
となって両柱が同一の部材で構成された梁が剛の門型フレームのバネ定数と一致する。

[例題 1.8]
図に示す門形ラーメンのバネ定数を、固定法を用いて求めよ。ただし、( )内は剛比であり、基準剛度は K_0=2EI/h とする。また、部材角は R、部材のヤング係数は E である。

ここでは、対称骨組で逆対称荷重が加わっていることから、逆対称変形、逆対称応力となる。逆対称条件を利用するために、部材 2 の有効剛比は、次式となる。

$$\bar{k}_2 = 1.5 \cdot k_2 = 1.5$$

節点２における分割係数は、



$$DF_c = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \qquad \text{柱の分割率}$$

$$DF_b = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.5 \qquad \text{はりの分割率}$$

となる。また、部材角による材端モーメントは、$\psi = -100X_1$ とすると、

$$M_{12} = -100 \cdot k = -150$$
$$M_{21} = -100 \cdot k = -150$$

となる。ただし、ここでは、$X_1 = 1$ としている。

以下に、表形式で固定法を適用する。

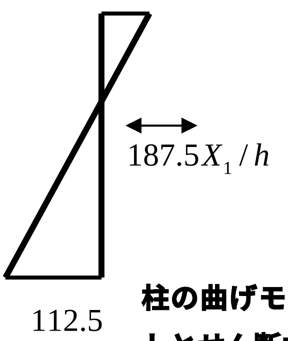
	下柱		右はり	外力
DF	0.5		0.5	
FEM	-150			150
D1	75		75	
C1	0			0
D2				
C2				
D3				
C3				
D4				
計	-75		75	

		上柱
FEM		-150
C1		37.5
C2		
C3		
計		-112.5

得られた結果から、柱のせん断力は、

$$Q = \frac{(112.5+75.0)X_1}{h} = \frac{187.5X_1}{h}$$

となる。これより、水平方向の力の釣合は、



柱の曲げモーメントとせん断力

$$\frac{1}{2}P = Q = \frac{187.5X_1}{h}$$

となり、未定定数 X_1 は次式となる

$$X_1 = \frac{1}{2\cdot 187.5}Ph$$

　先に仮定した部材角 ψ は、

$$\psi = -100X_1 = -\frac{100}{2\cdot 187.5}Ph$$

とした。ただし、実際の部材角 R との関係は、

$$\psi = -3RK_0 = -3\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{2EI}{h}$$

であり、したがって、

$$\frac{100}{2\cdot 187.5}Ph = 3\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{2EI}{h}$$

上式より、バネ定数は次式のように得られる。

$$K_H = \frac{P}{\Delta h} = \frac{2\cdot 187.5}{100}\cdot\frac{6EI}{h^3} = 22.5\frac{EI}{h^3}$$

例題 1.7 と比較してみよう。ただし、 $I_1 = 1.5I; I_2 = I$ である。

$$K_H = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right) = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{1.5+6\cdot 1}{2\cdot 1.5+3\cdot 1}\right) = \frac{15EI_1}{h^3} = \frac{22.5EI}{h^3}$$

1.2　１自由度系の自由振動

自由度１の振動方程式は、図より求められる。
まず、静的釣合より、

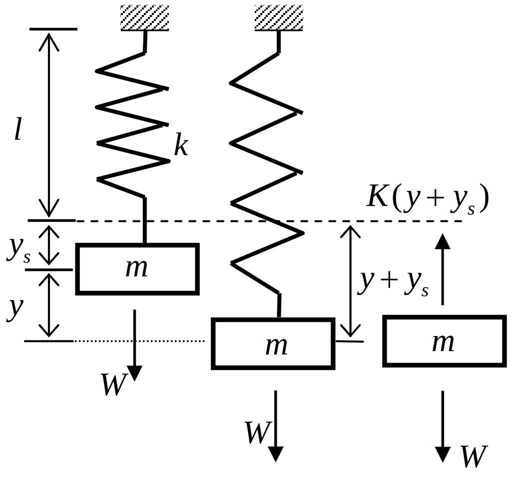
$$y_s = \frac{W}{k} \qquad ―――（1.9）$$

が得られている。
次に、ニュートンの第２法則より

$$m\frac{d^2(y+y_s)}{dt^2} = P$$

であり、右辺の力は、図の力の釣合を参考に、

$$m\frac{d^2(y+y_s)}{dt^2} = -k(y+y_s)+W$$



a)　静的釣合　b)自由振動　c)力の釣合

図 1.2　１自由度系の釣合

ここで、 y_s は t に無関係であり、また、静的釣合を考慮すると、1 自由度系の振動方程式が以下のように得られる。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \qquad ―――（1.10）$$

