第６章　多自由度系の自由振動

6.1 多自由度系の自由振動

本節から、多自由度系の振動について述べる。ただし、式の展開では、2 自由度系を扱うことにする。図 6.1 は、全て 2 自由度系の振動モデルを表す。

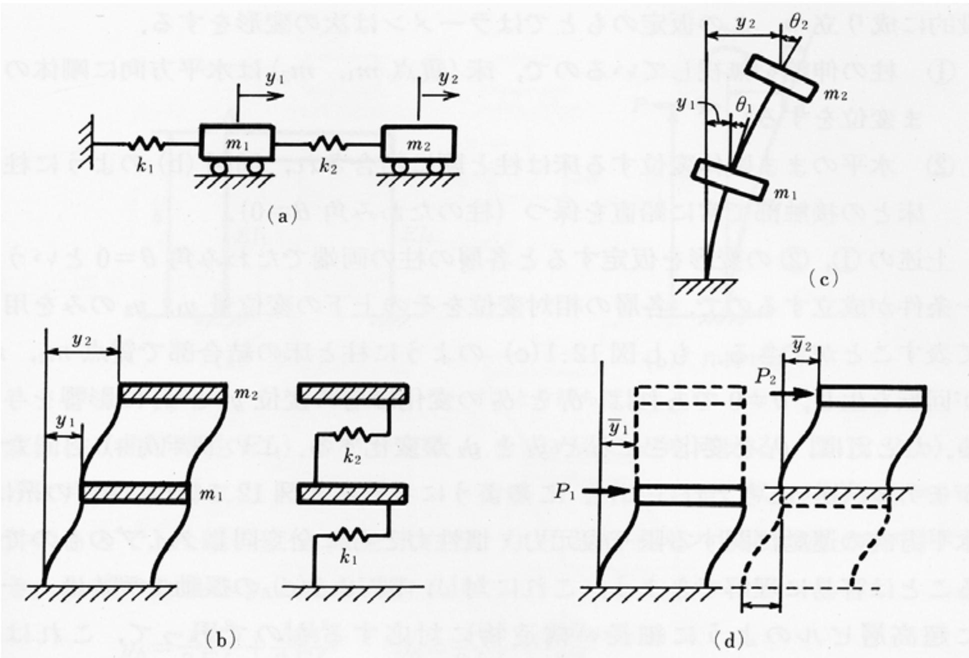

図 6.1 2 自由度系

まず、2 自由度系の振動方程式が、図 6.2 を参考に、力の釣合より以下のように表される。この振動モデルはせん断型と呼ばれる。

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\
m_2\ddot{y}_2 &= -k_2(y_2 - y_1) \qquad ―――（6.1）
\end{aligned}
$$

上式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 &= 0 \\
m_2\ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 &= 0 \qquad ―――（6.2）
\end{aligned}
$$

として、２元の連立微分方程式が得られる。ここで、次のように係数をおき直すと、

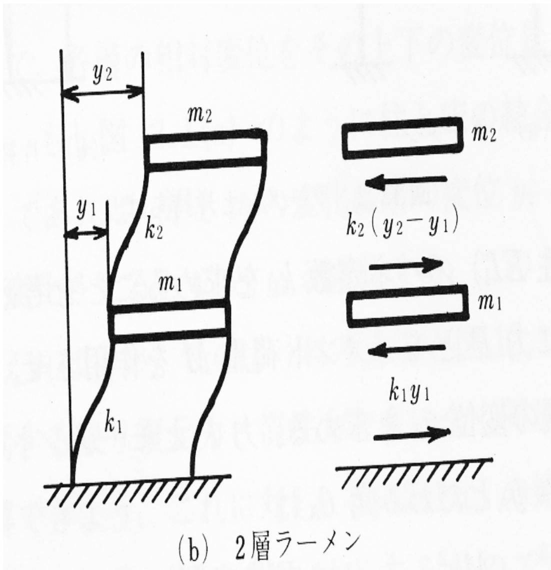

図 6.2 2 層ラーメンでの力の釣合

$$k_{11} = k_1 + k_2;\quad k_{12} = -k_2$$
$$k_{21} = -k_2;\quad k_{22} = k_2 \qquad \text{———（6.3）}$$

