第８章　強制外力を受ける多振動系の挙動

8.1 強制外力に対する応答

多自由度系に強制外力が加わった場合に関する挙動について、さらに理解を深めていこう。各質点に外力が加わる場合の振動方程式は次のようになる。

$$\mathbf{M\ddot{y}} + \mathbf{C\dot{y}} + \mathbf{Ky} = \mathbf{f}(t) \qquad ―――（8.1）$$

ここで、$\mathbf{C}$ は比例減衰とし、$\mathbf{f}(t)$ は各質点に加わる強制外力である。

非減衰系の正規化モードで、変位を変換すると、

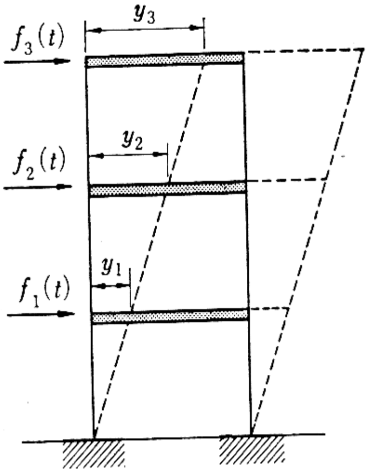

図 8.1 多層骨組のせん断型モデル

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Psi q}(t) \\
&\mathbf{\dot{y}}(t) = \mathbf{\Psi \dot{q}}(t) \\
&\mathbf{\ddot{y}}(t) = \mathbf{\Psi \ddot{q}}(t) \\
&\mathbf{q}^T = (q_1\ q_2\ \cdots);\ \mathbf{\Psi} = [\boldsymbol{\varphi}_1\ \boldsymbol{\varphi}_2\ \cdots] \\
&\boldsymbol{\varphi}_s^T = (\varphi_{s,1}\ \varphi_{s,2}\ \varphi_{s,3}\ \cdots)
\end{aligned} \qquad ―――（8.2）$$

で与えられる。上式を式(8.1)に代入し、左より、ψ^T を掛け、

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M\Psi\ddot{q}} + \mathbf{\Psi}^T C\mathbf{\Psi\dot{q}} + \mathbf{\Psi}^T K\mathbf{\Psi q} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{f}(t)$$

ここで、次の正規直交条件を適用すると

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M\Psi} = \mathbf{I};\quad \mathbf{\Psi}^T\mathbf{C\Psi} = \mathbf{\bar{C}};$$
$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K\Psi} = \mathbf{\Lambda};$$

一般化変位に関するｎ個の非連成非同次微分方程式が次のように得られる。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \bar{f}_i / \bar{m}_i;\quad (i = 1 \sim n) \qquad ―――（8.3）$$

ここで、$\bar{f}_s$ はｓ次の一般化外力と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\bar{f}_s(t) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_{s,j} f_j(t) = \varphi_{s,1} f_1(t) + \varphi_{s,2} f_2(t) + \varphi_{s,3} f_3(t) + \cdots \qquad ―――（8.4）$$

式(8.3)は、一般化外力に対するs次の１自由度系応答がｎ個定まり、これを式(8.2)の第１項に代入して解が定まる。

　静止状態から任意外力が加わるときの過渡解はインパルス応答を用いることで、次のように表される。ただし、使用するモードが正規化モードである場合は、一般化質量 $\overline{m}_s$ は１となる。

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_s \int_0^t \overline{f}_s(\tau) g_1(t-\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_s \frac{1}{\sqrt{1-h_s^2}\,\omega_s \overline{m}_s} \int_0^t \overline{f}_s(\tau) e^{-h_s\omega_s(t-\tau)} \sin\left(\sqrt{1-h_s^2}\,\omega_s (t-\tau)\right) d\tau\end{aligned}$$
———（8.5）

