第９章　直接応答を求める

9.1 振動方程式と数値計算法

本章では、まず、１自由度系の振動方程式を数値計算で解析する方法について学ぶ。その後、多自由度系に拡張し、さらに、線形振動方程式を数値計算する方法について述べる。この種の振動方程式を数値計算する手法は、線形加速度法、ニューマークβ法、ウイルソンθ法、ルンゲクッタ法など、各種知られているが、ここでは、一般に広く用いられているニューマークのβ法について述べる。その他の数値計算手法を知りたい方は、専門書を参照されたい。

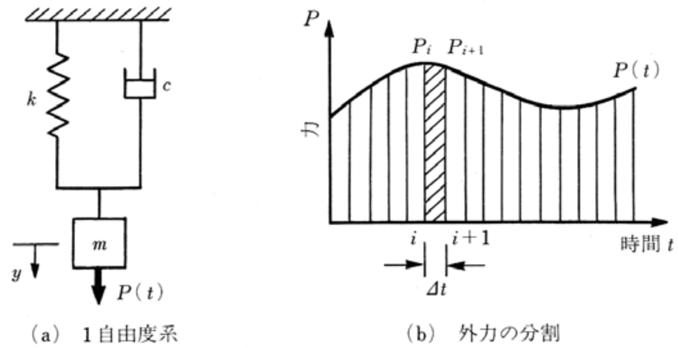

図 9.1 １自由度系に作用する外力の分割

図に示すように１自由度系の振動方程式は、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P(t) \qquad \text{———（9.1）}$$

であり、m,c,k はそれぞれ、質量、減衰係数、バネ定数である。また、$\ddot{y},\dot{y},y$ は加速度、速度、変位である。いま、外力 $P(t)$ を微小時間 Δt 間隔に区分し、図のように長方形パルスの集合と考え、i番目、及びi+1番目の外力の大きさを P_i, P_{i+1} で表す。振動方程式は、 P_{i+1} の作用する時刻において次のように表すことができる。

$$m\ddot{y}_{i+1} + c\dot{y}_{i+1} + ky_{i+1} = P_{i+1} \qquad \text{———（9.2）}$$

ここで、 $\ddot{y}_{i+1},\dot{y}_{i+1},y_{i+1}$ は(i+1)ステップにおける加速度、速度、変位である。ニューマークのβ法に入る前に、平均加速度法と線形加速度法について説明する。

平均加速度法では、iとi+1ステップにおける加速度 $\ddot{y}_i$ と $\ddot{y}_{i+1}$ は Δt 時間内では、図のようにその平均であると仮定する。実際はインデンシャル応答に見られるように、加速度はsin,cosの関数であるので、この平均加速度法の仮定を満足する程度に時間間隔を小にする必要がある。

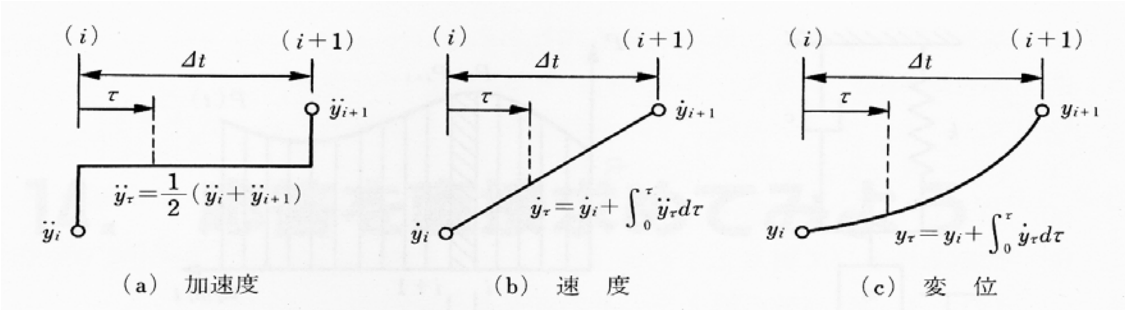

図 9.2 時間間隔内の変化(β=1/4)

この仮定に基づくと、図9.2(a)のように時間間隔 Δt 内のに τ おける加速度は

$$\ddot{y}_\tau = \frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i) \qquad ―――（9.3）$$