振動方程式は次式となる。

$$m_1\ddot{y}_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 = 0$$
$$m_2\ddot{y}_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 = 0 \qquad \text{———（6.4）}$$

上式を行列表示すると、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad \text{———（6.5）}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$
$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix};\quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{———（6.6）}$$

と表すことができる。ここで、

$\mathbf{M}$:　質量行列
$\mathbf{K}$:　剛性行列
$\ddot{\mathbf{y}}$:　加速度ベクトル
$\mathbf{y}$:　変位ベクトル

を意味する。

次に、この振動方程式の自由振動解を求めることにする。各質点は、同じ振動数で、しかも互いに位相差なく振動しているものと考え、次のような変位解を仮定する。

$$y_1 = Y_1 \sin\omega t$$
$$y_2 = Y_2 \sin\omega t \qquad \text{———（6.7）}$$

さらに、上式を 2 回微分して加速度を求める。

$$\ddot{y}_1 = -Y_1\omega^2 \sin\omega t$$
$$\ddot{y}_2 = -Y_2\omega^2 \sin\omega t \qquad \text{———（6.8）}$$

式(6.7)と(6.8)を振動方程式(6.4)に代入すると、

$$(-m_1\omega^2 Y_1 + k_{11}Y_1 + k_{12}Y_2)\sin\omega t = 0$$
$$(-m_2\omega^2 Y_2 + k_{21}Y_1 + k_{22}Y_2)\sin\omega t = 0$$

となる。上式で $\sin\omega t$ はゼロでないので、上式を満足するためには、その係数項がゼロでなくてはならない。

$$\begin{aligned}(k_{11}-\lambda m_1)Y_1+k_{12}Y_2&=0\\ k_{21}Y_1+(k_{22}-\lambda m_2)Y_2&=0\end{aligned} \quad ———（6.9）$$

ここでは、$\lambda=\omega^2$ としている。上式をまとめ直すと、

$$\begin{bmatrix}k_{11}-\lambda m_1 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-\lambda m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad ———（6.10）$$

となり、行列表示すると、

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})\mathbf{Y}=\mathbf{0} \quad ———（6.11）$$

となる。後は、上の方程式を解き、λ と $\mathbf{Y}$ を求めることになる。

6.2　一般固有値問題

先に示した式(6.11)は、一般固有値問題と呼ばれる。まず、この一般固有値問題について議論する。なお、変位ベクトルなどの次数は n とする。一般固有値問題は、次式で表される。

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})\mathbf{Y}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{KY}&=\lambda\mathbf{MY}\end{aligned} \quad ———（6.12）$$

ここで、$\mathbf{Y}$ ベクトルは、ゼロでない意味のある解が必要となるため、上式を満足するために、その係数行列の行列式はゼロでなくてはならない。

$$|\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}|=0 \quad ———（6.13）$$

上式を λ について、展開すると n 次の多項式となる。この多項式は特性多項式、あるいは振動数方程式と呼ばれる。

この振動数方程式を解き、その根 λ が求められると、$\mathbf{Y}$ ベクトルも同時に得られることになる。この n 個の λ と n 個の $\mathbf{Y}$ を各々、固有値と固有ベクトルと呼ぶ。この n 個の固有値と固有ベクトルは固有対と呼ばれ、$(\lambda_i,\mathbf{Y}_i)$ と表示される。

この固有対を振動の言葉で表すと、まず、次の関係から振動数が求められ、

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \qquad ———（6.14）$$

得られた ω_i は i 次の固有角振動となる。また、その対である $\mathbf{Y}_i$ は i 次の振動モードとなる。

一般固有値問題を先の 2 自由度系で解いてみよう。固有値問題を次に示す。

$$\begin{gathered} \left|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}\right| = 0 \\ \begin{vmatrix} k_{11} - \lambda m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda m_2 \end{vmatrix} = 0 \end{gathered} \qquad ———（6.15）$$

上式を λ について展開すると、次の多項式が得られる。

$$m_1 m_2 \lambda^2 - (k_{11} m_2 + k_{22} m_1)\lambda + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{22} = 0 \qquad ———（6.16）$$

