第４章　不規則外乱を受ける１自由度系の振動

4.1　インパルス応答

これまでは、一定外力が作用する定常振動を取り扱ってきたが、ここでは地震荷重などによる非定常的な振動を求めることを考える。これには、次に述べるインパルス応答、インデンシャル応答が基礎となる。

１）インパルス作用中の応答

ある大きさ P_0 で微小時間 Δt 作用する外力をインパルスと呼び、これによる振動系の応答をインパルス応答という。まず、インパルス作用中の応答について考える。振動方程式を以下に示す。

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=P_0 \qquad ――― (4.1)$$

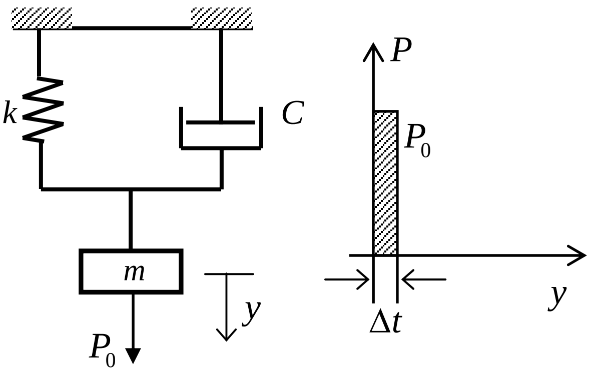


図 4.1 インパルス外乱を受けるモデル

インパルスが作用するとき、Δt が微小であるため、作用中 $c\dot{y}$ と ky を取り除いた簡易系で考える。この 2 つがない場合は、ある場合に比べて変位も速度も大きい結果が得られる。

$$m\ddot{y}=P_0$$

$$\ddot{y}=\frac{P_0}{m}$$

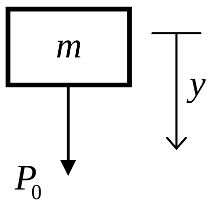


図 4.2 簡略モデル

初期条件として、$t=0$ において $\dot{y}=0$、 $y=0$ として、この方程式を解く。上の方程式を 2 回積分し、$t=\Delta t$ とおくと、Δt 後の解が得られる。

$$\dot{y}=\frac{P_0}{m}\Delta t$$

$$y=\frac{P_0}{2m}\Delta t^2$$

得られた解から分かるように、変位は速度に比べて二次の微小項となっており、変位は無視してもよい。

２）インパルス作用後の応答

インパルスが作用し、Δt 時間経過した後は、外力＝0 であるので自

由振動となる。自由振動の基礎式は

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=0$$

となり、その解は、

$$y=e^{-h\omega_n t}\left\{C\cos\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t+D\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t\right\}$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad h=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

となり、後は、初期条件によって、係数C,Dを決定することになる。

インパルス応答とは、一般にΔt後の応答のことを言い、Δt後から$t=0$とする。初期条件は、先に示したように、

$$t=0;\quad y(0)=0;\quad \dot{y}(0)=v(0)=\frac{P_0}{m}\Delta t \qquad ――― \ (4.2)$$