で表され、また、速度、変位は上式を τ について積分すると次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_\tau &= \dot{y}_i + \frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\tau \\ y_\tau &= y_i + \dot{y}_i\tau + \frac{1}{4}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\tau^2 \end{aligned} \qquad ―――（9.4）$$

ここで、 $\tau=\Delta t$ のとき、 $\ddot{y}_\tau=\ddot{y}_{i+1}, \dot{y}_\tau=\dot{y}_{i+1}, y_\tau=y_{i+1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \dot{y}_{+1} &= \dot{y}_i + \frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\Delta t \\ y_{i+1} &= y_i + \dot{y}_i\Delta t + \frac{1}{4}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\Delta t^2 \end{aligned} \qquad ―――（9.5）$$

となる。

9.2 線形加速法

線形加速度法では、Δt 時間内の加速度は、$\ddot{y}_i$ から $\ddot{y}_{i+1}$ へ直線的に変化すると仮定する。

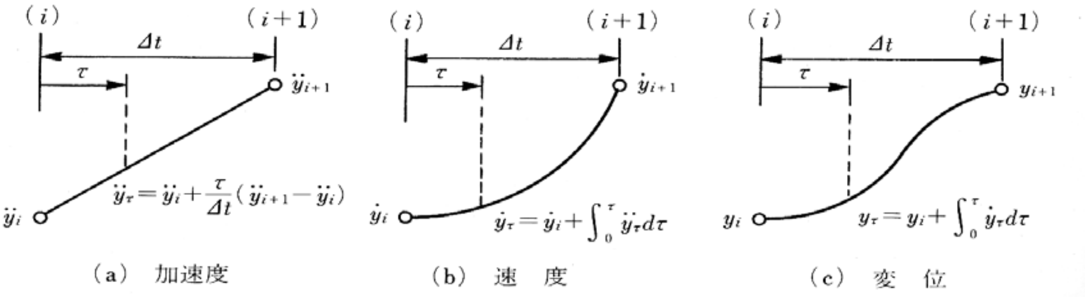

図 9.3 時間間隔内の変化(β=1/6)

この仮定に基づくと、図9.3(a)に示すように τ における加速度は、

$$\ddot{y}_\tau=\ddot{y}_i+\frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{y}_{i+1}-\ddot{y}_i) \qquad \text{———（9.6）}$$

となり、また、速度、変位は上式を τ について積分すると次式となる。

$$\begin{aligned}\dot{y}_\tau&=\dot{y}_i+\ddot{y}_i\tau+\frac{1}{2\Delta t}(\ddot{y}_{i+1}-\ddot{y}_i)\tau^2 \\ y_\tau&=y_i+\dot{y}_i\tau+\frac{1}{2}\ddot{y}_i\tau^2+\frac{1}{6\Delta t}(\ddot{y}_{i+1}-\ddot{y}_i)\tau^3\end{aligned} \qquad \text{———（9.7）}$$

ここで、$\tau=\Delta t$ のとき、$\ddot{y}_\tau=\ddot{y}_{i+1}, \dot{y}_\tau=\dot{y}_{i+1}, y_\tau=y_{i+1}$ であるから、

$$\begin{aligned}\dot{y}_{+1}&=\dot{y}_i+\frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\Delta t \\ y_{i+1}&=y_i+\dot{y}_i\Delta t+\frac{1}{3}\ddot{y}_i\Delta t^2+\frac{1}{6}\ddot{y}_{i+1}\Delta t^2\end{aligned} \qquad \text{———（9.8）}$$

となる。

9.3 ニューマークβ法

ニューマークβ法は時間間隔内の加速度変化を表すβを用いて、(i+1)ステップでの速度、変位を次式のように仮定している。

$$\dot{y}_{+1} = \dot{y}_i + \frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1} + \ddot{y}_i)\Delta t \qquad \text{———（9.9）}$$

$$y_{i+1} = y_i + \dot{y}_i \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta)\ddot{y}_i \Delta t^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} \Delta t^2$$

ここで、$\beta = 1/4,\ 1/6$ とおけば、平均加速度法と線形加速度法の式に対応する。上式から分かるように、$\dot{y}_{i+1}, y_{i+1}$ は $\ddot{y}_{i+1}$ が分かれば求まることになる。この $\ddot{y}_{i+1}$ は振動方程式(9.2)を用いて決定することになるが、これについては後述する。

