第２章　減衰を持つ１質点系の振動

2.1　減衰を持つ質点系の振動方程式

減衰を有する振動系は図を参考にすると次式で与えられる。

$$m\ddot{y} = -k(y + y_s) + W - c\dot{y}$$

〔下向きの力を正とする〕

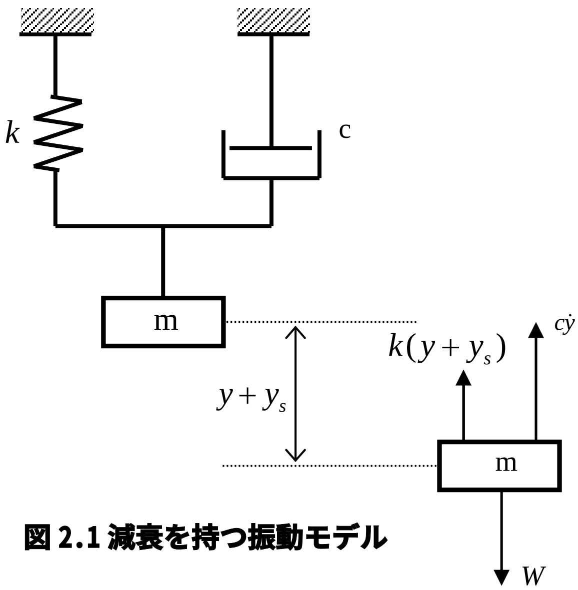


図 2.1 減衰を持つ振動モデル

静的釣合式を用いて整理すると

静的釣合

$$y_s = \frac{W}{k}$$

$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$$

右辺を左辺に移項すると減衰項を有する 1 質点系の振動方程式が得られる。

$$\boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0} \qquad ―――― (2.1)$$

2.2　振動方程式を解く

ここでは、減衰を有する振動方程式を解くことにする。振動方程式(2.1)の解を次式で仮定する。

$$y = Ae^{st} \qquad ―――― (2.2)$$

時間微分して速度と加速度を求める。

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ase^{st} = sy \\ \ddot{y} &= As^2e^{st} = s^2y \end{aligned} \qquad ―――― (2.3)$$

これらを振動方程式に代入し、整理すると

$$\begin{aligned} & m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = (ms^2 + Cs + k)Ae^{st} = 0 \\ & ms^2 + Cs + k = 0 \\ & s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \end{aligned}$$

両辺を各項の共通因数 Ae^{st} $(\neq 0)$ で割る

となり、s についての二次方程式が得られる。次に、解の公式を用いて

s を求める

解の公式

$ax^2+bx+c=0$ のとき、

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$s_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}} \qquad ―――― (2.4)$$

となり、上式の値を用いて、次の 2 つの解が求められる。

$$y_1=A_1e^{s_1t} \qquad y_2=A_2e^{s_2t}$$

n 元同次微分方程式の一般解は解を $e^{\lambda t}$ と仮定して、λ の代数方程式の根 λ_k（$k=1,2\cdots\cdots n$）を用いて積分定数と $e^{\lambda_k t}$ の積のｎ個の一次結合で表される。

これより一般解は、次式となる。

$$y=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \qquad ―――― (2.5)$$

ここで、A_1、A_2 は積分定数で初期条件より決定される。

係数 $c\dot{y}$ で減衰力そのものの大きさは与えられるが、系全体に与える効果は m 、k に生じる力と比較して決める必要がある。ここでは m 、k に関連した標準の減衰量を考え、c の大きさを臨界減衰値の何倍であるかという表現をする。臨界減衰値 c_{cr} は便宜上、(2.4)式の根号内の値を 0 にする量として考える。

式(2.4)の根号内を c_{cr} を用いて表すと

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}=\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2-\omega_n^2=0$$