として与える。

[例題 4.1]
図（a）に示すバネ k と質量 m の系に、図（b）のインパルスが作用した場合の質点の応答を求めよ。

この系の自由振動の解は

$$y=C\cos\omega_n t+D\sin\omega_n t$$

であり、また、速度は上式を１回微分して得られる。

$$\dot{y}=-C\omega_n\sin\omega_n t+D\omega_n\cos\omega_n t$$

初期条件として、式(4.2)のように、$t=0$で$y(0)=0$、$\dot{y}(0)=P_0\Delta t/m$を与えると、

$$y(0)=C=0$$
$$\dot{y}(0)=D\omega_n=\frac{P_0\Delta t}{m}$$

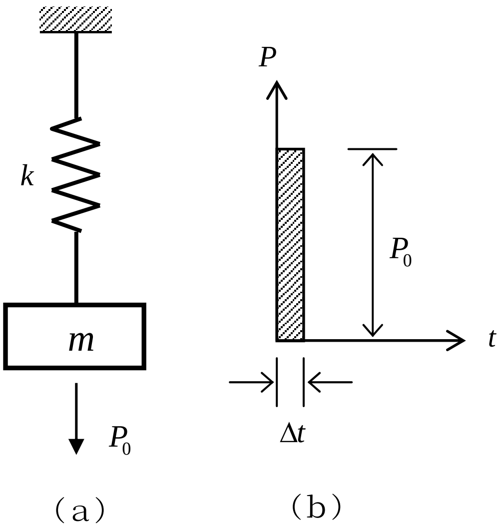


図 4.3 インパルス外力を受けるモデル

$$D=\frac{P_0\Delta t}{m\omega_n}$$

として、係数が求められる。この係数を、変位に代入すると、次に示すインパルス応答が得られることになる。

$$y=\frac{P_0\Delta t}{m\omega_n}\sin\omega_n t \qquad ――― (4.3)$$

[例題 4.2]

図に示す質量 m、ダッシュポット c、バネ k の振動系に、外力 P_0 が Δt 時間作用した場合の質点の応答を求めよ。

この系の自由振動の応答は

$$y=e^{-h\omega_n t}\left\{C\cos\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t+D\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t\right\}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad h=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

もしくは、

$$y=Ae^{-h\omega_n t}\sin(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t-\phi)$$

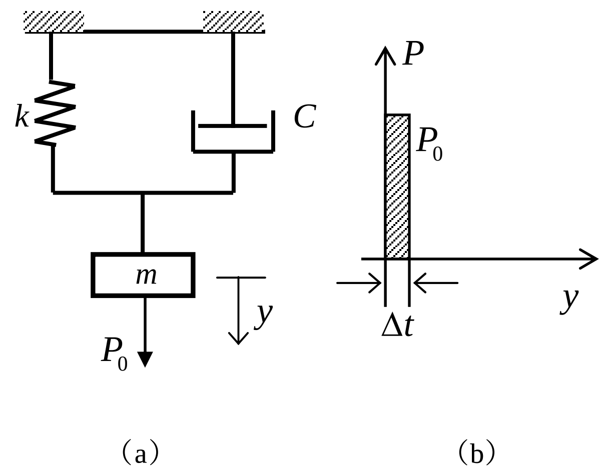


図 4.4 インパルス外力を受けるモデル

である。ここでは、後者を用いることにする。上式を 1 回微分すると速度が得られる。

$$\dot y=A(-h\omega_n)e^{-h\omega_n t}\sin(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t-\phi)+ A\sqrt{1-h^2}\,\omega_n e^{-h\omega_n t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t-\phi)$$

次に、初期条件として　$t=0$ で $y(0)=0$、$\dot y(0)=\dfrac{P_0\Delta t}{m}$ を与えると、

$$y(0)=\sin(-\phi)=0$$
$$\phi=0 \qquad ――― (4.4)$$

となり、さらに

$$\dot{y}(0) = -hA\omega_n \sin(-\phi) + A\sqrt{1-h^2}\,\omega_n \cos(-\phi) = \frac{P_0 \Delta t}{m}$$

$$A\sqrt{1-h^2}\,\omega_n = \frac{P_0 \Delta t}{m}$$

$$A = \frac{P_0 \Delta t}{\sqrt{1-h^2}\,\omega_n m} \qquad ――― \ (4.5)$$

として係数が得られる。この係数を先の変位に代入すると、次式で示す減衰を有する系のインパルス応答が得られる。

$$y = \frac{P_0 \Delta t}{\sqrt{1-h^2}\,\omega_n m} e^{-h\omega_n t} \sin(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t) \qquad ――― \ (4.6)$$

３）インパルス応答のまとめ

　ここで、減衰を有する場合とない場合のインパルス応答をまとめる。$g_1(t)$ を単位インパルス応答関数とするとき

減衰がない場合：

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{P_0 \Delta t}{m\omega_n} \sin \omega_n t \\ g_1 &= \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \end{aligned}} \qquad ――― \ (4.7)$$