数値解析をする上で重要なのは、解の安定性と精度である。これについて考えよう。ニューマークβ法による解は時間間隔 Δt の関数として表されるから解の精度は Δt の大きさに左右されることになる。Δt が解析しようとしている系の固有周期 T_n の 1/10 以下であれば、$\beta = 1/6$ は安定で（発散しない)、精度の良い解を与える。しかし、Δt が $T_n/3$ のような大きな値となると、$\beta = 1/6$ では不安定（発散する）な解を与える。このように、ある条件を満たすとき安定な解を与える場合、条件付安定という。線形加速度法である $\beta = 1/6$ では、Δt が $T_n/10$ 以下にならないと解は常に安定とならず、発散する可能性がある。

ここで、注意を要するのはこの固有周期は多自由度系の場合、その全ての次数の固有周期が対象になることである。多自由度系は前述のモーダルアナリシスにより、固有振動数ごとの１自由度系に分解できるので、最少固有周期がこの固有周期に関連することになる。いま、最大固有周期が１秒で、最少固有周期が0.01秒とすると、Δt を最少固有周期の 1/10 にとれば、$\Delta t = 0.001$ としなければならない。しかも、最少固有周期に関連する固有モードは全体振動にほとんど影響を与えなくてもこのような設定を行う必要がある。

$\beta = 1/4$ は時間間隔の大きさに関わらず無条件に安定な解を与えるが、Δt が大きいと応答に位相遅れを伴う。無論、Δt は実際に得たい解の固有周期の 1/10 以下である必要がある。時間間隔の大きさによって、計算された応答が発散、位相遅れを伴う原因は、解析手法に含まれる加速度仮定にある。これは加速度を仮定したために、時間間隔内では実際の外力と異なる外力の作用する系を解いていることに等しい。

例えば、$\beta = 1/4$ で、ｉステップとi+1ステップの時間間隔内に作用する外力を計算してみる。ステップ間の任意時間においても、式(9.2)の振動方程式は成立するから、その式の左辺に式(9.4)を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{y}_\tau + c\dot{y}_\tau + ky_\tau = m\ddot{y}_i + c\dot{y}_i + ky_i + \frac{1}{2}m(\ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i) + \\
&\quad c\frac{\tau}{2}\{(\ddot{y}_{i+1} + \ddot{y}_i)\} + k\left\{\dot{y}_i\tau + \frac{1}{4}(\ddot{y}_{i+1} + \ddot{y}_i)\tau^2\right\} \\
&\quad = P_i + \frac{1}{2}m(\ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i) + c\frac{\tau}{2}\{(\ddot{y}_{i+1} + \ddot{y}_i)\} + k\left\{\dot{y}_i\tau + \frac{1}{4}(\ddot{y}_{i+1} + \ddot{y}_i)\tau^2\right\} \\
&\quad \neq P_i \qquad \text{———（9.10）}
\end{aligned}
$$

となる。左辺は、Δt 時間内で外力は P_i に等しく一定であることが必要なのに、τ に関して２次関数となっており、外力とは異なる外力が作用している系を解いていることになる。従って、外力と式(9.10)の左辺との差の力（誤差外力）が仕事をするために生じるエネルギー（誤差エネルギー）が各時間間隔ごとに蓄えられたり、放出されたりする。正の誤差エネルギーがステップごとに蓄積されて大となると、求められる応答は発散してしまう。$\beta=1/4$ では、時間間隔内の任意点での誤差エネルギーは存在するが、時間間隔内の誤差エネルギーの積分値は零となるため、応答は安定である。しかし、誤差エネルギーが任意ステップで存在するため、位相遅れを伴うことになる。