ここで、ω_s はｓ次モードの固有角振動数であり、h_s は同じくｓ次モードの減衰定数である。

　次に、ある質点rだけに調和外力が作用する時の定常解をモード重ね合わせにより求めてみよう。振動方程式は式(8.1)より以下のように与えられる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \overline{\mathbf{I}}_r F e^{ipt}$$
———（8.6）

ここで、 $\overline{\mathbf{I}}_r$ は加力点ｒで１、他は0となる外力分布ベクトルである。

$$\overline{\mathbf{I}}_r^T = \left(0, 0, \cdots 1, \cdots 0\right)$$
———（8.7）

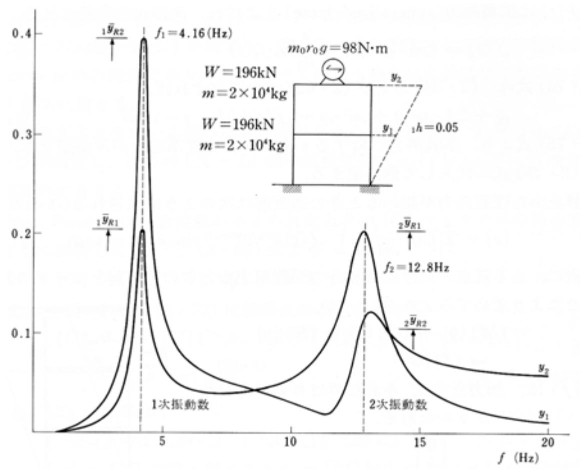

図 8.2 多自由度系の応答

一般化変位に関するｎ個の非連成非同次微分方程式が次のように得られる。

$$\ddot{q}_s + 2h_s\omega_s\dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \varphi_{s,r} F e^{ipt} / \overline{m}_s ; \quad (s = 1 \sim n)$$
———（8.8）

ここで、まず、次の微分方程式を考える。

$$\ddot{q}_s + 2h_s\omega_s\dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = F e^{ipt}$$
———（8.9）

上式の定常解は既に求めており、以下のようであった。

$$q_s = \frac{F}{{\omega_s}^2 - p^2 + 2h_s\omega_s ip} e^{ipt}$$ ―――（8.10）

式(8.8)の解は、式(8.10)を参考にすると、

$$\mathbf{y} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_s^T \frac{F}{{\omega_s}^2 - p^2 + 2h_s\omega_s ip} \frac{\varphi_{s.r}}{\overline{m}_s} e^{ipt}$$ ―――（8.11）

となる。ここで、$\omega_s^2 = k_s / \overline{m}_s$ を考慮し、さらに、係数の分母の虚数を分子にもっていくと、定常解は以下のように求められる。

$$\mathbf{y} = \sum_{s=1}^{n} \frac{F}{1-(\frac{p}{\omega_s})^2 + i2h_s \frac{p}{\omega_s}} \boldsymbol{\varphi}_s^T \frac{\varphi_{s.r}}{k_s} e^{ipt}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (A_s + iB_s) \boldsymbol{\varphi}_s^T \frac{\varphi_{s.r} F}{k_s} e^{ipt}$$ ―――（8.12）

ここで、

$$A_s = \frac{1-(\frac{p}{\omega_s})^2}{\{1-(\frac{p}{\omega_s})^2\}^2 + 4h_s^2(\frac{p}{\omega_s})^2}; \quad B_s = \frac{-2h_s(\frac{p}{\omega_s})}{\{1-(\frac{p}{\omega_s})^2\}^2 + 4h_s^2(\frac{p}{\omega_s})^2}$$

―――（8.13）

また、i 質点の共振曲線は、

$$|y_i(p)| = [(\sum_{s=1}^{n} A_s a_{s,i})^2 + (\sum_{s=1}^{n} B_s a_{s,i})^2]^{\frac{1}{2}}$$ ―――（8.14）