となり、これにより、c_{cr} が得られる。

$$c_{cr}=2\sqrt{mk}=2\sqrt{m^2\frac{k}{m}}=2m\omega_n \qquad ―――― (2.6)$$

従来の c との関係を臨界減衰値 c_{cr} との比 h を用いて表す。

$$h=\frac{c}{c_{cr}} \qquad ―――― (2.7)$$

この h を**減衰定数**と呼ぶ。

減衰定数 h を用いて、得られた $s_{1,2}$ を表すと、

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
$$= -\frac{2hm\omega_n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2hm\omega_n}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$
$$= -h\omega_n \pm \sqrt{(h\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$
$$= \left(-h \pm \sqrt{1-h^2}\right)\omega_n \qquad ―――― (2.8)$$

となる。根号内の値が正・0・負の場合に対応して、振動性状は大きく変化することになり、これについては、次節で詳細に述べる。

2.3　減衰定数による振動状態

減衰定数の値によって異なる振動状態を示すが、本節では、3 つの状態に分類して、その状態を説明する。

1）$h > 1$ の場合（過減衰）

このとき、根号内は正で、$s_{1,2}$ とも次のように負の実数となる。

$$s_1 = (-h + \sqrt{h^2 - 1})\omega_n = -r_1$$
$$s_2 = (-h - \sqrt{h^2 - 1})\omega_n = -r_2 \qquad ―――― (2.9)$$

上式を用いると振動方程式の一般解は次式となる。

$$y = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t} \qquad ―――― (2.10)$$

この関数の中の $e^{-r_1 t}$ は、時刻 t が進むと 0 に漸近する。これは減衰が大き過ぎてもはや振動しない状態を示す。この $h > 1$ の状態を**過減衰**と呼ぶ。

2）$h = 1$ の場合（臨界減衰）

減衰定数 $h = 1$ を(2.8)式に代入すると、$s_1 = s_2 = -\omega_n$ となり、解は一つとなる。従って、他の一つの特解を求めなければならない。特解を求

めるには

$$y = f(t)e^{st} \qquad ———— \ (2.11)$$

とおき、$f(t)$を決めればよい。上式を時間tで 2 回微分し

$$\dot{y} = \dot{f}e^{st} + sfe^{st}$$
$$\ddot{y} = \ddot{f}e^{st} + 2s\dot{f}e^{st} + s^2e^{st}$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

各値を(2.1)式に代入すると

$$\ddot{f}e^{st} + 2s\dot{f}e^{st} + s^2 fe^{st} + \frac{c}{m}\dot{f}e^{st} + \frac{c}{m}sfe^{st} + \omega_n{}^2 fe^{st} = 0$$

となる。上式に$s = -\omega_n$を代入し、$c/m = 2h\omega_n = 2\omega_n$を考慮すると、下式が得られる。

$$\ddot{f} - 2\omega_n\dot{f} + \omega_n^2 f + 2\omega_n\dot{f} - 2\omega_n^2 f + \omega_n{}^2 f = 0$$
$$\ddot{f}(t) = 0$$

上式を満足する解の中で、定数以外の最も簡単な解は

$$f(t) = t \qquad ———— \ (2.12)$$

であり、これを採用すると

$$y = te^{st}$$

がもう 1 つの特解となる。これより、減衰定数$h = 1$の場合の一般解は

$$y = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \qquad ———— \ (2.13)$$

〔A_1、A_2は積分定数〕

となる。

３）$h < 1$の場合（減衰振動）

　減衰定数$h < 1$のとき、(2.8)式の根号内は負となるので、虚数単位iを用いて表す。

$$s_{1,2}=\left(-h\pm i\sqrt{1-h^2}\right)\omega_n \qquad i=\sqrt{-1} \qquad ———— (2.14)$$

この式を(2.5)式に使用して次式を得る。

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{\left(-h+i\sqrt{1-h^2}\right)\omega_n t}+A_2 e^{\left(-h-i\sqrt{1-h^2}\right)\omega_n t} \\ &= A_1 e^{-h\omega_n t}\cdot e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_n t}+A_2 e^{-h\omega_n t}\cdot e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_n t} \\ &= e^{-h\omega_n t}\left\{A_1 e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_n t}+A_2 e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_n t}\right\} \qquad ———— (2.15) \end{aligned}$$

