



第1章 たわみ角法の基本式

ポイント：たわみ角法の基本式を理解する

たわみ角法の基本式を梁の微分方程式より求める

本章では、たわみ角法の基本式を導くことにする。基本式の誘導法は各種あるが、ここでは、梁の微分方程式を解いて基本式を求める方法を採用する。

この本で使用する座標系は、右手・右ネジの法則に従った座標を用いる。また、ひとつの部材では、図1-1に示すように部材の左端の*i*点を原点とし、軸線を*x*座標とする。部材は、長さが*l*で、材に沿って一様なヤング係数*E*と断面二次モーメント*I*を有するものとする。なお、この本では、平面骨組を対象とする。

1.1 はじめに

キーワード

たわみ角法の基本式 部材角のない基本式 部材角のある基本式 部材荷重がある場合

1.2 部材角のない場合の基本式

本節では、たわみ角法の基本式を、梁の微分方程式から導くことにする。最初に、梁の両端に材端モーメント M_{ij}, M_{ji} が加わり、部材の両端に回転角 θ_i, θ_j が生じる場合について考える。ここでは、部材に直接加わる荷重は考慮しない。また、部材両端の法線方向変位も考慮しないこととする。

部材内部に生じる曲げモーメントを $M(x)$ とし、また、材に中間荷重（部材荷重）はないものとする。と、 $M(x)$ は次式のように断面力と外力との釣合より、次の一次式で表すことができる。

$$M(x) = a + bx \quad \dots\dots(1.1)$$

ここで材端に加わる荷重と曲げモーメントの釣合より、右図のように両端で次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} - M(0) &= 0 \\ M_{ji} + M(l) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.2)$$

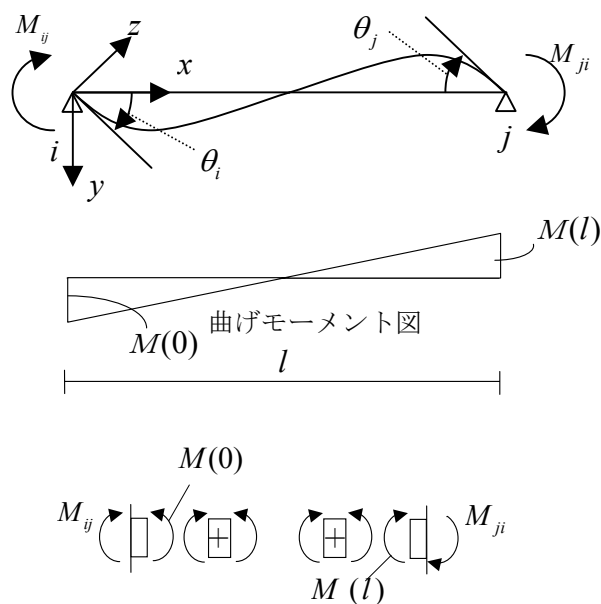


図1-1 部材の構成と断面力

式(1.1)に上式を適用することで、式(1.1)の未定数 a, b は

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} - a &= 0 \\ M_{ji} + a + bl &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= M_{ij} \\ b &= -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} \end{aligned} \dots\dots(1.3)$$

断面力と外力との釣合

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = -P_w(x)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P_w(x)$$

となり、従って、曲げモーメント $M(x)$ は、両端の材端モーメントより

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \dots\dots(1.4)$$

として表すことができる。

梁の曲げモーメント分布が決まったところで、次は、梁の微分方程式に代入し、梁のたわみを求めることにしよう。梁の微分方程式に式(1.4)の曲げモーメントを用いると、

梁の微分方程式

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M(x)$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M(x) = -M_{ij} + \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \dots\dots(1.5)$$

ここで、 l は部材の長さ、 E はヤング係数、 I は断面二次モーメントを表し、 $w(x)$ はたわみを表す関数である。梁の微分方程式を解くために、上式の両辺を2回積分すると、

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{dw}{dx} &= EI\theta(x) = -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1 \\ EIw(x) &= -\frac{M_{ij}x^2}{2} + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1x + C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.6)$$

として、たわみの一般解が得られる。ここで、 C_1, C_2 は積分定数である。

次に、両端の境界条件より積分定数を決定する。境界条件は両端の節点に法線方向変位がないとしたことより次式となる。

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0 \dots\dots(1.7)$$

上の境界条件を式(1.6)の下式に適用すると、

$$\left. \begin{aligned} EIw(0) &= C_2 = 0 \\ EIw(l) &= -\frac{M_{ij}l^2}{2} + \frac{l^3}{6}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1l = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.8)$$

となり、また、式(1.8)の下式より、積分定数 C_1 は次式となる。

$$C_1 = \frac{M_{ij}l}{2} - \frac{l}{6}(M_{ij} + M_{ji}) = \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \dots\dots(1.9)$$

積分定数を式(1.6)の下式に代入し、整理するとと、たわみ関数が、

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{lx}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \dots\dots(1.10)$$

として得られる。また、同じく回転角は上式を微分することで、

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left\{ -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \dots\dots(1.11)$$

として与えられる。

次に、両端の回転角が θ_i , θ_j で与えられていることより、式(1.11)を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \theta_i = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \\ \theta(l) &= \theta_j = \frac{1}{EI} \left\{ -M_{ij}l + \frac{l}{2}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.12)$$

