第７章　多自由度の強制振動

7.1 多自由度系の強制振動

本節では、多自由度系に強制振動が加わった場合の振動方程式について考える。ここでも、まず、自由度系について学ぶことにする。図7.1には、2自由度系のモデルが描かれている。

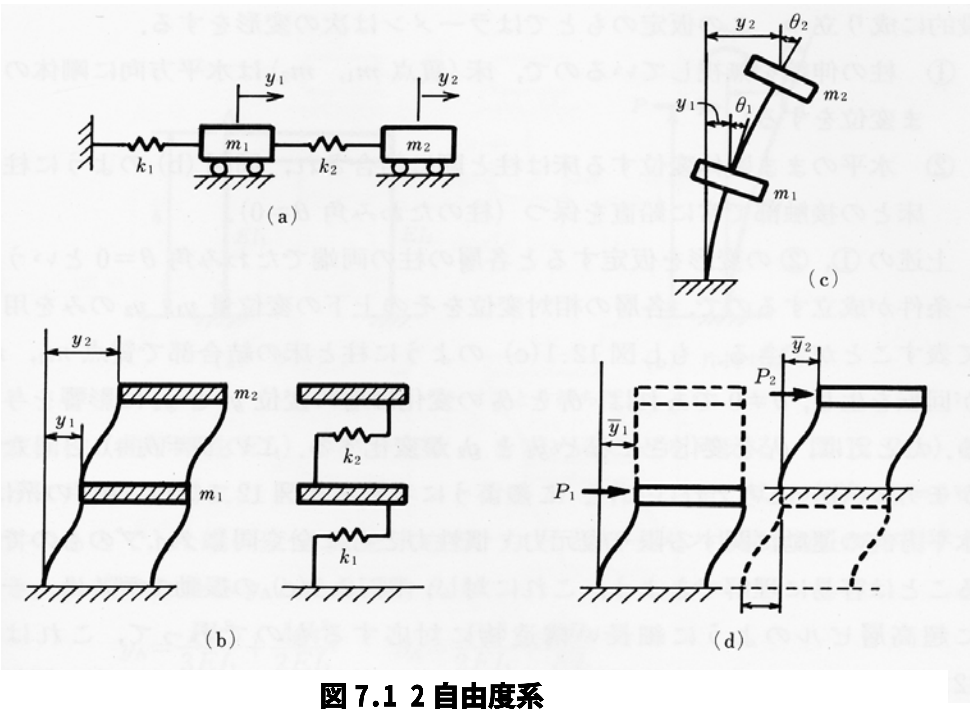

図 7.1 2 自由度系

強制振動がある場合の振動方程式を以下に示す。ただし、ここでは、減衰はないものとする。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{P}(t) \qquad ―――（7.1）$$

ここで、$\mathbf{M}$ は質量行列、$\mathbf{K}$ は剛性行列、$\mathbf{y}$ は変位ベクトル、$\ddot{\mathbf{y}}$ は加速度ベクトル、$\mathbf{P}(t)$ は強制荷重ベクトルを意味する。これらは、2自由度モデルでは、以下のようである。内容については、前節を参照されたい。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$
$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \qquad ―――（7.2）$$

この連立微分方程式をモーダルアナリシスによって、独立したｎ個の２階微分方程式に分離する。この手法によって、1自由度系振動論の知識がそのまま利用できることになる。

変位ベクトル $\mathbf{y}$ を次のように正規化モードで座標変換する。新たな変位ベクトル $\mathbf{q}$ を一般化変位と呼ぶ。

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}(t)=\mathbf{\Psi}\mathbf{q}(t);\quad \mathbf{\Psi}=(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots\boldsymbol{\varphi}_n)\\&\ddot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}(t)\end{aligned}\qquad ———（7.3）$$