減衰がある場合：

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{P_0 \Delta t}{\sqrt{1-h^2}\,\omega_n m} e^{-h\omega_n t} \sin(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t) \\ g_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-h^2}\,\omega_n m} e^{-h\omega_n t} \sin(\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t) \end{aligned}} \qquad ――― \ (4.8)$$

4.2　インデンシャル応答

　図に示すように、ステップ関数で与えられる外力は、インパルス状外力が無限に連続していると考えられる。この外力による系の応答 $g_2(t)$ を単位ステップ応答あるいはインデンシャル応答と呼ぶ。

図において、$t=\tau$ なる時刻に、$1\cdot\Delta\tau$ なる力積（斜線部）が作用した場合、時刻 t における応答 Δg_1 は、

$$\Delta g_1 = 1\cdot g_1(t-\tau)\Delta\tau \qquad ——— \ (4.9)$$

で与えられる。

単位ステップ外力は、単位の大きさの斜線部の力が $t-\tau$ の間連続して作用する力と考えてよいので、インデンシャル応答 $g_2(t)$ は、Δg_1 を積分して、次式のように求められる。

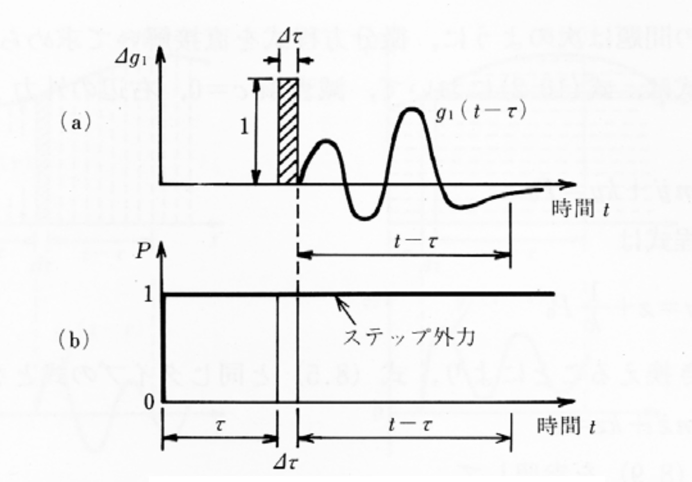


図 4.5 ステップ関数外力

$$g_2 = \int_0^t g_1(t-\tau)d\tau \qquad ——— \ (4.10)$$

[例題 4.3]
図の振動系にステップ関数の外力 P_0 が作用するときの系の応答を求めよ。

この振動系の単位インパルス応答は、

$$g_1(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

であり、これをインデンシャル応答 $g_2(t)$ に代入することで系の応答が得られる。

$$y = \frac{P_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{P_0}{m\omega_n}\left[-\cos\omega_n(t-\tau)\times\frac{1}{\omega_n}\right]_0^t$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$= \frac{P_0}{m\omega_n{}^2}(1-\cos\omega_n t)$$

$$= \frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

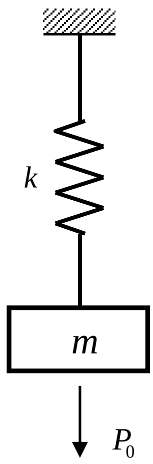


図 4.6 減衰のないバネものモデル

ここで、$P_0 = 1$ とすれば、単位インデンシャル関数が得られる。

$$g_2(t) = \frac{1}{k}\left(1 - \cos\omega_n t\right) \qquad ――― \ (4.11)$$

[例題 4.4]