で与えられる。ここで、

$$a_{s,i} = \varphi_{s,r} \cdot \varphi_{s,i} F / k_s = \varphi_{s,r} \cdot \varphi_{s,i} F / (\omega_s^2 \overline{m}_s)$$ ―――（8.15）

8.2　地動に対する応答

減衰を持つ多自由度系に地震動が加わった場合の振動方程式は、次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{I}_x \ddot{\bar{y}}$$ ———（8.16）

ここで使用する減衰行列は先に示した比例型であるとする。
　次に、正規化モード行列を用いて一般化変位 $\mathbf{q}$ に変換する。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{\Psi}\mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}^T &= (q_1\ q_2\ \cdots);\ \mathbf{\Psi} = [\boldsymbol{\varphi}_1\ \boldsymbol{\varphi}_2\ \cdots] \end{aligned}$$ ———（8.17）

上式を振動方程式(8.16)に代入し、さらに両辺の左より、$\mathbf{\Psi}^T$ を掛け、正規直交条件を適用すると、振動方程式は分離した次の方程式となる。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\beta_i \ddot{\bar{y}};\quad (i = 1 \sim n)$$ ———（8.18）

右辺の β_i は刺激係数と呼ばれ、次式で計算される。

$$\beta_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M}\mathbf{I}_x}{\bar{m}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j \varphi_{i,j}}{\bar{m}_j}$$ ———（8.19）

上式の $\bar{m}_i$ は一般化質量であり、正規化モードを使用する場合は全てその値は１となる。また、$\beta_s \boldsymbol{\varphi}_s$ は刺激関数と呼ばれ、分布ベクトル $\boldsymbol{I}_x$ のｓ次固有モード成分となる。従って、全ての次数の刺激関数を加え合わせると分布ベクトル $\boldsymbol{I}_x$ の要素が１の場合、１となる。要素が0の場合は無論、0となる。

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s \varphi_{s,i} = 1 \quad (i = 1 \sim n)$$ ———（8.20）

　地動に対する解は、式(8.17)の解を式(8.16)の第1項に代入することで得られるが、通常はこれを以下のように地動 $\ddot{\bar{y}}$ に対する応答 $q_s(t)$ を用いて表現する。

$$\ddot{q}_s + 2h_s\omega_s\dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = -\ddot{\bar{y}};\quad (s = 1 \sim n)$$ ———（8.21）

このとき、地動に対する解は次のように表される。

$$\mathbf{y} = \sum_{s=1}^{n} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s \cdot q_s(t)$$ ———（8.22）

ここに、式(8.21)の解は、

$$q_s(t)=\int_0^t -\ddot{y}(\tau)g_1(t-\tau)d\tau$$

$$q_s(t)=\int_0^t \left\{-\ddot{y}(\tau)\frac{1}{\sqrt{1-h_s^2}\,\omega_s}e^{-h_s\omega_s(t-\tau)}\sin\left(\sqrt{1-h_s^2}\,\omega_s(t-\tau)\right)\right\}d\tau \qquad ―――（8.23）$$