ここで、$\mathbf{\Psi}$ は正規化モードを横に並べた正規化モード行列である。以後、固有対の順番は、固有値の小さい順に並んでいるものとする。すなわち、式(7.5)で、λ_1 は最も小さい値で、λ_n は最も大きい値である。この行列はモードの直交条件と正規化条件により、次の性質がある。

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}=\mathbf{I}\qquad ———（7.4）$$

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Lambda};\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{bmatrix}\qquad ———（7.5）$$

2自由度系における座標変換は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&y_1(t)=\phi_{11}q_1(t)+\phi_{12}q_2(t)\qquad \ddot{y}_1(t)=\phi_{11}\ddot{q}_1(t)+\phi_{12}\ddot{q}_2(t)\\&y_2(t)=\phi_{21}q_1(t)+\phi_{22}q_2(t)\qquad \ddot{y}_2(t)=\phi_{21}\ddot{q}_1(t)+\phi_{22}\ddot{q}_2(t)\end{aligned}\qquad ———（7.6）$$

座標変換式(7.3)を振動方程式(7.1)に代入し、一般化変位に関する微分方程式を得る。

$$\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{\Psi}\mathbf{q}=\mathbf{P}(t)\qquad ———（7.7）$$

次に、上式両辺の左より、$\mathbf{\Psi}^T$ を掛けると、

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}\mathbf{q}=\mathbf{\Psi}^T\mathbf{P}(t)\qquad ———（7.8）$$

となる。ここで、モード行列の直交条件(7.4)と(7.5)を利用すると、上式は、次のような分離した微分方程式となる。

$$\begin{aligned}&\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Lambda}\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{\Psi}^T\mathbf{P}(t)\\&\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Lambda}\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{\Psi}^T\mathbf{P}(t)\end{aligned}\qquad ———（7.9）$$

上式をさらに1自由度系の振動方程式と同様に書き下すと、次式となる。

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q = \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{P}(t); \quad (s = 1 \sim n)$$
$$(\omega_s^2 = \lambda_s) \qquad \text{———（7.10）}$$

2自由度系では、上式は以下のようである。

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \phi_{11} P_1(t) + \phi_{21} P_2(t)$$
$$\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \phi_{12} P_1(t) + \phi_{22} P_2(t) \qquad \text{———（7.10）}$$

上式から分かるように、分離していない振動方程式がモード行列を用いて座標変換することで、全て1自由度の振動方程式に変換されている。強制外力項は、外力ベクトルと当該正規化モードと内積の形式で新たな強制外力となっていることに注意されたい。

例題 7.1

2 層せん断型のモデルで、質量： $m_1 = 1.0 \times 10^6 kg, m_2 = 2.0 \times 10^6 kg,$ **、剛性：** $k_1 = 2.0 \times 10^6 N/m, k_2 = 3.0 \times 10^6 N/m$ **、外力：** $P_1 = 0, P_2 = 2.0 \times 10^4 \sin(t) N$ **を有する系について、分離した振動方程式を求めよ。**

各パラメタは以下のようである。

$$m_1 = 1.0 \cdot 10^6 kg, m_2 = 2.0 \cdot 10^6 kg,$$
$$k_1 = 2.0 \cdot 10^6 N/m, k_2 = 3.0 \cdot 10^6 N/m,$$
$$P_1 = 0, P_2 = 2.0 \cdot 10^4 \sin(t) N$$

上記の値を用いて、振動方程式を求める。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{P}$$
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^6 & -3 \cdot 10^6 \\ -3 \cdot 10^6 & 3 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$
$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{Bmatrix} \sin(t)$$

次に、一般固有値問題で固有値と固有ベクトルを求める。

$$\left|\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} 5\cdot10^6-\lambda\cdot1\cdot10^6 & -3\cdot10^6 \\ -3\cdot10^6 & 3\cdot10^6-\lambda\cdot1\cdot10^6 \end{vmatrix}=0$$