ここで、オイラーの公式

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta-i\sin\theta \qquad ———— (2.16) \end{aligned}$$

を(2.15)式に代入すると

$$\begin{aligned} y &= e^{-h\omega_n t}\left\{A_1\left(\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t+i\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t\right)+A_2\left(\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t-i\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t\right)\right\} \\ &= e^{-h\omega_n t}\left\{\left(A_1+A_2\right)\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t+i\left(A_1-A_2\right)\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t\right\} \\ & \qquad ———— (2.17) \end{aligned}$$

となり、ここで、$C=A_1+A_2$、$D=i\left(A_1-A_2\right)$と置くと、上式は

$$y=e^{-h\omega_n t}\left\{C\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t+D\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t\right\} \qquad ———— (2.18)$$

となる。得られた解は、振幅が時間と共に減衰する$e^{-h\omega_n t}$と単振動の積で表される。

　この式は以下のようにも表現できる。

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\alpha=\tan^{-1}\frac{a}{b}$$

$$y=Ae^{-h\omega_n t}\sin(\sqrt{1-h^2}\omega_n t+\phi)$$
$$A=\sqrt{C^2+D^2}\ 、\ \phi=\tan^{-1}\frac{C}{D} \qquad ———— (2.19)$$

　式(2.19)中の$\sin(\sqrt{1-h^2}\omega_n t+\phi)$は角速度$\sqrt{1-h^2}\omega_n$の単振動であり、振幅$Ae^{-h\omega_n t}$は時間$t$とともに減衰する関数である。$h<1$の状態を under damping といい、一般の構造物の振動はほとんどこの振動である。

減衰振動の固有角振動数は$\sqrt{1-h^2}\,\omega_n$で、減衰のない振動系の固有角振動数ω_nに比べて$\sqrt{1-h^2}$倍（$h<1$）小さくなる。このときの固有周期Tは$\omega = 2\pi / T$より、次式となる。

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-h^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1-h^2}}; \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \text{————}\ (2.20)$$

2.4　対数減衰率

振動状態における減衰の程度を表すものとして、減衰定数h以外に対数減衰率と呼ばれるものがある。

右図中の隣り合う極大値をY_1、Y_2、周期をT、Y_1の時刻をt_1とすると対数減衰率δは次式で定義される。

$$\begin{aligned}\delta = \log_e\frac{Y_1}{Y_2} &= \log_e\frac{Ae^{-h\omega_n t_1}}{Ae^{-h\omega_n t_2}} \\ &= \log_e e^{-h\omega_n(t_1-t_2)} \\ &= \log_e e^{h\omega_n(t_2-t_1)} \\ &= h\omega_n\left(t_2-t_1\right) \\ &= h\omega_n T \\ &= h\omega_n\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-h^2}}\end{aligned}$$

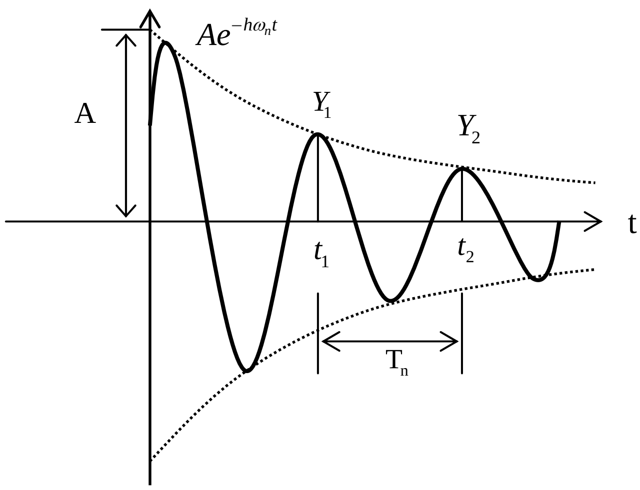


図 2.2 減衰振動

従って、減衰率と対数減衰率の関係が得られる。

$$\delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \qquad \text{————}\ (2.21)$$