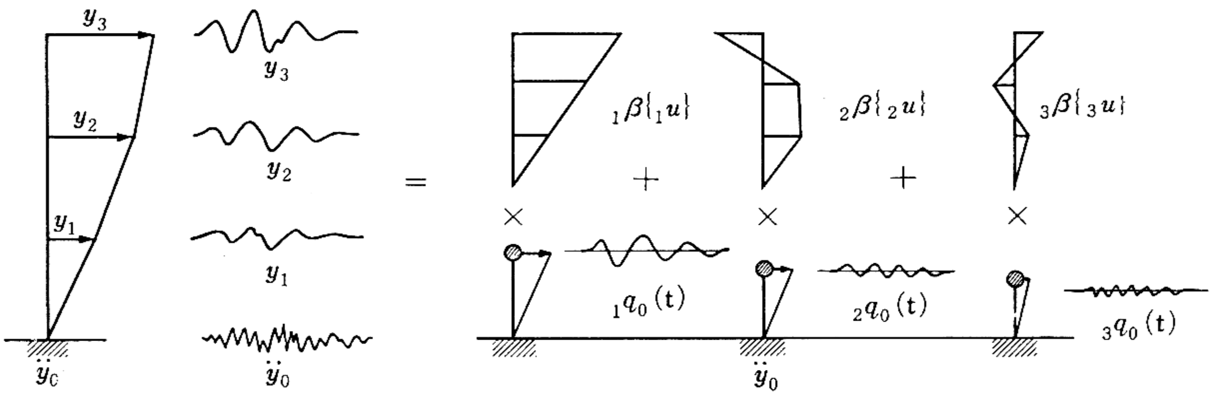

図 8.3 モード分解による応答

式(8.22)を図示すると図8.3のようになる。各次の固有振動$q_s(t)$は固有周期$T_s=2\pi/\omega_s$と減衰定数h_sにより定まり、変位、速度、及び加速度応答は各次の１自由度応答の重ね合わせとして求められる。

8.3　地動に対するベースシャー応答と転倒モーメント応答

次に、地動に対するベースシャー応答と転倒モーメント応答について学ぶ。まず、これらの応答に関して固有振動数成分への分解を行うために、等価質量と等価高さの考え方が用いられる。

建物のベースシャーV_Bは、最下階のせん断力と各層に加わる慣性力の和との釣合から次式で与えられる。

$$V_B=\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{y}_i+\ddot{y}) \qquad ―――（8.24）$$

次に、上のベースシャーを、式(8.22)を用いて次のように固有モード成分に分解する。

$$V_B = \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{s=1}^{n} \beta_s \varphi_{s,i} (\ddot{q}_s + \ddot{y})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \bar{M}_s (\ddot{q}_s + \ddot{y}) \qquad ———（8.25）$$

ここで、$\bar{M}_s$ は

$$\bar{M}_s = (\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i}) \cdot \beta_s \qquad ———（8.26）$$

であり、上式に $\bar{m}_s / \bar{m}_s$ を掛け、式(8.19)の刺激係数を考慮すると

$$\bar{M}_s = (\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i}) \cdot \frac{\bar{m}_s}{\bar{m}_s} \beta_s = \sum_{i=1}^{n} (\frac{m_i \varphi_{s,i}}{\bar{m}_s}) \cdot \bar{m}_s \beta_s = \beta_s^2 \bar{m}_s$$
$$= \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \boldsymbol{M} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s \qquad ———（8.27）$$

となる。式(8.25)は、各次モードの加速度応答 $\ddot{q}_s + \ddot{y}$ とそのモードにおける等価質量 $\bar{M}_s$ との積を加え合わせた量で表されることを示す。式(8.27)より、$\bar{M}_s$ は刺激関数 $\beta_s \boldsymbol{\varphi}_s$ を固有モードとして用いたときの一般化質量に等しく、確定量である。また、次の関係を満たしている。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \boldsymbol{I}_x^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{I}_x = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_x^T \boldsymbol{M} \beta_i \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{I}_x^T \boldsymbol{M} (\beta_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + \beta_2 \boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots)$$
$$———（8.28）$$

上式の左辺 $\boldsymbol{I}_x$ は、下の式を利用しており、

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s \varphi_{s,i} = 1 \quad (i = 1 \sim n)$$

同じく、式(8.28)の $\boldsymbol{I}_x^T$ に上式を適用し、直交条件を利用すると、

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \boldsymbol{M} \beta_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \boldsymbol{M} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s$$

となる。ここで、式(8.27)を適用すると、最終的に次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{s=1}^{n} \bar{M}_s \qquad ———（8.29）$$

次に、転倒モーメントについて考える。まず、建物基礎での転倒モーメントを固有モード成分に分解してみる。建物基礎での転倒モーメ

ント M_B は次式で与えられる。

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} m_i H_i (\ddot{y}_i + \ddot{\bar{y}}) \qquad ―――（8.30）$$