固有値λについて展開すると、特性多項式は、

$$(5-\lambda)(3-2\lambda)-9=0$$
$$2\lambda^2-13\lambda+6=0$$

となり、上の2次方程式を解くと、固有値は、

$$(2\lambda-1)(\lambda-6)=0;\quad \lambda_1=0.5\quad \lambda_1=6$$

として得られる。

次に、固有ベクトルを求める。

$$\mathbf{KY}_i-\lambda_i\mathbf{MY}_i=\mathbf{0}$$

上式を利用すると、2自由度の場合は、

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}}=\frac{3}{5-\lambda_1\cdot1}=\frac{3}{5-0.5\cdot1}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}=\frac{3}{5-\lambda_2\cdot1}=\frac{3}{5-6\cdot1}=-3$$

第2層の変位を1とする基準振動モードは、

$$\mathbf{y}_1=\begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix};$$
$$\mathbf{y}_2=\begin{Bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

となる。

求めた固有値から固有角振動数と固有周期を次のように求めておく。

$$\boxed{\begin{aligned}&\omega_1=\sqrt{0.5}=0.707;\quad \omega_2=\sqrt{6}=2.449\\ &T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=8.887;\quad T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=2.566\end{aligned}}$$

次に、正規化条件より正規化モードを求める。まず、係数C_1, C_2は、

$$C_j^2 \sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2 = 1$$
$$C_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_{ij}^2}}$$

より、

$$C_1 = \frac{1}{10^3 \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 1.0 + 1 \cdot 2}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{\frac{22}{9}}} = 0.6396 x 10^{-3}$$
$$C_2 = \frac{1}{10^3 \sqrt{9 \cdot 1.0 + 1 \cdot 2}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{11}} = 0.3015 x 10^{-3}$$

となる。この係数を用いると正規化モードは

$$\boldsymbol{\varphi}_j = C_j \mathbf{Y}_j$$

より

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = C_1 \begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{Bmatrix} = 0.6396 x 10^{-3} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4264 \\ 0.6396 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_1 = C_2 \begin{Bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{Bmatrix} = 0.3015 x 10^{-3} \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9045 \\ 0.3015 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

となる。

　ここで、得られた基準振動モードと正規化モードの直交性を検証しよう。まず、基準振動モードについて検討する。次のように基準振動モードベクトルを横に並べた基準振動モード行列を定義する。

$$\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この基準振動モード行列を用いて、次式を計算する。

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y}; \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}10^6=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}10^6$$

$$=\begin{bmatrix}2.444 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}10^6;\quad \bar{m}_1=2.444\cdot 10^6\quad \bar{m}_2=11\cdot 10^6$$

ここで、$\bar{m}_1,\bar{m}_2$ は一般化質量である。次に、

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}10^6=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ -18 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}10^6$$

$$=\begin{bmatrix}1.222 & 0\\ 0 & 66\end{bmatrix}10^6;$$

上式で求めた対角項の値を、該当する一般化質量で割ると、

$$1.222/\bar{m}_1=1.222/2.444=0.5=\lambda_1$$
$$66/\bar{m}_2=66/11=6=\lambda_2$$

となり、各固有値と等しくなる。

次に、正規化モードの直交性を検討する。まず、正規化モード行列を次のように作成する。

$$\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}0.4264 & -0.9045\\ 0.6396 & 0.3015\end{bmatrix}10^{-3}$$

上式を用いて、直交性を確認する。

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}0.4264 & 0.6396\\ -0.9045 & 0.3015\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4264 & -0.9045\\ 0.6396 & 0.3015\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4264 & 1.2792\\ -0.9045 & 0.6030\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4264 & -0.9045\\ 0.6396 & 0.3015\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}0.4264 & 0.6396\\ -0.9045 & 0.3015\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4264 & -0.9045\\ 0.6396 & 0.3015\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2132 & 0.6396\\ -5.427 & 3.618\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4264 & -0.9045\\ 0.6396 & 0.3015\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 6.0\end{bmatrix}$$