実際の構造物では、hの値は非常に小さく、記録されたものを振動として認識できるのは$h<0.3$程度である。例として、極大値の比を$Y_1/Y_2=10$としたとき

$$\delta = \log_e\frac{Y_1}{Y_2} = \log_e 10 = 2.301$$

これを式(2.21)に使用して、減衰定数hを求めてみよう。まず、式(2.21)を変更する。

$$\delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$$
$$\sqrt{1-h^2}\,\delta = 2\pi h$$
$$\left(1-h^2\right)\delta^2 = 4\pi^2 h^2$$
$$\left(\delta^2 + 4\pi^2\right)h^2 = \delta^2$$

上式を h について解くと

$$h^2 = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}$$
$$h = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \qquad ―――― \ (2.22)$$

となる。ここで、先の求めた δ を代入すると

$$h^2 = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2} = 0.1183\ ;\quad h = 0.344$$

として減衰定数が求められる。このように、振幅が大きく減衰しても $h = 0.3$ 程度であるので、式(2.21)は h^2 が 1 に比べて小として次のように近似できる。

$$\delta = 2\pi h$$
$$h = \frac{\delta}{2\pi} \qquad ―――― \ (2.23)$$

ここで先の値を代入してみると

$$h = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2.301}{2\cdot 3.14} = 0.366$$

として、良い近似が得られる。誤差の程度として、式(2.22)、(2.23)の関係を右に図示する。

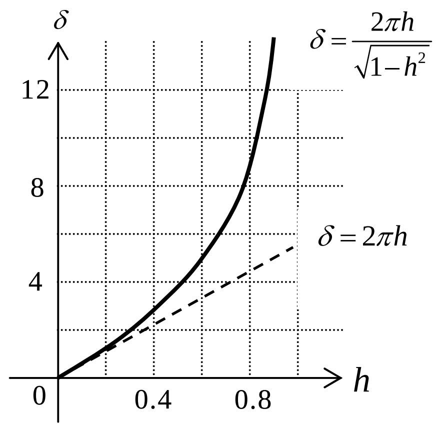


図 2.3 減衰定数と対数減衰率

[例題 2.1]

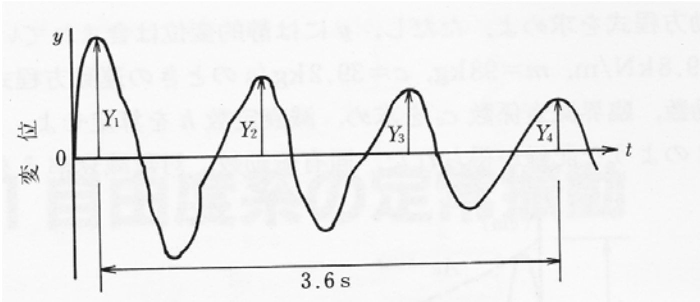
減衰自由振動の記録が図のように与えられている。Y_1 と Y_4 が次のように得られた。Y_1＝8.72　；　Y_4＝4.36 [cm]

この記録より、振動系の固有振動数、対数減衰率、減衰定数を求めよ。

１）固有振動数 f

3 サイクルで $T = 1.2[\sec]$、従って、固有周期は、

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.2} = 0.8333[Hz]$$



減衰自由振動の記録

となる。

２）対数減衰率 δ

ここで、

$$\delta = \log_e \frac{Y_1}{Y_2} = \log_e \frac{Y_2}{Y_3} = \log_e \frac{Y_3}{Y_4}$$

$$\log_e a \cdot b \cdot c = \log_e a + \log_e b + \log_e c$$

より、

$$\begin{aligned} \log_e \frac{Y_1}{Y_4} &= \log_e \frac{Y_1}{Y_2} \cdot \frac{Y_2}{Y_3} \cdot \frac{Y_3}{Y_4} \\ &= \log_e \frac{Y_1}{Y_2} + \log_e \frac{Y_2}{Y_3} + \log_e \frac{Y_3}{Y_4} \\ &= \delta + \delta + \delta \\ &= 3\delta \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\delta = \frac{1}{3} \log_e \frac{Y_1}{Y_4}$$