ベースシャーと同様に、各階の加速度 $\ddot{y}_i$ を固有モード成分に分解する。

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} m_i H_i \sum_{s=1}^{n} \beta_s \varphi_{s,i} (\ddot{q}_s + \ddot{\bar{y}})$$

上式の左辺に $\bar{M}_s / \bar{M}_s$ を掛け、整理すると、

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \bar{M}_s \frac{m_i H_i \beta_s \varphi_{s,i}}{\bar{M}_s} (\ddot{q}_s + \ddot{\bar{y}})$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \bar{M}_s \cdot \bar{H}_s (\ddot{q}_s + \ddot{\bar{y}}) \qquad ―――（8.31）$$

ここで、等価高さ $\bar{H}_s$ は

$$\bar{H}_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i H_i \beta_s \varphi_{s,i}}{\bar{M}_s} \qquad ―――（8.32）$$

であり、式(8.26)を利用すると次式となる。

$$\bar{H}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i} H_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i}} \qquad ―――（8.33）$$

式(8.31)は、転倒モーメント M_B が、各次の加速度応答 $\ddot{q}_s + \ddot{\bar{y}}$ と等価質量 $\bar{M}_s$ 及び式(8.32)のの等価高さ $\bar{H}_s$ の積の総和で表されることを示す。等価高さ $\bar{H}_s$ は確定量であり、次の関係を満たす。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i H_i = \mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{I}_x = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}^T \mathbf{M} \beta_i \boldsymbol{\varphi}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_j H_j \varphi_{i,j} \beta_i$$

ここで、$\mathbf{H}^T$ は高さを並べたベクトルである。さらに、上式に $\bar{M}_s / \bar{M}_s$ を掛け、式(8.32)を参考にすると、上式は

$$\sum_{i=1}^{n} m_i H_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j H_j \beta_i \varphi_{i,j}}{\bar{M}_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i \bar{H}_i \qquad ――― (8.34)$$

となる。

例題 8.1
2 層せん断型のモデルで、刺激関数、等価質量、等価高さを求めよ。ただし、以下の量は既に求まっているものとする。

各パラメタは以下のようである。

$$m_1 = 2.0 \cdot 10^6 kg, m_2 = 2.0 \cdot 10^6 kg,$$
$$h_1 = 3.5m, h_2 = 7.0m$$

固有モード（ただし、ここでは、正規化モードではなく、基準振動モードを用いている）

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T = (1.0, 1.946)$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2^T = (1.0, -0.514)$$

上記の値を用いて、まず、刺激係数を求める。

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j \varphi_{i,j}}{\bar{m}_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \varphi_{i,j}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \varphi_{i,j}^2}$$

$$\beta_1 = \frac{m_1 \varphi_{1,1} + m_2 \varphi_{1,2}}{m_1 \varphi_{1,1}^2 + m_2 \varphi_{1,2}^2} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1.0 + 2 \cdot 10^4 \cdot 1.946.}{2 \cdot 10^4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 10^4 \cdot 1.946^2} = \frac{2.946}{4.787} = 0.6154$$

$$\beta_2 = \frac{m_1 \varphi_{2,1} + m_2 \varphi_{2,2}}{m_1 \varphi_{2,1}^2 + m_2 \varphi_{2,2}^2} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1.0 - 2 \cdot 10^4 \cdot 0.514.}{2 \cdot 10^4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 10^4 \cdot 0.514^2} = \frac{0.486}{1.264} = 0.3845$$

次に、上の刺激係数を用いて刺激関数を計算する。

$$\beta_1 \boldsymbol{\varphi}_1 = 0.6154 \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.946 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.615 \\ 1.198 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_2 \boldsymbol{\varphi}_2 = 0.3845 \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.514 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.385 \\ -0.198 \end{Bmatrix}$$