上の 2 次方程式を解き、2 つの 2 実根 (λ_1, λ_2) を求める。一般的に、式(6.13)から得られる全ての根が実数となることは後で証明しよう。

次に、得られた 2 実根から、2 つの固有角振動数を以下のように求める。同時に、固有周期も求められる。

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1};\quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2};\quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \end{gathered} \qquad ———（6.17）$$

得られた固有値を元に、次式を用いて固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad ———（6.18）$$

上式に、得られた固有値を代入すると、2 つの方程式は従属関係となる。そこで、式(6.18)における１行目の方程式を用いることにする。

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}_1 = \left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)_{\lambda_1} = \left(\frac{Y_{11}}{Y_{21}}\right) = \frac{-k_{12}}{k_{11} - \lambda_1 m_1} \\ \mathbf{Y}_2 = \left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)_{\lambda_2} = \left(\frac{Y_{12}}{Y_{22}}\right) = \frac{-k_{12}}{k_{11} - \lambda_2 m_1} \end{gathered} \qquad ———（6.19）$$

上のように得られた固有ベクトルは、１次の不定性を有する。つまり、各変位の比率が決定するのみで、従って、任意のα倍も固有ベクトルとなる。

固有振動数と振動モードから自由振動の解が得られる。仮定した変位(6.7)を用いると、２つの自由振動が

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{Bmatrix} \sin \omega_1 t$$
$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_2 \begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} \sin \omega_2 t \qquad ———（6.20）$$

として得られ、自由振動の解は

$$\mathbf{y} = \sum_{1}^{2} C_i \mathbf{Y}_i \sin \omega_i t$$
$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{Bmatrix} \sin \omega_1 t + C_2 \begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} \sin \omega_2 t \qquad ———（6.21）$$

となる。後は、初期条件より、未定定数C_1, C_2を決定することになる。

6.3　基準振動モードと正規化モード

先に示したように固有ベクトル、あるいは振動モードは 1 次の不定性を有する。つまり、α 倍の係数を掛けても、その結果は同じく振動モードである。そこで、任意の変位の値を 1 にしたモードを基準振動モードという。一般には最大値を 1 とする場合が多い。

基準振動モードの他に、次の条件を満たす振動モードを正規化振動モードといい、一般によく利用される。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \phi_{ij}^2 = 1 \qquad ———（6.22）$$

基準振動モードから正規化モードを作成する方法を検討しよう。まず、正規化モードを次式で仮定しよう。

$$\boldsymbol{\varphi}_j = C_j \mathbf{Y}_j \qquad ———（6.23）$$

例題の 2 自由度系では、

$$\phi_{11} = C_1 Y_{11}; \quad \phi_{12} = C_2 Y_{12}$$
$$\phi_{21} = C_1 Y_{21}; \quad \phi_{22} = C_2 Y_{22} \qquad ―――（6.24）$$

となる。ここで、正規化条件を適用して、未定定数である C_j を決定することになる。式(6.23)を式(6.22)に代入すると

$$C_j^2 \sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2 = 1 \qquad ―――（6.25）$$

となり、その結果、係数 C_j は次式となる。

$$C_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2}} \qquad ―――（6.26）$$

上で得られた C_j を式(6.23)に代入することで正規化モードが得られる。例題の 2 自由度系では次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2}} \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 Y_{12}^2 + m_2 Y_{22}^2}} \begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} \qquad ―――（6.27）$$

　固有値問題を解いて得た固有ベクトル（振動モード）には、直交性という重要な性質がある。この直交性について検討しよう。有限要素法で求めた質量行列と剛性行列は、一般に実対称行列として得られる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T; \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \qquad ―――（6.28）$$

ここで、 $\mathbf{K}^T$ は転置行列を表す。

　次に、i 次の固有対を、固有値問題を示す式(6.12)に代入すると次式が成立する。

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\mathbf{Y}_i = \mathbf{0} \qquad ―――（6.29）$$

ここで、上式に $\mathbf{Y}_i$ と異なる振動モード $\mathbf{Y}_j^T$ を左から掛けることにする。なお、式(6.29)の右辺はゼロベクトルであり、次式の右辺はスカラーとなる。

$$\mathbf{Y}_j^T(-\lambda_i\mathbf{M}+\mathbf{K})\mathbf{Y}_i=0$$
$$-\lambda_i\mathbf{Y}_j^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_i+\mathbf{Y}_j^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_i=0 \qquad ———（6.30）$$