次に、得られた結果を元に、分離した振動方程式を求めよう。まず、

外力項は、

$$\phi_{11}P_1(t)+\phi_{21}P_2(t)=0.4264P_1(t)+0.6396P_2(t)=0.6396\cdot 2\cdot 10^4\sin t=1.2792\cdot 10^4\sin t$$
$$\phi_{12}P_1(t)+\phi_{22}P_2(t)=-0.9045P_1(t)+0.3015P_2(t)=0.3015\cdot 2\cdot 10^4\sin t=0.603\cdot 10^4\sin t$$

となる。従って、振動方程式は、

$$\ddot{q}_s+\omega_s^2 q=\boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{P}(t);\quad (s=1\sim n)$$

より、

$$\ddot{q}_1(t)+0.5q_1(t)=1.2792\cdot 10^4\sin t$$
$$\ddot{q}_2(t)+6q_2(t)=0.603\cdot 10^4\sin t$$

となる。

7.2　地震荷重が加わる場合の振動方程式

本節では、地震が加わる場合の振動方程式を導くことにする。地表の変位を$\bar{y}$とし、自由度の相対変位ベクトルを$\mathbf{y}$とする。質点の絶対変位及び加速度は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+\bar{y};\quad \ddot{\mathbf{x}}=\ddot{\mathbf{y}}+\ddot{\bar{y}} \qquad ―――（7.11）$$

上式を自由振動方程式に代入し、

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{y}}+\ddot{\bar{y}})+\mathbf{K}\mathbf{y}=\mathbf{0} \qquad ―――（7.12）$$

整理すると、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{K}\mathbf{y}=-\mathbf{M}\mathbf{I}_x\ddot{\bar{y}};\quad \mathbf{I}_x{}^T=\{1\quad 1\quad \cdots\quad 1\} \qquad ―――（7.13）$$

となる。ここで、ベクトル$\mathbf{I}_x$では、地表変位と同方向の自由度は1となり、他は0となる。例えば、例題で取り上げたせん断型では、全て１のベクトルとなる。

2自由度系で地震時の振動方程式を求めてみよう。

$$m_1(\ddot{y}_1+\ddot{\bar{y}})=-k_1y_1+k_2(y_2-y_1)$$
$$m_2(\ddot{y}_2+\ddot{\bar{y}})=-k_2(y_2-y_1) \qquad ―――（7.14）$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1+(k_1+k_2)y_1-k_2y_2&=-m_1\ddot{\bar{y}} \\ m_2\ddot{y}_2-k_2y_1+k_2y_2&=-m_2\ddot{\bar{y}} \end{aligned} \qquad ―――（7.15）$$

となる。行列で表示すると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{\bar{y}} \qquad ―――（7.16）$$

となる。

これ以後は、前節と同様に、モーダルアナリシスで振動方程式を分離した型にすべきであるが、先に減衰項について考えておこう。

7.3　モード比例型減衰

免震デバイスなどを除いて、一般に、減衰行列は剛性行列や質量行列のように直接求められない。さらに、一般的に定義した減衰行列を用いると、前章の式(6.64)のように、固有値問題の解は複素根となってしまう。そこで、減衰のない固有値問題で得た正規化モードで、減衰行列を対角化できるとすれば、減衰行列は比較的容易に得ることが可能である。このような減衰を比例減衰、対角化できない減衰を非比例減衰と言う。

比例減衰
非比例減衰

本節では、この減衰、つまりモード比例減衰について考えよう。比例減衰は、次のように正規化モード行列で減衰行列を対角化できるものとする。

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Psi}=\bar{\mathbf{C}};\quad \bar{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix} c_1 & & & \mathbf{0} \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & c_n \end{bmatrix} \qquad ―――（7.17）$$

比例減衰の一般形は、次の Caughey 式で表される。

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^j\}$$
$$= \{a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{M}\mathbf{K}^2 + a_3 \cdots\} \quad ―――（7.18）$$