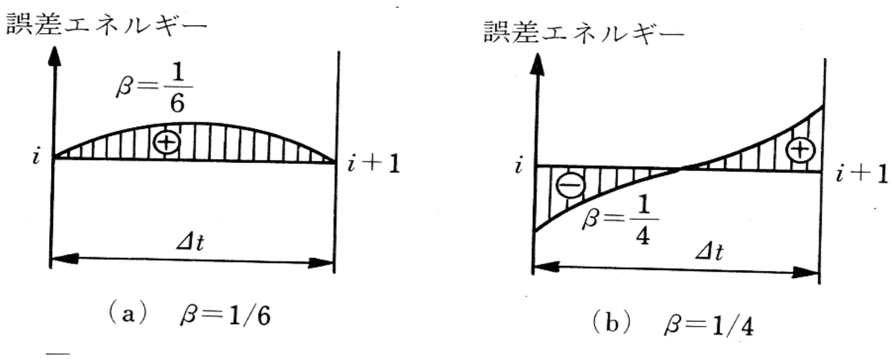

図 9.4 ニューマークβ法の時間間隔内の誤差エネルギー

これらのトラブルは時間間隔 Δt を小さくすることによって取り除くことができるが、逐次積分法では、計算精度と Δt の大きさの関係は重要な問題である。

9.4　数値積分法

本節では、１自由度系の強制振動を、ニューマークβ法を用いて解く方法について述べる。図9.1のように外力を区分したときの、i+1ステッ

プにおける振動方程式は、

$$m\ddot{y}_{i+1}+c\dot{y}_{i+1}+ky_{i+1}=P_{i+1} \qquad \text{———（9.11）}$$

であり、式(9.9)で速度、変位は次式のように仮定されている。

$$\dot{y}_{+1}=\dot{y}_i+\frac{1}{2}(\ddot{y}_{i+1}+\ddot{y}_i)\Delta t \qquad \text{———（9.12）}$$
$$y_{i+1}=y_i+\dot{y}_i\Delta t+(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{y}_i\Delta t^2+\beta\ddot{y}_{i+1}\Delta t^2$$

ここで、上式を式(9.11)に代入し、未知数 $\ddot{y}_{i+1}$ について整理すると次式が得られる。

$$(m+\frac{\Delta t}{2}c+\beta\Delta t^2k)\ddot{y}_{i+1}=P_{i+1}-c(\dot{y}_i+\frac{\Delta t}{2}\ddot{y}_i)$$
$$-k(y_i+\Delta t\dot{y}_i+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{y}_i) \qquad \text{———（9.13）}$$

上式を計算する際には、既に右辺の外力とｉステップの変位、速度、加速度は求まっており、右辺項は既知となる。そこで、未知数 $\ddot{y}_{i+1}$ は次のように求められる。

$$\ddot{y}_{i+1}=(m+\frac{\Delta t}{2}c+\beta\Delta t^2k)^{-1}\{P_{i+1}-c(\dot{y}_i+\frac{\Delta t}{2}\ddot{y}_i)$$
$$-k(y_i+\Delta t\dot{y}_i+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{y}_i)\} \qquad \text{———（9.14）}$$

後は、初期条件より順次次ステップへと求めてゆけばよいことになる。初期条件として、時刻 $t=0$ のときの変位 y_0 と速度 $\dot{y}_0$ は与えられ、また、加速度 $\ddot{y}_0$ は、式(9.2)に $i+1=0$ を設定すると次式として得られる。

$$m\ddot{y}_0+c\dot{y}_0+ky_0=P_0$$
$$\ddot{y}_0=\frac{P_0-c\dot{y}_0-ky_0}{m} \qquad \text{———（9.15）}$$