図の系に P_0 のステップ外力が作用するときの質点の運動を、運動方程式を直接解いて求めよ。ただし、$t = 0$ で変位、速度ともに零とする。

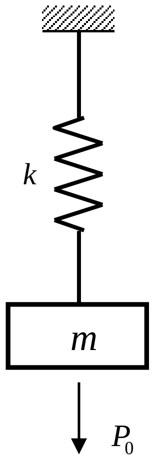


図 4.7 減衰のないバネものモデル

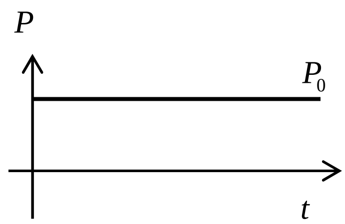


図 4.8 ステップ外力

この問題は次のように、微分方程式を直接解いて求められる。この系の運動方程式は、

$$m\ddot{y} + ky = P_0$$

上式に次の変数変換を行う。

$$y = \frac{1}{k}P_0 + z \qquad ――― \ (4.12)$$

ここで、$\ddot{y} = \ddot{z}$ であることを利用して、上式を振動方程式に適用する。

$$m\ddot{z} + k\left(\frac{P_0}{k} + z\right) = P_0$$

$$m\ddot{z} + P_0 + kz = P_0 \qquad ――― \ (4.13)$$

最終的に、新しい変数に関する微分方程式が得られる。

$$m\ddot{z} + kz = 0 \qquad ――― \ (4.14)$$

この方程式は減衰のない自由振動を示す式なので、解は次式で与えられる。

$$z = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

ここで、初期条件：$t = 0$、$y = 0, \dot{y} = 0$ を与えると、

$$y(0) = z(0) + \frac{P_0}{k} = 0$$

従って、新しい変数の初期変位は次式となる。

$$z(0) = -\frac{P_0}{k} \qquad ――― (4.15)$$

速度の初期条件は、 $\dot{y} = \dot{z}$ より

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \qquad ――― (4.16)$$

自由振動の変位及び、速度は、

$$z = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$
$$\dot{z} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t$$

であり、これに初期条件を適用すると、

$$z(0) = A = -\frac{P_0}{k}$$
$$\dot{z}(0) = B\omega_n = 0; \quad B = 0$$

として、係数が決定する。この値を変位に代入すると、

$$z(t) = -\frac{P_0}{k}\cos\omega_n t \qquad ――― (4.17)$$

となり、変数を元に戻すことで、解が得られる。

$$y = z + \frac{P_0}{k} = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k}\cos\omega_n t$$
$$= \frac{P_0}{k}(1 - \cos\omega_n t) \qquad ――― (4.18)$$

4.3　不規則外力を受ける振動系の応答

我々が日常生活で経験する外力は地震・風などによる不規則外力が大半である。前節では、パルス外力、ステップ外力に対する応答の求め方を勉強した。以後では、これらを利用して不規則な外乱に応用することを考える。

1) インパルス応答による方法

不規則外力として $P(t)$ を図に示すような連続したインパルスと考える。時間間隔 $\Delta\tau$ に対して、時間 τ のインパルスは $P(t)\Delta\tau$ で、これに

よる系の時刻tにおける応答$y(t)$は、次式で与えられる。

$$y(t)=\int_0^t P(\tau)g_1(t-\tau)d\tau \qquad ――― (4.19)$$

これは外力$P(t)$による応答を、初期条件$t=0$において、$\dot{y}=y=0$として求めている。従って、初期条件が$t=0$において$\dot{y}=v_0$、$y=y_0$の場合は、初期条件を満足する自由振動を付け加える必要がある。