さらに、両辺を m で割ると、

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_n^2 y = 0; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ―――（1.11）$$

となる。
　得られた ω_n は自由振動の固有角振動と呼ばれ、 f_n 及び T_n は各々、固有振動数、固有周期という。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad ―――（1.12）$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad ―――（1.13）$$

固有周期は、次の方法でも近似的に求められる。

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{mg}{k}}$$
$$\approx \frac{1}{5}\sqrt{\eta}; \quad \eta = \frac{mg}{k} = \frac{W}{k}; \quad g = 980\left[\frac{cm}{\sec^2}\right] \qquad \text{———（1.14）}$$

この式は、**Geiger の重力式**と呼ばれる。

[例題 1.9]
初期条件の下で、任意の定数 C、D を求め、質点の運動を求めよ。

振動方程式(1.10)の解は次式で与えられる。

$$y = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \qquad \text{———（1.15）}$$

ここで、初期条件を次のように与える。

$t = 0$ において $y = y_0$、$\dot{y} = v_0$

まず、初期変位について

$$y_0 = C\cos 0 + D\sin 0$$
$$C = y_0$$

次に、(1.15)式を微分すると、

$$\dot{y} = -C\omega_n \sin\omega_n t + D\omega_n \cos\omega_n t \qquad \text{———（1.16）}$$

となり、上式に初期条件を適用すると

$$v_0 = -C\omega_n \sin 0 + D\omega_n \cos 0$$
$$v_0 = D\omega_n$$
$$D = \frac{v_0}{\omega_n}$$

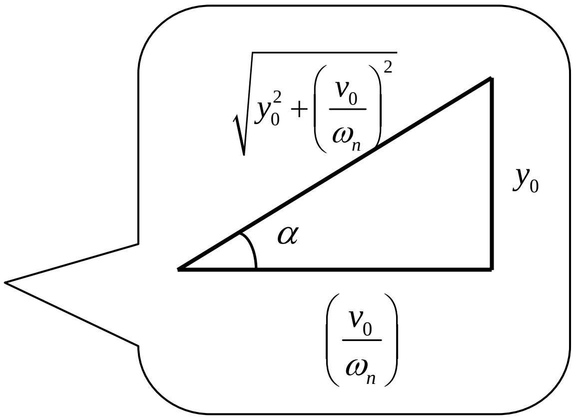
となる。求めた定数C 、Dを(1.15)式に代入すると、初期条件に対応する解が次のように得られる。

$$y = y_0\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \qquad \text{———（1.17）}$$

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$$
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{a}{b}$$

次に、三角関数の合成を用いて式(1.17)を変形すると、

$$y=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}\sin(\omega_n t+\alpha) \qquad ――― \text{（1.18）}$$



となる。このとき α は、

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{y_0}{\frac{v_0}{\omega_n}}\right) \qquad ――― \text{（1.19）}$$

[例題 1.10]
ばねに吊るした重りを y_0 だけ手で引き下げ、静止した状態で手を放した。この初期条件の元で積分定数を求めよ。

振動方程式(1.10)の一般解とその解を１回微分した速度を以下に示す。

$$\begin{aligned}y&=C\cos\omega_n t+D\sin\omega_n t\\ \dot{y}&=-C\omega_n\sin\omega_n t+D\omega_n\cos\omega_n t\end{aligned} \qquad ――― \text{（1.20）}$$

次に、初期条件

$t=0$ のとき $y=y_0$、$\dot{y}=0$

を上式に適用する。

$$\begin{aligned}&y_0=C\cos 0+D\sin 0\\ &C=y_0\end{aligned}$$

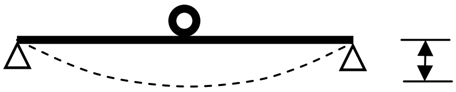
$$\begin{aligned}&-C\omega_n\sin 0+D\omega_n\cos 0=0\\ &D\omega_n=0;\quad D=0\end{aligned}$$

求めた定数 C、D を(1.20)式に代入すると、問題の解が得られることになる。

$$y=y_0\cos\omega_n t \qquad ――― \text{（1.21）}$$

[例題 1.11]
重量 W=588[N]の重りを静かに単純ばりに載せた時、はりは 5[㎝]たわんで静止した。この重りをはりの上で自由振動させたときの固有振動数 f_n と固有周期 T_n を求めよ。ただし、はりの重量は無視する。