上式の両辺で転置をとっても方程式は成立する。そこで、対称条件である式(6.28)を考慮して、左辺の転置を取ると、

$$-\lambda_i\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}^T\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}^T\mathbf{Y}_j=0$$
$$-\lambda_i\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_j=0 \qquad ———（6.31）$$

となる。次に、j 次の固有対に対し、i 次の振動モード $\mathbf{Y}_j^T$ を左から掛けると次式が得られる。

$$\mathbf{Y}_i^T(-\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{K})\mathbf{Y}_j=0$$
$$-\lambda_j\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_j=0 \qquad ———（6.32）$$

ここで、式(6.31)と式(6.32)の差を取ると

$$-\lambda_i\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_j+\lambda_j\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_j=0$$
$$(\lambda_j-\lambda_i)\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j=0 \qquad ———（6.33）$$

となり、2 つの固有値が異なることから $(\lambda_i\neq\lambda_j)$ 、次式が成立する。

$$\mathbf{Y}_i^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_j=0 \qquad ———（6.34）$$

このように、異なった固有ベクトルは、質量行列を介して直交している。また、式(6.34)を式(6.32)に代入すると、

$$\mathbf{Y}_i^T\mathbf{K}\mathbf{Y}_j=0 \qquad ———（6.35）$$

となり、異なった固有ベクトルは、剛性行列を介しても直交していることが分かる。当然、先に示した正規化モードを用いても、次のように直交している。

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j=0;\quad \boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j=0 \qquad ———（6.36）$$

例題６.１
２層せん断型で、質量：$m_1 = m_2 = m$、剛性：$k_1 = k_2 = k$ を有するモデルを用いて、これまでの特性を復習する。

これまで学んだ固有値問題に関する知識を、例題を通して復習しよう。2 自由度せん断型の振動方程式を以下に示す。剛性及び質量は、上記されている。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$
$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

上記の微分方程式より、固有値問題を次のように導く。

$$\left|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}\right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & k - \lambda m \end{vmatrix} = 0$$

固有値λで展開し、固有多項式を以下のように求める。

$$m^2\lambda^2 - 3km\lambda + k^2 = 0$$

上の 2 次方程式から、解の公式を用いて固有値を求める。

$$\lambda = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4m^2k^2}}{2m^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$
$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$
$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

固有値から系の固有角振動を求める。

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\varpi = 0.618\varpi; \quad \varpi = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\varpi = 1.618\varpi$$

さらに、固有角振動数から固有振動数と固有周期が次のように求められる。

$$f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=0.0984\varpi;\quad T_1=\frac{1}{f_1}=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{10.16}{\varpi}$$
$$f_2=\frac{\omega_1}{2\pi}=0.2575\varpi;\quad T_2=\frac{1}{f_2}=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{3.883}{\varpi}$$

　次に、基準振動モードと正規化モードを求めてみよう。固有値を次の方程式に代入する。

$$\begin{bmatrix}2k-\lambda m & -k\\ -k & k-\lambda m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

固有値λ_1とλ_2に対し、各々次式が得られる。

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}}=\frac{k}{2k-\lambda_1 m}=\frac{1}{2-\lambda_1 m/k}=\frac{1}{2-(0.618\varpi)^2 m/k}$$
$$=\frac{1}{2-(0.618)^2}=0.618$$
$$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}=\frac{k}{2k-\lambda_2 m}=\frac{1}{2-\lambda_2 m/k}=\frac{1}{2-(1.618\varpi)^2 m/k}$$
$$=\frac{1}{2-(1.618)^2}=-1.618$$

せん断型２階部分の変位を１とすると、基準振動モードは、以下のようになる。

$$\mathbf{Y}_1=\begin{Bmatrix}Y_{11}\\ Y_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.618\\ 1.0\end{Bmatrix};$$
$$\mathbf{Y}_2=\begin{Bmatrix}Y_{12}\\ Y_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1.618\\ 1.0\end{Bmatrix}$$