ここで、$a_0, a_1, a_2, \cdots \quad a_n$ は未定定数であり、この値は次の方法で決めていくことになる。まず、未定定数を決めるために、ｓ次の固有対を用いると、

$$(-\omega_s^{\ 2}\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{0}; \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_s$$

となる。次に上式両辺の左より、質量行列の逆行列である $\mathbf{M}^{-1}$ を掛けると、

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\boldsymbol{\varphi}_s$$

となる。さらに、右の吹き出しを考慮すると、

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^j\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2j}\boldsymbol{\varphi}_s \quad ―――（7.19）$$

が得られる。

$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\boldsymbol{\varphi}_s$
が成立すると両辺の左より行列 A を掛ける。
$\mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{A}^2\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_s$
となり、上式は第１行を考慮すると、
$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\varphi}_s = \omega_s^{\ 2}\cdot\omega_s^{\ 2}\boldsymbol{\varphi}_s = (\omega_s^{\ 2})^2\boldsymbol{\varphi}_s$
が成立する。上記の処理を再度実行すると、次式が得られる。
$\mathbf{A}^j\boldsymbol{\varphi}_s = (\omega_s^{\ 2})^j\boldsymbol{\varphi}_s$

　減衰行列は、s次正規化モードに対し、式(7.17)と(7.18)を考慮すると

$$\boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_s = \boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{M}\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^j\}\boldsymbol{\varphi}_s$$

で与えられ、さらに、上式は式(7.19)を考慮すると、

$\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij};$
$\delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$

$$\boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_s = \boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{M}\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_s^{2j}\boldsymbol{\varphi}_s\}$$
$$= \boldsymbol{\varphi}_s^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_s\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_s^{2j}\} = 1\cdot\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_s^{2j}$$
$$= a_0 + a_1\omega_s^2 + a_2\omega_s^4 + \cdots = C_s \quad ―――（7.20）$$

となる。当然、上式で異なった正規化モード $\boldsymbol{\varphi}_x^T$ を使用すれば、正規条件より

$$\boldsymbol{\varphi}_x^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_s = \boldsymbol{\varphi}_x^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_s\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega_s^{2j}\} = 0 \quad (x \neq s) \quad ―――（7.21）$$

となり、座標変換された減衰行列の非対角項はゼロとなる。このように正規化モード行列を使用すれば、Caughey式で表された減衰は対角化されることになる。

式(7.20)で得られたｓ次の減衰係数は、減衰定数 h_s を用いると

$$C_s = 2h_s\omega_s = a_0 + a_1\omega_s^2 + a_2\omega_s^4 + \cdots \qquad ———（7.22）$$

となり、減衰定数は、

$$2h_s = a_0\frac{1}{\omega_s} + a_1\omega_s + a_2\omega_s^3 + \cdots \qquad ———（7.23）$$

として表される。後は、減衰定数を設定することで、未定定数を決めることになる。無論、設定する減衰定数の数と未定定数の数は同じである。

現在、広く使用されている比例型減衰は、多くの未定定数を用いるわけではなく、現在では以下の3種類が一般に用いられている。

１．質量比例型
２．剛性比例型
３．レーリー減衰

上記の3つの比例型減衰では、上の２つが未定定数を1つ用い、レーリー減衰は2つの未定定数を用いる。

１）質量比例型

質量比例型の減衰定数は定数 a_0 を用いており、a_0 は式(7.22)より、

$$C_s = 2h_s\omega_s = a_0 \qquad ———（7.24）$$

で与えられる。ここでは、ｓ次の固有角振動数とｓ次モードの減衰定数 h_s を設定する。減衰行列は、式(7.18)より、

$$\mathbf{C} = 2h_s\omega_s\mathbf{M} \qquad ———（7.25）$$

として得られる。得られた減衰定数を座標変換すると、

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Psi} = 2h_s\omega_s\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi} = 2h_s\omega_s\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2h_s\omega_s & & & \\ & 2h_s\omega_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2h_s\omega_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}:単位行列$$