上式に、Y_1、Y_4 の値を代入し、対数減衰率 δ を求める。

$$\delta = \frac{1}{3} \log_e \frac{Y_1}{Y_4} = \frac{1}{3} \log_e \frac{8.72}{4.36} = 0.231$$

３）減衰定数 h

式(2.23)を用いて、減衰定数を求める

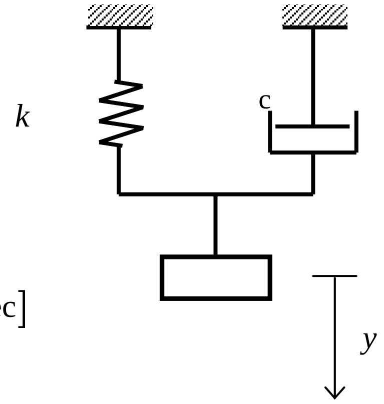
$$h = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.231}{2 \cdot 3.14} = 0.0368$$

[問題 2.1]

図のようなダッシュポットをもつバネ系について問いに答えよ。

１）運動方程式を求めよ。ただし、静的変位は含まれない。

２） $k = 9.8kN/m, m = 98kg, c = 39.2kg/\sec$ **のときの運動方程式を書き、固有振動数、臨界減衰係数** c_{cr} **を求め、減衰定数** h **を算定せよ。**



１質点バネ系

１）振動方程式は、次式で与えられる。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

２）振動方程式は

まず、単位をあわせる。

$$k = 9.8[kN/m] = 9800[N/m], m = 98[kg], c = 39.2[kg/\sec]$$

振動方程式

$$98\ddot{y} + 39.2\dot{y} + 9800y = 0$$

固有角振動数

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9800}{98}} = 10[rad/\sec]$$

固有周期

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2 \times 3.14}{10} = 0.628[\sec]$$

臨界減衰係数

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{98 \times 9800} = 1960[kg/\sec]$$

減衰定数

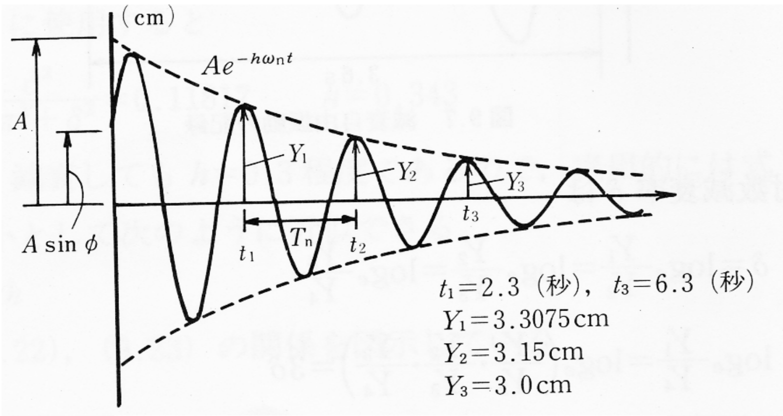
$$h = \frac{c}{c_c} = \frac{39.2}{1960} = 0.02; \quad \sqrt{1-h^2} = 0.9998$$

減衰定数が小さいので、周期の変化はほとんどない。

[問題 2.2]
図のような記録が得られた。固有振動数、対数減衰率、減衰定数を求めよ。

図から理解できるように、周期は、

$$2T = 6.3 - 2.3 = 4.0$$
$$T = 2.0[\sec]$$



振動記録

固有角振動数

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{2} = 3.14$$

固有振動数

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.5[Hz]$$

対数減衰率

$$\delta = \frac{1}{2}\ln\frac{3.3075}{3.0} = 0.0488$$

減衰定数

$$h = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.0488}{2\times3.14} = 0.0078$$