これらの手続きを次のフローチャートで示す。

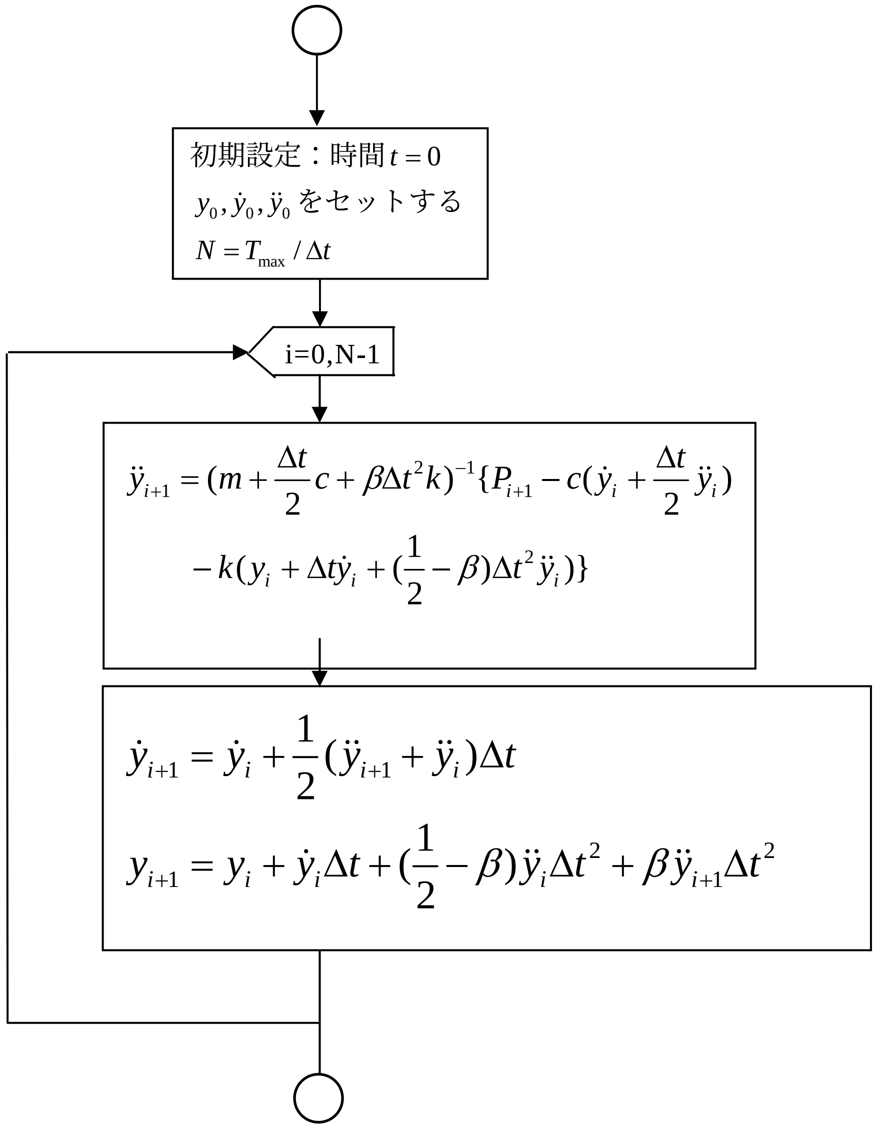

図 9.5　１自由度系の計算フローチャート

9.5　多自由度系の数値積分法

強制外力を受ける多自由度系の振動方程式は、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{P}(t) \qquad ――― (9.16)$$

で与えられる。ここで、$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ は質量行列、各々減衰行列、剛性行列であり、また、$\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{P}(t)$ は加速度ベクトル、速度ベクトル、変位ベクトル、外力ベクトルを意味する。

１自由度系と同様に、時間を時間間隔 Δt で区切った任意ステップi+1

での振動方程式は、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{i+1}+\mathbf{K}\mathbf{y}_{i+1}=\mathbf{P}_{i+1} \qquad ———（9.17）$$

となる。ここで、$\ddot{\mathbf{y}}_{i+1},\dot{\mathbf{y}}_{i+1},\mathbf{y}_{i+1},\mathbf{P}_{i+1}$ は、i+1ステップでの加速度ベクトル、速度ベクトル、変位ベクトル、及び外力ベクトルである。ニューマークβ法のi+1ステップでの速度ベクトル、変位ベクトルは、１自由度系の式(9.12)と同様に次式で仮定される。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_{+1}&=\dot{\mathbf{y}}_i+\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}+\ddot{\mathbf{y}}_i)\Delta t\\ \mathbf{y}_{i+1}&=\mathbf{y}_i+\dot{\mathbf{y}}_i\Delta t+(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{\mathbf{y}}_i\Delta t^2+\beta\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}\Delta t^2\end{aligned} \qquad ———（9.18）$$

上式を式(9.17)に代入し、未知加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$ について整理すると、

$$\begin{aligned}&(\mathbf{M}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}+\beta\Delta t^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}=\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{C}(\dot{\mathbf{y}}_i+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{y}}_i)\\ &\quad-\mathbf{K}(\mathbf{y}_i+\Delta t\dot{\mathbf{y}}_i+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{\mathbf{y}}_i)\end{aligned} \qquad ———（9.19）$$