となり、分離された振動方程式の減衰係数は全て同一となる。例えば、ｊ次の減衰定数h_jは、

$$C_j = 2h_s\omega_s = \frac{2h_s\omega_s}{\omega_j}\omega_j$$
$$h_j = \frac{h_s\omega_s}{\omega_j} \qquad ―――（7.26）$$

となり、振動数に逆比例する。

２）剛性比例型

剛性比例型の減衰定数は定数a_1を用いており、a_1は式(7.22)より、

$$C_s = 2h_s\omega_s = a_1\omega_s^2;\quad a_1 = \frac{2h_s}{\omega_s} \qquad ―――（7.27）$$

として得られる。従って、減衰行列は、

$$\mathbf{C} = \frac{2h_s}{\omega_s}\mathbf{K} \qquad ―――（7.28）$$

となる。得られた減衰定数を座標変換すると、

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Psi} = \frac{2h_s}{\omega_s}\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 2h_s\frac{\omega_1^2}{\omega_s} & & \\ & 2h_s\frac{\omega_2^2}{\omega_s} & \\ & & \ddots \\ & & & 2h_s\frac{\omega_n^2}{\omega_s} \end{bmatrix}$$
$$C_j = 2h_s\frac{\omega_j^2}{\omega_s}$$

となり、分離された振動方程式の減衰係数は上式で与えられる。例えば、ｊ次の減衰定数h_jは、

$$C_j = 2h_s\frac{\omega_j^2}{\omega_s} = 2h_s\frac{\omega_j}{\omega_s}\omega_j$$
$$h_j = h_s\frac{\omega_j}{\omega_s} \qquad ―――（7.29）$$

となり、振動数に比例した値となる。高次モードに振動数は、自動的に

大きな値となることが予想される。

３）レーリー減衰

レーリー減衰の減衰定数は定数 a_0, a_1 の２つを用いており、式(7.22)より、減衰定数 h_{s1}, h_{s2} を与えることで

$$\begin{aligned} C_{s1} &= 2h_{s1}\omega_{s1} = a_0 + a_1\omega_{s1}^2 \\ C_{s2} &= 2h_{s2}\omega_{s2} = a_0 + a_1\omega_{s2}^2 \end{aligned} \qquad ———（7.30）$$

という連立方程式が得られる。この方程式を解くことで、係数 a_0, a_1 は、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(h_{s1}\omega_{s1} - h_{s2}\omega_{s2})}{\omega_{s1}^2 - \omega_{s2}^2} \\ a_0 &= \frac{2\omega_{s1}\omega_{s2}(h_{s1}\omega_{s2} - h_{s2}\omega_{s1})}{\omega_{s2}^2 - \omega_{s1}^2} \end{aligned} \qquad ———（7.31）$$

として得られる。得られた係数を用いると、減衰行列は、次式となる。

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \qquad ———（7.32）$$

分離された振動方程式の減衰係数、例えば、ｊ次の減衰定数 h_j は、

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Psi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Psi} = a_0\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi} + a_1\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi} \\ &C_j = 2h_j\omega_j = a_0 + a_1\omega_j^2 \\ &h_j = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_j} + a_1\omega_j\right) \end{aligned} \qquad ———（7.33）$$

となる。レーリー減衰は振動数について逆比例と比例の和として表される。

7.4　減衰がある地震時振動

地震が加わる場合で、減衰を有する多自由度系の振動方程式は、式(7.11)を参考にすると、次のようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{I}_x\ddot{y} \qquad ———（7.34）$$