刺激関数を用いて等価質量を求める。

$$\bar{M}_s = \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{M} \beta_s \boldsymbol{\varphi}_s$$

$$\bar{M}_1 = 10^4 \begin{pmatrix} 0.615 & 1.198 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.615 \\ 1.198 \end{Bmatrix}$$
$$= 2.0 \cdot 10^4 (0.615^2 + 1.198^2) = 36269kg$$
$$\bar{M}_1 = 10^4 \begin{pmatrix} 0.385 & -0.198 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.385 \\ -0.198 \end{Bmatrix}$$
$$= 2.0 \cdot 10^4 (0.385^2 + 0.198^2) = 3749kg$$

等価質量の和は

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = 36269 + 3749 = 40018kg$$

となり、 $m_1 + m_2$ とほぼ等しくなっている。
　等価高さは、

$$\bar{H}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i} H_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{s,i}}$$

$$\bar{H}_1 = \frac{m_1 \varphi_{1,1} H_1 + m_2 \varphi_{1,2} H_2}{m_1 \varphi_{s,1} + m_2 \varphi_{s,2}} = \frac{2.0 \cdot 10^4 (1 \cdot 3.5 + 1.946 \cdot 7.9)}{2.0 \cdot 10^4 (1 + 1.946)} = 5.81m$$
$$\bar{H}_2 = \frac{m_1 \varphi_{2,1} H_1 + m_2 \varphi_{2,2} H_2}{m_1 \varphi_{2,1} + m_2 \varphi_{2,2}} = \frac{2.0 \cdot 10^4 (1 \cdot 3.5 - 0.514 \cdot 7.9)}{2.0 \cdot 10^4 (1 - 0.514)} = -0.20m$$

となる。得られた結果から、次式の検証を行う。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i H_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i \bar{H}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i H_i = 2.0 \cdot 10^4 (3.5 + 7.0) = 2.1 \cdot 10^5$$
$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i \bar{H}_i = 36269 \cdot 5.81 - 3749 \cdot 0.20 = 2.1 \cdot 10^5$$

8.4　モーダルアナリシス

多自由度系の線形応答を各次固有振動の1自由度応答の重ね合わせで表す方法は、モード重合法あるいはモーダルアナリシスと呼ばれる。各次の1自由度応答波形を求めて重ね合わせれば、多自由度系の応答波形が得られる。しかし、実用的には応答の最大値だけが問題となることも多い。そこで、応答スペクトルを用いて各次の応答の最大値を求め、これに基づいて多自由度系の最大応答を略算することがしばしば行われる。この方法は、応答スペクトルによるモーダルアナリシスと呼ばれ、実用上非常に有効な手法である。

多自由度系の最大応答の上限値は、各次成分の最大応答の絶対値和(absolute sum)で表される。変位応答では、式(8.22)を用いると

$$\left|y_i\right|_{\max} \le \sum_{s=1}^{n}\left|\beta_s \varphi_{s,i} S_D(T_s, h_s)\right| \qquad ―――（8.35）$$

ここで、S_D はｓ次振動の変位応答スペクトル値を表す。また、応答の最大値は一般には同時に生じないことを考え、最大応答の近似値を、各次応答成分の２乗和平方(root sum square(RSS),square root of sum of squares) で表すことがしばしばある。

$$\left|y_i\right|_{\max} \approx \sqrt{\sum_{s=1}^{n}\left|\beta_s \varphi_{s,i} S_D(T_s, h_s)\right|^2} \qquad ―――（8.36）$$

上式は、実際の地震波に対する応答の場合によくあてはまるとされている。また、式(8.35)と(8.36)の平均値も良い近似を与えるとされている。

$$\left|y_i\right|_{\max} \approx \frac{1}{2}(y_{i,RSS} + y_{i,ABS}) \qquad ―――（8.37）$$