となり、左辺係数行列の逆行列を、両辺の左より掛けることで未知加速度ベクトルが次のように求められる。

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}&=(\mathbf{M}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}+\beta\Delta t^2\mathbf{K})^{-1}\{\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{C}(\dot{\mathbf{y}}_i+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{y}}_i)\\ &\quad-\mathbf{K}(\mathbf{y}_i+\Delta t\dot{\mathbf{y}}_i+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{\mathbf{y}}_i)\}\end{aligned} \qquad ———（9.20）$$

後は、初期条件より順次次ステップへと求めてゆけばよいことになる。初期条件として、１自由度系と同様に時刻 $t=0$ のときの変位ベクトル $\mathbf{y}_0$ と速度ベクトル $\dot{\mathbf{y}}_0$ は与えられ、また、加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{y}}_0$ は、式(9.17)に $i+1=0$ を設定すると次式として得られる。

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_0+\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_0+\mathbf{K}\mathbf{y}_0=\mathbf{P}_0\\ &\ddot{\mathbf{y}}_0=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0-\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_0-\mathbf{K}\mathbf{y}_0)\end{aligned} \qquad ———（9.15）$$

これらの手続きを次のフローチャートで示す。

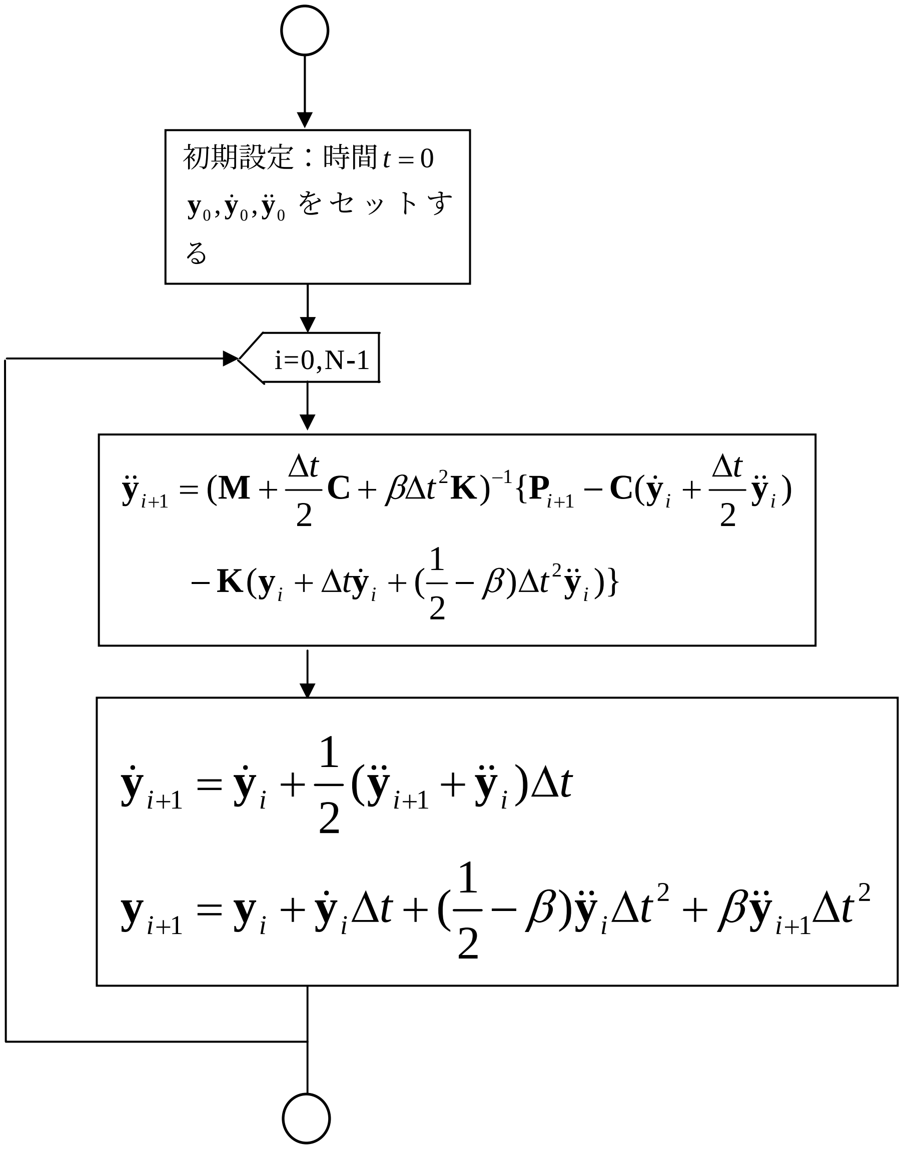

図 9.6 多自由度系の計算フローチャート

9.6　時間間隔 Δt のとり方