ここで使用する減衰行列は先に示した比例型であるとする。

次に、正規化モード行列を用いて一般化変位 $\boldsymbol{q}$ に変換する。

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}(t)=\mathbf{\Psi}\mathbf{q}(t)\\&\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{q}}(t)\\&\ddot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}(t)\\&\mathbf{q}^T=(q_1\ q_2\ \cdots);\ \mathbf{\Psi}=[\boldsymbol{\varphi}_1\ \ \boldsymbol{\varphi}_2\ \cdots]\end{aligned}$$ ———（7.35）

上式を振動方程式(7.34)に代入すると、

$$\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}+C\mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{q}}+K\mathbf{\Psi}\mathbf{q}=-\mathbf{M}\mathbf{I}_x\ddot{y}$$ ———（7.36）

となり、上式両辺の左より、$\mathbf{\Psi}^T$ を掛ける。

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Psi}^TC\mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Psi}^TK\mathbf{\Psi}\mathbf{q}=-\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{I}_x\ddot{y}$$

ここで、次の正規直交条件によって

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}=\mathbf{I};\quad \mathbf{\Psi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Psi}=\bar{\mathbf{C}};\\&\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Lambda};\end{aligned}$$

振動方程式は分離した次の方程式となる。

$$\ddot{q}_i+2h_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2q_i=-\beta_i\ddot{y};\quad (i=1,\cdots,n)$$ ———（7.37）

ここで、減衰定数として、レーリー減衰の場合

$$h_j=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_j}+a_1\omega_j\right)$$

となり、また、右辺の β_i は刺激係数と呼ばれ、次式で計算される。

$$\beta_j=\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{I}_x}{\bar{m}_j}$$ ———（7.38）

上式の $\bar{m}_i$ は一般化質量であり、正規化モードを使用する場合は全てその値は１となる。

　このような多自由度系の振動方程式の解析方法は、まず正規化モードを用いて方程式を分離し、次に各々独自に方程式を解いた後、その解を次式のように重ね合わせて、元の方程式の解とする。この手法は一般にモーダルアナリシスと呼ばれる。

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{\Psi q}(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i q_i(t)=\varphi_1 q_1(t)+\varphi_2 q_2(t)+\cdots \qquad ―――（7.39）$$

次に、刺激係数について考える。刺激係数(7.38)は展開定理の公式より、地動加速度の分布ベクトル$\mathbf{I}_x$を固有ベクトル（正規化モード）に展開したときの係数に相当する。

固有ベクトル（正規化モード）は独立であるため、式(7.39)と同様に地動加速度の分布ベクトル$\mathbf{I}_x$を次式のように展開することができる。

$$\mathbf{I}_x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{\varphi}_i=\alpha_1\boldsymbol{\varphi}_1+\alpha_2\boldsymbol{\varphi}_2+\cdots \qquad ―――（7.40）$$

両辺左より、$\varphi_j^T\mathbf{M}$を掛けると

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{I}_x=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\alpha_i\boldsymbol{\varphi}_i=\alpha_1\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_1+\alpha_2\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_2+\cdots$$

となる。上式右項に直交条件を考慮すると、上式は、

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{I}_x=\alpha_j\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j=\alpha_j\overline{m}_j$$
$$\alpha_j=\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{I}_x}{\overline{m}_j} \qquad ―――（7.41）$$

となる。式(7.38)と(7.41)を比較すれば分かるように、β_jはα_jに等しく、先に述べたように、刺激係数β_jは地動加速度の分布ベクトル$\mathbf{I}_x$を展開した係数となる。

式(7.40)のｓ次項$\beta_s\boldsymbol{\varphi}_s$は刺激関数と呼ばれ、分布ベクトル$\mathbf{I}_x$のｓ次固有モード成分となる。従って、全ての次数の刺激関数を加え合わせると分布ベクトル$\mathbf{I}_x$の要素が１の場合、１となる。要素が0の場合は無論、0となる。

$$\sum_{s=1}^{n}\beta_s\varphi_{si}=1 \qquad ―――（7.42）$$