層間変位の最大値は、各次モードの層間変位応答から求める必要がある。

$$\left|\delta_i\right|_{\max} \approx \sqrt{\sum_{s=1}^{n}\left|\beta_s (\varphi_{s,i} - \varphi_{s,i-1}) S_D(T_s, h_s)\right|^2} \qquad ―――（8.38）$$

なお、地震応答の場合、一般に高次の影響は小さくなるので、重ね合わせるモードを適当な次数で打ち切ってしまうことが良くある。略算的には３次程度まで考えればよいことが多い。

例題 8.2
例題 8.1 の 2 層せん断型のモデルで、地震応答を応答スペクトルによるモーダルアナリシスで求めよ。

各パラメタは以下のようである。

$$m_1 = 2.0\cdot 10^6 kg, m_2 = 2.0\cdot 10^6 kg,$$
$$h_1 = 3.5m, h_1 = 7.0m$$

固有モード（ただし、ここでは、正規化モードではなく、基準振動モードを用いている）

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T = (1.0, 1.946)$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2^T = (1.0, -0.514)$$

固有周期は、

$$T_1 = 0.24\sec$$
$$T_2 = 0.078\sec$$

減衰は、１次、２次共、$h = 0.05$ とし、応答スペクトルは梅村スペクトルを用いることにする。地動 $k_G = 0.2$ とすると、

１次　$_1S_D = 90T^2 k_G = 90\cdot 0.24^2 \cdot 0.2 = 1.04cm$

２次　$_2S_D = 90T^2 k_G = 90\cdot 0.078^2 \cdot 0.2 = 0.11cm$

絶対和とRSS法の２つの方法で最大値を推定する。ここでは、例題8.1で求めた刺激関数を用いる。

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_{ABS} = \left\{|\beta_1\boldsymbol{\varphi}_1|\right\}_1 S_D + \left\{|\beta_2\boldsymbol{\varphi}_2|\right\}_2 S_D$$
$$= \begin{Bmatrix} 0.615 \\ 1.198 \end{Bmatrix} 1.04 + \begin{Bmatrix} 0.385 \\ 0.198 \end{Bmatrix} 0.11$$
$$= \begin{Bmatrix} 0.641 \\ 1.246 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.042 \\ 0.022 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.683 \\ 1.268 \end{Bmatrix} cm$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_{RSS} = \sqrt{\left\{\left|\beta_1 \boldsymbol{\varphi}_1\right|_1 S_D\right\}^2 + \left\{\left|\beta_2 \boldsymbol{\varphi}_2\right|_2 S_D\right\}^2}$$

$$= \begin{Bmatrix} \sqrt{0.641^2 + 0.042^2} \\ \sqrt{1.246^2 + 0.022^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.642 \\ 1.246 \end{Bmatrix} cm$$

次に、層間変位は次式のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}_{ABS} = \left\{\left|\beta_1 (\varphi_{1,i} - \varphi_{1,i-1})\right|\right\}_1 S_D + \left\{\left|\beta_2 (\varphi_{2,i} - \varphi_{2,i-1})\right|\right\}_2 S_D$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.615 \\ 0.582 \end{Bmatrix} 1.04 + \begin{Bmatrix} 0.385 \\ 0.583 \end{Bmatrix} 0.11$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.640 \\ 0.605 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.042 \\ 0.064 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.682 \\ 0.669 \end{Bmatrix} cm$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}_{RSS} = \sqrt{\left\{\left|\beta_1 (\varphi_{1,i} - \varphi_{1,i-1})\right|_1 S_D\right\}^2 + \left\{\left|\beta_2 (\varphi_2 - \varphi_{1,i-1})\right|_2 S_D\right\}^2}$$

$$= \begin{Bmatrix} \sqrt{0.640^2 + 0.042^2} \\ \sqrt{0.605^2 + 0.064^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.641 \\ 0.608 \end{Bmatrix} cm$$