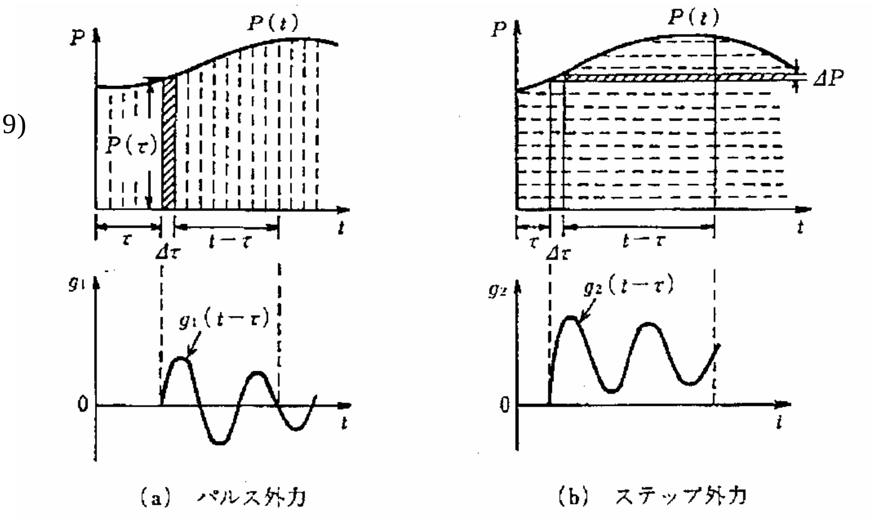


図 4.9 不規則外力

2）インデシャル応答による方法

外力$P(t)$を図（b）のように横割にした場合、時間間隔$\Delta\tau$に対する$P(t)$の増分は、

$$\Delta P=\frac{dP(\tau)}{d\tau}\Delta\tau \qquad ――― (4.20)$$

となる。図中のΔPの高さの斜線部は単位ステップ外力をΔP倍したものと同じである。単位インデシャル応答$g_2(t)$を用いると、時刻τにおけるステップ外力$\Delta P(t=\tau)$に対して、時刻tにおける応答は$\Delta P(\tau)g_2(t-\tau)$。これにより$P(t)$による応答は積分して次式より得られる。

$$y(t)=\int_0^t \frac{dP(\tau)}{d\tau}g_2(t-\tau)d\tau \qquad ――― (4.21)$$

[例題 4.5]
図に示す系にP_0の一定荷重がt_1の間作用するとき、その質点の運動を求めよ。初期条件は、$t=0$で変位、速度ともにゼロとする。

時刻が$t\le t_1$間の応答は、次のように既に求まっている。

$$y = \frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_n t);\quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

時刻$t > t_1$では、外力$P_0 = 0$の自由振動となる。このとき、初期条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} y_{t_1} &= \frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_n t_1) \\ \dot{y}_{t_1} &= \frac{P_0}{k}\omega_n \sin\omega_n t_1 \end{aligned} \qquad ――― (4.22)$$

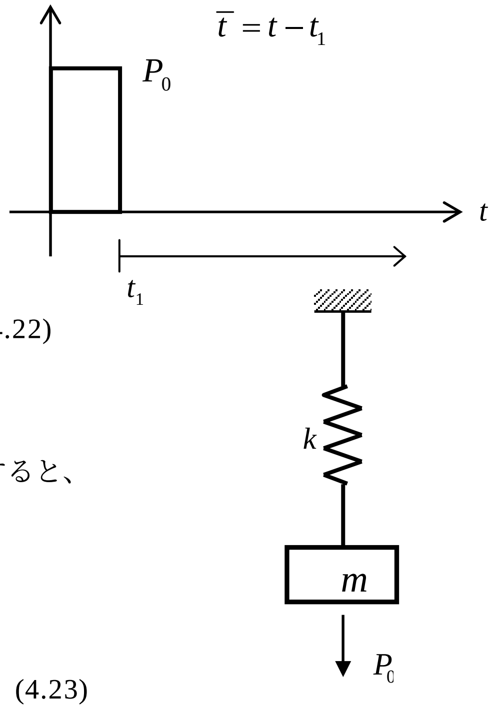


図 4.10 例題 4.5 のモデル

この初期条件における自由振動の解は、時刻を$\bar{t} = t - t_1$とすると、

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cos\omega_n \bar{t} + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n \bar{t} \\ &= y_{t_1}\cos\omega_n \bar{t} + \frac{\dot{y}_{t_1}}{\omega_n}\sin\omega_n \bar{t} \end{aligned} \qquad ――― (4.23)$$