与えられた値より、バネ定数を求める。



$$k = \frac{W}{y} = \frac{588}{0.05} = 11760\left[N/m\right]$$

次に、次元を考慮して質量を求める。

$$m = \frac{W}{g} = \frac{588}{9.8} = 60\left[kg\right]$$

$1\left[N\right]$ は $1\left[kg\right]$ の質量に $1\left[m/\sec^2\right]$ の加速度を生じさせる。

$1\left[N\right] = 1\left[kg\right] \times 1\left[m/\sec^2\right] = 1\left[kg \cdot m/\sec^2\right]$

固有振動数、固有周期を求める。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{11760}{60}} = 14.0\left[rad/\sec\right]$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{14.0}{2\pi} = 2.23\left[Hz\right]$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 0.449\left[\sec\right]$$

次に、重力式を用いて固有周期を求める。

$$T_n \approx \frac{1}{5}\sqrt{5} = 0.2 \times 2.236 = 0.447\left[\sec\right]$$

[問題 1.1]
図に示す塔の固有周期を求めよ。ただし、塔は片持ちはりとし、はりの重量は無視する。ただし、はりの鉄骨ヤング係数と断面二次モーメントは以下に示す。　$E = 2.06 \cdot 10^4\left[kN/cm^2\right]$

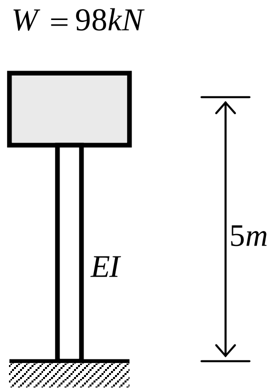
$I = 10^5\left[cm\right]$

質量：

$$m = \frac{98\left[kN\right]}{9.8} = \frac{9.8 \times 10^4\left[N\right]}{9.8} = 1.0 \times 10^4\left[kg\right]$$

バネ定数：

$$k=\frac{3EI}{h^3}=\frac{3\times 2.06\times 10^4\times 10^5}{5^3\times 10^6}$$
$$=49.4\left[kN/cm\right]=4.94\times 10^6\left[N/m\right]$$



固有周期：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times 3.14\sqrt{\frac{10^4}{4.94\times 10^6}}$$
$$=6.28\times 0.450\times 10^{-1}=0.283\left[\sec\right]$$

次に、重力式を用いて固有周期を求めてみよう。まず、先端に重量$W\left[N\right]$の水平荷重を掛けたときの変位を次式で求める。

$$\eta=\frac{W}{k}=\frac{98\times 10^3}{4.94\times 10^6}=1.98\times 10^{-2}\left[m\right]$$
$$=1.98\left[cm\right]$$

したがって、重力式を用いると次のように固有周期が求められる。

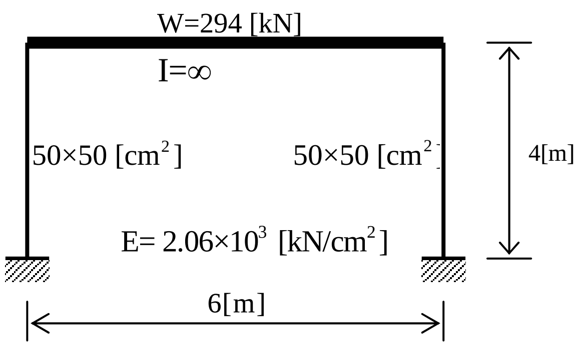
$$T_n=\frac{1}{5}\sqrt{\eta}=0.2\sqrt{1.98}=0.2\times 1.407$$
$$=0.281\left[\sec\right]$$

[問題 1.2]
図に示すはりが剛の門型フレームの固有振動数を求めよ

柱断面:	**コンクリートヤング係数:**	**重量:**
$b\times D=50\times 50\left[cm\right]$	$E=2.06\times 10^3\left[kN/cm^2\right]$	$W=294\left[kN\right]$

質量：

$$m=\frac{294\left[kN\right]}{9.8}=\frac{294\times 10^3\left[N\right]}{9.8}=3.0\times 10^4\left[kg\right]$$



断面二次モーメント：

$$I=\frac{bD^3}{12}=\frac{50\times 50^3}{12}=5.21\times 10^5\left[cm^4\right]$$

バネ定数：

$$k = 2\frac{12EI}{h^3} = 2\frac{12\times 2.06\times 10^3 \times 5.21\times 10^5}{4^3\times 10^6}$$
$$= 402\left[kN/cm\right] = 4.02\times 10^7\left[N/m\right]$$