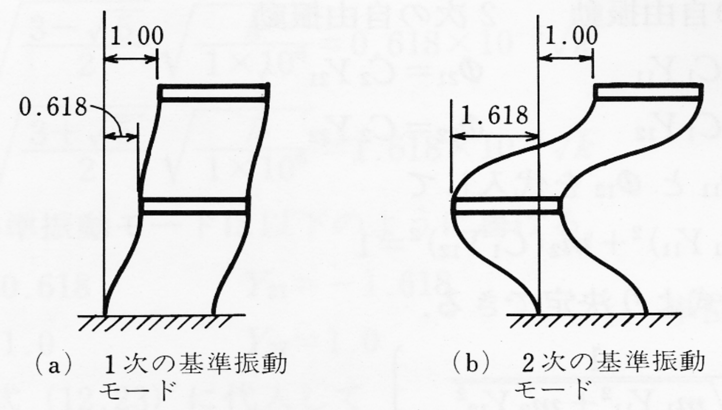

図 6.3 2層ラーメンでの基準振動モード

次に、正規化モードを求めてみよう。正規化条件は

$$C_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2}}$$

であり、従って、

$$C_1 = 1/\sqrt{m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2} = 1/\left(\sqrt{m}\sqrt{0.618^2 + 1^2}\right)$$
$$C_2 = 1/\sqrt{m_1 Y_{12}^2 + m_2 Y_{22}^2} = 1/\left(\sqrt{m}\sqrt{1.618^2 + 1^2}\right)$$

として係数が求められる。この係数を使用すると、正規化モードが次のように得られる。

$$\boldsymbol{\varphi}_j = C_j \mathbf{Y}_j$$
$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{0.618^2 + 1^2}} \begin{Bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.5257 \\ 0.8507 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{1.618^2 + 1^2}} \begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -0.8506 \\ 0.5257 \end{Bmatrix}$$

次に、求めた固有ベクトルの直交性を確かめてみよう。まず、基準振動モードを使用する。2 つの基準振動モードを用い、質量を介して内積をとると、以下のようにゼロとなり、直交性が保障される。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij} Y_{ik} = \{0.618 \quad 1.0\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$
$$= m(-0.999 + 1.0) = 0$$

同様に、正規化モードを用いて直交性を検証しよう。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \phi_{ij} \phi_{ik} = \frac{1}{\sqrt{m}} \{0.5257 \quad 0.8507\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -0.8506 \\ 0.5257 \end{Bmatrix}$$
$$= (-0.44712 + 0.44712) = 0$$

以上のように、振動モードの直交性を確認することができた。

6.4　固有値問題のまとめ

本節では、多自由度系の固有値問題を、行列を用いて復習しよう。まず、減衰のない構造物の自由振動方程式は以下のように与えられる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad ―――（6.37）$$

上式の解を次のように仮定する。合わせて、時間に関する２回微分も示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{Y}e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{y}} &= -\omega^2 \mathbf{Y}e^{i\omega t} \end{aligned} \qquad ―――（6.38）$$

上式を式(6.37)に代入すると、

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{Y}e^{i\omega t} = \mathbf{0} \qquad ―――（6.39）$$

となる。上式においてゼロでない解が必要となるため、$e^{i\omega t} \neq \mathbf{0}$ であるので、従って、次式を満足しなければならない。

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{Y} = \mathbf{0} \qquad ―――（6.40）$$

さらに、$\mathbf{Y}$ はゼロベクトルではないため、その係数行列は次式を満たす必要がある。これを一般固有値問題という。

$$\left| -\lambda\mathbf{M} + \mathbf{K} \right| = 0 \qquad ―――（6.41）$$

上式を満足する $(\lambda_i, \mathbf{Y}_i)$ を固有対といい、λ_i を固有値、$\mathbf{Y}_i$ を固有ベクトルいう。この一般固有値問題では、固有値 λ に関する n 次の多項式となり、これを特性多項式、もしくは振動数方程式と呼ぶ。この固有値問題は、次数が大きくなると手計算で求めることは困難となり、コンピュータによる数値計算で固有値と固有ベクトルを求めることになる。