となる。

[例題 4.6]
図の系で質量　m=60[kg]、バネ定数 k=196[kN/m]とする。この質量に、$P_0 = 294N$の力を$\Delta t = 0.1$　秒間作用させ、その後自由振動させたとき、バネ固定点に作用する最大の力を求めよ。ただし、重りの自重による力は無視する。

まず、この振動系の固有角速度ω_n、固有周期T_nを求める。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1960}{60}} = 5.715[rad/\sec]$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.099[\sec]$$

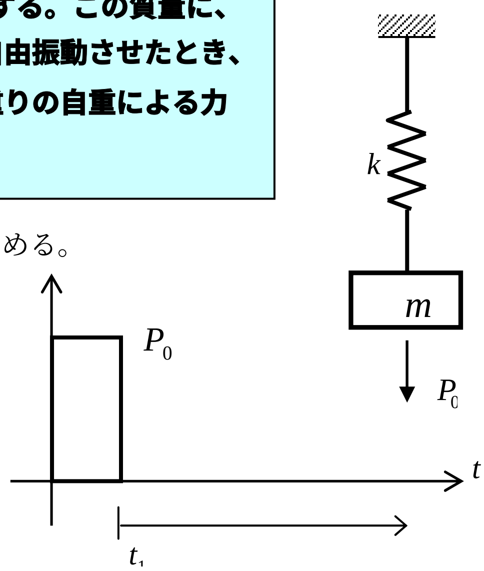


図 4.11 例題 4.6 のモデル

１）時刻$t \leqq 0.1$間の振動

外力の作用時間が微小と考え、インパルス応答として変位応答を求めてもよいが、ここではインデンシャル応答として求める。

この間の応答は既に求められており、次式で表される。

$$y(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$
$$=\frac{294}{1960}(1-\cos 5.715t)$$

また、バネに生じる軸力は、

$$N=ky(t)$$
$$=P_0(1-\cos 5.715t)$$

となる。

上式に、$t=0.1$を代入して、このときの変位を求める。

$$y(0.1)=0.15(1-\cos 0.5715)$$
$$=0.02384\left[m\right]$$

さらに、このときの軸力 N は、

$$N=ky(0.1)=1960\times 0.02384$$
$$=46.7264\left[N\right]$$

２）時刻$t>0.1$の振動

2.1）次のステップの初期条件となる$t=0.1$における変位 y_1、速度 $\dot{y}_1$ を求める

変位は先に求めており、

$$y_1=0.02384\left[m\right]$$

次に、速度は、

$$\dot{y}(t)=\frac{P_0}{k}\omega_n\sin\omega_n t$$

より、次式で与えられる。

$$\dot{y}_1(0.1)=\frac{294}{1960}5.715\sin 0.5715$$

$$\dot{y}_1(0.1) = 0.4637 m/\sec$$

2.2）$t = 0.1$秒以後の自由振動は、$\bar{t} = t - t_1$とすると、

$$y_2 = y_1 \cos\omega_n \bar{t} + \frac{\dot{y}_1}{\omega_n}\sin\omega_n \bar{t} \qquad ――― (4.24)$$

であり、初期条件として、先に求めた y_1、 $\dot{y}_1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.02384\cos\omega_n\bar{t} + \frac{0.4637}{5.715}\sin\omega_n\bar{t} \\ &= 0.02384\cos 5.715\bar{t} + 0.0811\sin 5.715\bar{t} \end{aligned}$$

となり、さらに単振動を合成すると、

$$\begin{aligned} y_2 &= \sqrt{0.02384^2 + 0.0811^2}\sin(5.715\bar{t} + \phi) \\ &= 0.08453\sin(5.715t + \phi) \end{aligned}$$

となる。軸力 N の最大値は、振幅の最大値から求めればよいので、

$$\begin{aligned} N = ky_2 &= 1960 \times 0.08453 \\ &= 165.7N \end{aligned}$$

となる。

[例題 4.7]
右図の系で、$P_0 \sin\omega t$　の外力が作用するときの応答を、単位インパルス応答を用いて解け、ただし、初期条件は $t = 0$ で速度 $\dot{y} = v_0$ 、変位 $y = y_0$ とする。