固有周期：

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\times 3.14\sqrt{\frac{3.0\times 10^4}{4.02\times 10^7}}$$
$$= 6.28\times 0.273\times 10^{-1} = 0.171\left[\mathrm{sec}\right]$$

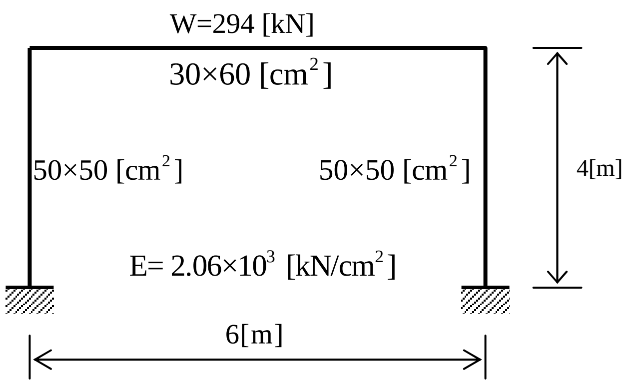
次に、重力式を用いて固有周期を求めてみよう。まず、先端に重量$W\left[N\right]$の水平荷重を掛けたときの変位を次式で求める。

$$\eta = \frac{W}{k} = \frac{294\times 10^3}{4.02\times 10^7} = 0.731\times 10^{-2}\left[m\right]$$
$$= 0.73\left[cm\right]$$

したがって、重力式を用いると次のように固有周期が求められる。

$$T_n = \frac{1}{5}\sqrt{\eta} = 0.2\sqrt{0.731} = 0.2\times 0.854$$
$$= 0.171\left[\mathrm{sec}\right]$$

[問題 1.3]
図に示す門型フレームの固有周期を求めよ。水平方向のバネ定数は既に求めた式を利用されたい。



コンクリートのヤング係数の単位を次のように合わせる。

$$E = 2.06\times 10^3\left[kN/cm^2\right]$$
$$= 2.06\times 10^7\left[kN/m^2\right]$$

柱と梁のそれぞれの断面二次モーメントI_h、I_bは

$$I_h = \frac{bD^3}{12} = \frac{50\times50^3}{12}$$
$$= 5.208\times10^5\left[cm^4\right] = 5.208\times10^{-3}\left[m^4\right]$$

$$I_b = \frac{bD^3}{12} = \frac{30\times60^3}{12}$$
$$= 5.4\times10^5\left[cm^4\right] = 5.4\times10^{-3}\left[m^4\right]$$

$W = 294\left[kN\right]$
$= 294\times10^3\left[N\right]$

$E = 2.06\times10^3\left[kN/cm^2\right]$

$= 2.06\times10^7$ (kN/m^2)

として与えられる。

バネ定数kは、先に求めた式より

$$k = \frac{12\times2.06\times10^7\times5.208\times10^{-3}}{4^3}\left(\frac{\dfrac{5.208\times10^{-3}}{4}+\dfrac{6\cdot5.4\times10^{-3}}{6}}{\dfrac{2\cdot5.208\times10^{-3}}{4}+\dfrac{3\cdot5.4\times10^{-3}}{6}}\right)$$
$$= 2.011\times10^4\left(\frac{1.302+5.4}{2.604+2.7}\right)$$
$$= 2.011\times10^4\times1.264$$
$$= 2.542\times10^4\left[kN/m\right]$$
$$= 254.2\left[kN/cm\right] = 2.542\times10^7\left[N/m\right]$$

門型骨組の水平剛性は式(1.8)より

$$k = \frac{12EI_1}{h^3}\left(\frac{\dfrac{I_1}{h}+\dfrac{6I_2}{l}}{\dfrac{2I_1}{h}+\dfrac{3I_2}{l}}\right)$$

次に、質量mは

$$m = \frac{W}{g} = \frac{294\times10^3\left[N\right]}{9.8} = 3.0\times10^4\left[kg\right]$$

重量$W\left[N\right]$

重力加速度$g\left[m/\sec^2\right]$

・単位に注意！

で与えられるから、これより固有周期Tは

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3.0\times10^4}{2.542\times10^7}} = 0.216\left[\sec\right]$$

また、重力式を用いれば

$$T_n = 0.2\sqrt{\eta} = 0.2\sqrt{\frac{W}{k}} = 0.2\sqrt{\frac{294}{254.2}} = 0.215\left[\sec\right]$$

として、固有周期が求められ、理論解とほぼ同一解が得られる。