得られた固有値から、解析モデルの i 次固有角振動数が以下のように求められる。

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$$

求めた固有ベクトルは１次の不定性があり、任意の値を掛けても、その結果は固有ベクトルとなる。そこで、固有ベクトルから基準振動モードと正規化モードを作成する。基準振動モードは最大値か、もしくは任意自由度を１にすればよい。また、正規化モードは次の正規化条件より係数を求め、

$$C_j^2\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2 = 1;\quad C_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2}} \qquad ―――（6.42）$$

その値を固有ベクトルに掛けることで次のように得られる。

$$\boldsymbol{\varphi}_i = c_i \mathbf{Y}_i$$

正規化モードは次の直交条件を満足する。

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1;\quad \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \qquad ―――（6.43）$$

また、正規化モードを次のように並べて、モード行列を作成すると、

$$\boldsymbol{\Psi} = \left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n\right) \qquad ―――（6.44）$$

となり、この行列を使用すると、直交条件と正規条件より、次式が成立する。

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I} \qquad ―――（6.45）$$

式(6.39)で、i 次の固有値と正規化モードを使用すると

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i \qquad ―――（6.46）$$

が成立し、上式で両辺の左より $\boldsymbol{\varphi}_i^T$ あるいは、$\boldsymbol{\varphi}_j^T$ を掛けると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i &= \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \\ \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i &= \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \end{aligned} \qquad ―――（6.47）$$

となる。上式を、モード行列を用いて表すと、最終的に次式が得られる。

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Lambda};\quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad ―――（6.48）$$

ここで、$\boldsymbol{\Lambda}$ は固有値を対角項にもつ対角行列である。

6.5　自由振動の初期条件

本節では、任意の初期条件が与えられるとき、その自由振動解を求めることにする。まず、2 自由度系で話を進めることにする。2 自由度系の変位と速度は次式で表される。未定定数は A_1, A_2, B_1, B_2 であり、初期条件を用いて決定することになる。

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{Bmatrix} (A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t) + \begin{Bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} (A_2 \sin\omega_2 t + B_2 \cos\omega_2 t)$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{Bmatrix} \omega_1 (A_1 \cos\omega_1 t - B_1 \sin\omega_1 t) + \begin{Bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} \omega_2 (A_2 \cos\omega_2 t - B_2 \sin\omega_2 t)$$
―――（6.49）

ここで、ω_i 及び $\mathbf{Y}_i$ は固有角振動数であり、基準振動モードである。無論、基準振動モードの替わりに、正規化モードを用いても良い。

初期条件は、$t=0$ で $\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0$ ベクトルとする。上式に初期条件を適用すると、

$$\mathbf{y}(0) = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{Bmatrix} B_1 + \begin{Bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} B_2 = \mathbf{y}_0$$
$$\dot{\mathbf{y}}(0) = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{Bmatrix} \omega_1 A_1 + \begin{Bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{Bmatrix} \omega_2 A_2 = \dot{\mathbf{y}}_0$$
―――（6.50）

となり、次の２つの連立方程式を解くことによって、未定定数を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{y}_0$$
$$\begin{bmatrix} \omega_1 Y_{11} & \omega_2 Y_{21} \\ \omega_1 Y_{12} & \omega_2 Y_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \dot{\mathbf{y}}_0$$
―――（6.51）

上記の連立方程式を解く代わりに、固有振動モードの直交条件を用いれば、容易に未定定数を求めることができる。まず、以下のように式(6.50)で示した初期条件式を行列で表すことにする。

$$\mathbf{y}(0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i (A_i \sin\omega_i 0 + B_i \cos\omega_i 0) = \mathbf{y}_0$$
$$\dot{\mathbf{y}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i (\omega_i A_i \cos\omega_i 0 - \omega_i B_i \sin\omega_i 0) = \dot{\mathbf{y}}_0$$
―――（6.52）

従って、初期条件を与える条件式は

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i B_i = \mathbf{y}_0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{Y}_i A_i = \dot{\mathbf{y}}_0 \qquad ――― (6.53)$$

となる。上式両辺の左より、 $\mathbf{Y}_j^T \mathbf{M}$ を掛けると、

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i B_i = \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i A_i = \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}_0 \qquad ――― (6.54)$$