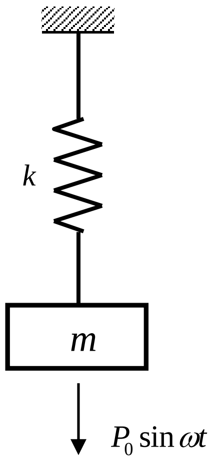


図 4.12 例題 4.7 のモデル

減衰がない場合の単位インパルス応答は、

$$g_1 = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

であり、これを用いると、この系の変位応答は以下の式で表される。

$$y=\int_0^t p(\tau)g_1(t-\tau)d\tau$$

荷重項と単位インパルス応答を代入し、

$$y=\frac{P_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$\sin A\sin B$
$=\dfrac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$

積分して応答を求める。積分するために、

$$y=\frac{P_0}{2m\omega_n}(\int_0^t \cos\{(\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t\}d\tau-$$
$$\int_0^t \cos\{(\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t\}d\tau)$$

のように変形する。まず、上式の積分を実行しよう。

$$\int_0^t \cos\{(\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t\}d\tau$$
$$=\left[\frac{1}{\omega+\omega_n}\sin\{(\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t\}\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{\omega+\omega_n}\sin\{(\omega+\omega_n)t-\omega_n t\}+\frac{-1}{\omega+\omega_n}\sin(-\omega_n t)$$
$$=\frac{1}{\omega+\omega_n}(\sin\omega_n t+\sin\omega t)$$

同様に

$$\int_0^t \cos\{(\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t\}d\tau$$
$$=\left[\frac{-1}{\omega-\omega_n}\sin\{(\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t\}\right]_0^t$$
$$=\frac{-1}{\omega-\omega_n}\sin\{(\omega-\omega_n)t+\omega_n t\}-\frac{-1}{\omega+\omega_n}\sin(\omega_n t)$$
$$=\frac{1}{\omega-\omega_n}(\sin\omega_n t-\sin\omega t)$$

となる。積分結果を元の式に代入すると、

$$y=\frac{P_0}{2m\omega_n}\left(\frac{1}{\omega+\omega_n}(\sin\omega_n t+\sin\omega t)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\omega-\omega_n}(\sin\omega_n t-\sin\omega t)\right)$$

であり、これを整理すると、

$$y=\frac{P_0}{2m\omega_n}\left(\left(\frac{1}{\omega+\omega_n}+\frac{1}{\omega-\omega_n}\right)\sin\omega_n t\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\omega+\omega_n}-\frac{1}{\omega-\omega_n}\right)\sin\omega t\right)$$
$$=\frac{P_0}{2m\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\{(\omega-\omega_n+\omega+\omega_n)\sin\omega_n t$$
$$+(\omega-\omega_n-\omega-\omega_n)\sin\omega t\}$$
$$=\frac{P_0}{m\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\{\omega\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega t\}$$

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}$$
$$m=\frac{k}{\omega_n^2}$$

さらに、上式を変更すると、

$$y=\frac{P_0}{m(\omega^2-\omega_n^2)}\{\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t-\sin\omega t\}$$
$$=\frac{P_0}{k(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}\{\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\} \quad ——— \ (4.25)$$

となり、初期条件が $t=0;\quad y(0)=0;\quad \dot{y}(0)=0$ の応答が得られたことになる。後は、次の初期条件を満足する自由振動の応答を加えておけばよい。

$$t=0;\quad y(0)=y_0;\quad \dot{y}(0)=v_0$$

この自由振動の解は、

$$y=y_0\cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

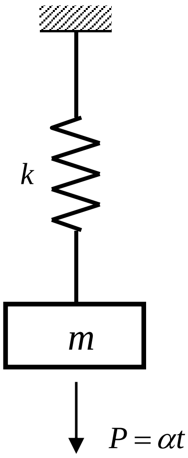
で与えられる。この解を加えることで、初期条件を満足する解となる。

$$y = y_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{P_0}{k(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}\{\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\}$$