時間間隔 Δt の取り方と β 値の選択によって、解の精度と安定性に影響する。また、解の精度は周期と振動振幅で評価する。ニューマークβ法の精度は、この手法の提案者のNewmarkによって、表9.1のように与えられている。これは１自由度系の構造物に対する誤差を示すものである。この表から、固有周期 T に対する時間間隔 Δt の比 $T/\Delta t$ が $1/5$ から $1/6$ の刻みを用いると、$\beta = 1/6, \beta = 1/4$ ではある程度の精度を期待できる。ただし、多自由度系では、最少固有周期の $1/5$ から $1/6$ の刻みを用いる必要が生じ、実用的な時間間隔でなくなることがある。そのため、$\beta = 1/6$

を用いて、最少固有周期より大きな時間間隔を用いると、求める解は発散するという事態に陥る危険性もある。$\beta = 1/4$ では Δt の大きさに無関係に安定であるが、Δt が上記の条件を満足しないと応答に位相遅れを伴う。しかし、多自由度系では最少固有周期が判明しない状態、あるいは、応答がある周期以上でほぼ決定する場合などは、$\beta = 1/4$ の値を用いて応答計算を行うほうが安全である。

表 9.1 ニューマークβ法の精度

$\Delta t / T$ \ β	0	1/12	1/8	1/6	1/4
（a）周期の相対的な誤差					
0.05	−0.004	0.000025	0.002	0.004	0.008
0.10	−0.017	−0.0003	0.008	0.017	0.033
0.20	−0.076	−0.006	0.028	0.059	0.121
0.25	−0.130	−0.015	0.038	0.087	0.179
0.318	−0.363	−0.045	0.0203	0.129	0.273
0.389	*	−0.200	0.035	0.170	0.382
0.450	*	*	−0.100	0.195	0.480
（b）初期速度に対する振動振幅の相対誤差					
0.05	0.012	0.008	0.006	0.004	0
0.10	0.052	0.034	0.025	0.017	0
0.20	0.285	0.166	0.116	0.073	0
0.25	0.614	0.306	0.202	0.122	0
0.318	∞	0.732	0.414	0.225	0
0.389	∞	∞	1.000	0.414	0
0.450	∞	∞	∞	0.732	0

外力の特性によって、時間間隔 Δt が決定される場合もある。例えば、地震記録は一般に $\Delta t = 0.02$ 秒か $\Delta t = 0.01$ 秒が多い。したがって、このような不規則な外力を表現するためには、少なくともそれ以下の時間間隔を使用する必要が生じる。

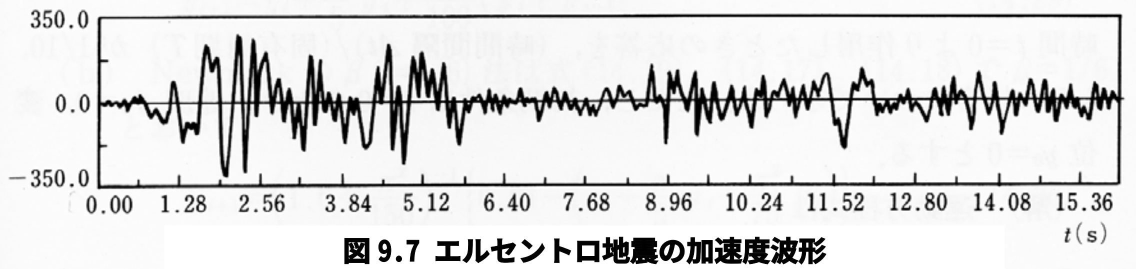

図 9.7 エルセントロ地震の加速度波形

以上のことから、時間間隔の大きさは、

１）振動系の最少固有周期から決められる時間間隔

２）外力を表現するのに必要な時間間隔

の順に満足するように決める必要がある。$\beta = 1/4$を使用すれば、応答に位相遅れが伴うが、１）の条件が緩和される。