上式の左辺を展開すると、

$$\mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_1 B_1 + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_2 B_2 + \cdots + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_j B_j + \cdots \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_n B_n$$
$$\mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}_0 = \omega_1 \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_1 A_1 + \omega_2 \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_2 A_2 + \cdots + \omega_j \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_j A_j + \cdots + \omega_n \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_n A_n$$

――― (6.55)

となり、次の直交条件

$$\mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i = \bar{m}_i ; \quad \mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_j = 0 \qquad ――― (6.56)$$

より、式(6.55)の右辺で、j 次の項のみ残ることになる。ここで、 $\bar{m}_i$ は i 次の一般化質量と呼ばれる。従って、式(6.54)は次のようになる。

$$\bar{m}_j B_j = \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0$$
$$\omega_j \bar{m}_j A_j = \mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}_0 \qquad ――― (6.57)$$

最終的に、初期条件が与えられたときの係数は、式(6.51)のような連立方程式を解くことなく、直交条件を用いることで次式として与えられる。

$$B_j = \frac{\mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0}{\bar{m}_j}$$
$$A_j = \frac{\mathbf{Y}_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}_0}{\omega_j \bar{m}_j} \qquad ――― (6.58)$$

6.6 自由振動における減衰

本節では、減衰を持つ多自由度系の振動方程式について考える。ここでも、図に示す 2 自由度系を例にとる。

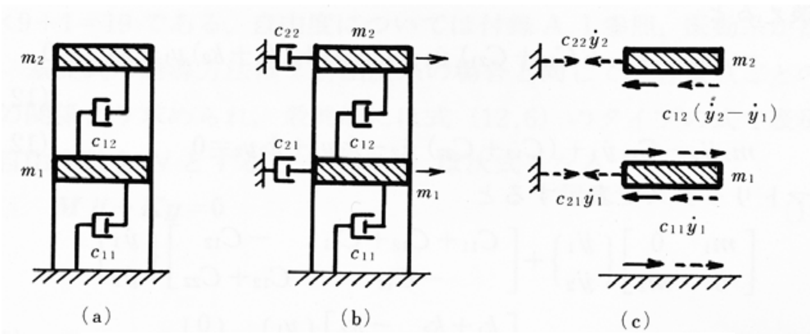

図 6.4 減衰をもつ 2 層ラーメン

図の（c）を参考にして、力の釣合より、次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) - c_{21}\dot{y}_1 - c_{11}\dot{y}_1 + c_{12}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\
m_2\ddot{y}_2 &= -k_2(y_2 - y_1) - c_{22}\dot{y}_2 - c_{12}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)
\end{aligned}
\qquad ———（6.59）
$$

まとめ直すと

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 + (c_{11} + c_{12} + c_{21})\dot{y}_1 - c_{12}\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = 0 \\
m_2\ddot{y}_2 - c_{12}\dot{y}_1 + (c_{12} + c_{22})\dot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_1 = 0
\end{aligned}
$$

となり、上式を行列表示すると、自由振動の方程式は、

$$
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad ———（6.60）
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12} + c_{21} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{22} + c_{12} \end{bmatrix}
$$

となる。ここで、**C** は減衰行列と呼ばれる。

自由振動の解を次式で仮定する。

$$
\mathbf{y} = \mathbf{Y}e^{st} \qquad ———（6.61）
$$

上式を 1 回、2 回微分して、速度と加速度を求め、

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= s\mathbf{Y}e^{st} = s\mathbf{y} \\
\ddot{\mathbf{y}} &= s^2\mathbf{Y}e^{st} = s^2\mathbf{y}
\end{aligned}
\qquad ———（6.62）
$$

式(6.61)と(6.62)を式(6.60)に代入すると、

$$(s^2\mathbf{M}+s\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{Y}e^{st}=\mathbf{0}$$ ———（6.63）

となる。従って、前述と同様に、次式を解いて固有値sと固有ベクトル$\mathbf{Y}$を求める必要がある。

$$\left|s^2\mathbf{M}+s\mathbf{C}+\mathbf{K}\right|=0$$ ———（6.64）

この振動数方程式の解は、一般に実数根が得られる保証は無く、そのため、複素固有値問題となってしまう。これについては、後章でこの減衰を取り扱うことにする。