――― (4.26)

[例題 4.8]
図の系で、図に示す外力が作用するときの応答を求めよ。
1）インパルス応答を用いる方法
2）インデンシャル応答を用いる方法
3）振動系の運動方程式を直接解いて求める方法

この系の初期条件は、$t = 0;\quad y(0) = 0;\quad \dot{y}(0) = 0$であり、速度、変位ともにゼロである。



1）インパルス応答を用いる方法

この系の単位インパルス応答は、

$$g_1 = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

であり、外力は、

$$P(t) = \alpha t$$

であり、従って、応答は、

$$y = \int_0^t P(\tau)\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{\alpha}{m\omega_n}\int_0^t \tau\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

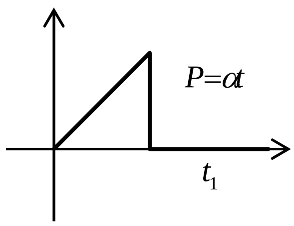


図 4.13 例題 4.8 のモデル

となる。部分積分法を用いると

$$y = \frac{\alpha}{m\omega_n}\{\left[\frac{\tau}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\right]_0^t - \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \cos\omega_n(t-\tau)d\tau\}$$

$$= \frac{\alpha}{m\omega_n}\{\frac{t}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2}\left[\sin\omega_n(t-\tau)\right]_0^t\}$$

$$= \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\{t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\}$$

$(fg)' = f'g + fg'$

$fg = \int f'g dt + \int fg' dt$

$\int f'g dt = fg - \int fg' dt$

となる。さらに、$m\omega_n^2 = k$ より、

$$y = \frac{\alpha}{k}\{t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\} \qquad ——— \ (4.27)$$

となる。この応答は、$t \le t_1$ までであり、その後は自由振動となる。

2）インデンシャル応答を用いる方法

この系の単位インデンシャル応答は、

$$g_2(t) = \frac{1}{k}\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$

であり、応答は、

$$\begin{aligned} y &= \int_0^t \dot{P}(\tau)\frac{1}{k}\left(1 - \cos\omega_n(t-\tau)\right)d\tau \\ &= \frac{\alpha}{k}\int_0^t \left(1 - \cos\omega_n(t-\tau)\right)d\tau \end{aligned}$$

となる。上式の積分は容易で、

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{k}\left[\tau + \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\right]_0^t \\ &= \frac{\alpha}{k}(t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t) \qquad ——— \ (4.28) \end{aligned}$$

として応答が与えられる。

3）振動系の運動方程式を直接解いて求める方法

この系の運動方程式は、

$$m\ddot{y} + ky = \alpha t$$

であり、次式を用いて変数変換する。

$$z = y - \alpha t / k; \quad \ddot{z} = \ddot{y}$$

変数変換式を元の運動方程式に適用すると、

$$m\ddot{z} + k(z + \frac{\alpha t}{k}) = \alpha t$$
$$m\ddot{z} + kz = 0$$

となる。従って、上の方程式の解は、

$$z = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t$$

であり、初期条件は、

$$z(0) = y(0) - \alpha 0 / k = 0$$
$$\dot{z}(0) = \dot{y}(0) - \alpha / k = -\alpha / k$$

となる。上式を適用すると、

$$z(0) = C = 0$$
$$\dot{z}(0) = D\omega_n = -\alpha / k; \quad D = \frac{-\alpha}{k\omega_n}$$

となる。係数を方程式の解に代入すると、

$$z = -\frac{\alpha}{k\omega_n}\sin\omega_n t$$

これを変数変換する前の式に戻ると、次のように解が得られる。

$$y = \frac{\alpha t}{k} + z = \frac{\alpha}{k}(t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t) \qquad ――― (4.29)$$