となり、整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{6EI}{l}\theta_i &= 2M_{ij} - M_{ji} \\ \frac{6EI}{l}\theta_j &= 2M_{ji} - M_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.13)$$

さらに、上式を M_{ij} と M_{ji} について解くと

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j) \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.14)$$

となり、材端モーメントと材端回転角の関係が得られる。式(1.14)が、節点変位がない場合のたわみ角法の基本式となる。

1.3 部材角がある 場合の基本式

本節では、部材両端の法線方向変位を考慮する。図 1-2 から理解できるように、梁の両端の法線方向変位 w_i と w_j の大きさが異なると、梁に部材角 R が生じる。この部材角は、幾何学的に次式で表すことができる。

$$R = \frac{w_j - w_i}{l} \dots\dots(1.15)$$

ここでは、梁の両端で法線方向変位が生じる場合について考察し、前節で得た材端モーメントと材端回転角の関係を拡張してみよう。

曲げモーメント $M(x)$ は中間荷重がないとしているので、前節の式(1.4)と同様に

$$M(x) = M_{ij} - \frac{x}{l}(M_{ij} + M_{ji}) \quad \dots\dots(1.16)$$

として表される。また、たわみ $w(x)$ は、式(1.6)の下より

$$EIw(x) = -\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1x + C_2 \quad \dots\dots(1.17)$$

次に、上式にたわみの境界条件を用いて積分定数 C_1, C_2 を決定する。境界条件は、図 1-2 を参考に両端の法線方向変位より

$$w(0) = w_i \quad w(l) = w_j \quad \dots\dots(1.18)$$

であることより、

$$\left. \begin{aligned} EIw(0) &= C_2 = EIw_i \\ EIw(l) &= -\frac{M_{ij}}{2}l^2 + \frac{l^2}{6}(M_{ij} + M_{ji}) + C_1l + C_2 = EIw_j \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.19)$$

となる。式(1.15)の部材角を参考に、上式から C_1 を求めると、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{EI}{l}w_j + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) - \frac{C_2}{l} \\ &= EI\left(\frac{w_j - w_i}{l}\right) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \\ &= EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \end{aligned} \quad \dots\dots(1.20)$$

得られた積分定数 C_1, C_2 を式(1.17)に代入し、たわみの関数 $w(x)$ を下式のように求める。

$$\begin{aligned} EIw(x) &= -\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + \left\{ EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\}x + EIw_i \\ w(x) &= w_i + Rx + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{M_{ij}}{2}x^2 + \frac{x^3}{6l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji})x \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(1.21)$$

また、回転角 $\theta(x)$ は、上式を微分することで以下のように得られる。

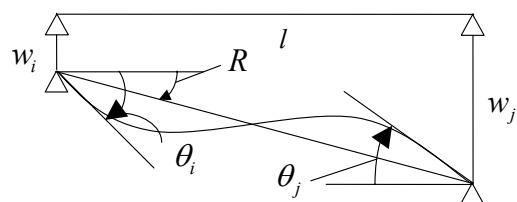


図 1-2 部材角と両端変位の関係

$$EI\theta(x) = -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + \left\{ EIR + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\}$$

$$\theta(x) = R + \frac{1}{EI} \left\{ -M_{ij}x + \frac{x^2}{2l}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \quad \dots\dots(1.22)$$

次に上式を用いて、部材両端の回転角 θ_i, θ_j と材端モーメント M_{ij}, M_{ji} の関係を求める。まず、上式に、 i 端の座標と j 端の座標を代入し、境界として与えられる両端の回転角と等しいと置くと、下式が得られる。

$$\theta(0) = \theta_i = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji})$$

$$\theta(l) = \theta_j = R + \frac{1}{EI} \left\{ -M_{ij}l + \frac{l}{2}(M_{ij} + M_{ji}) + \frac{l}{6}(2M_{ij} - M_{ji}) \right\} \left. \vphantom{\theta(l)} \right\} \dots\dots(1.23)$$

$$= R + \frac{l}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij})$$

上式を整理すると、

$$\theta_i = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ij} - M_{ji})$$

$$\theta_j = R + \frac{l}{6EI}(2M_{ji} - M_{ij}) \quad \left. \vphantom{\theta_j} \right\} \dots\dots(1.24)$$

となり、また、 M_{ij} と M_{ji} について求め直すと

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) \quad \left. \vphantom{M_{ji}} \right\} \dots\dots(1.25)$$

として、節点移動がある場合のたわみ角法の基本式が得られる。

最後に、部材に直接荷重が加わる場合について考えてみよう。図 1-3 のように部材中間に荷重がある場合（部材荷重）は、まず、両端固定として断面力と変形状態を求めることになる。次に両端固定として求めた反力と釣合う、つまり、反力とは逆方向の外力を両端の材端モーメントとして、たわみ角法の基本式に加える。これを固定端モーメント、あるいは固定端外力と呼ぶ。

1.4 部材に中間荷重がある場合の基本式

この固定端モーメントを左辺に加えると、たわみ角法の釣合式は、以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} + C_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) \\ M_{ji} - C_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.26)$$

固定端モーメントを移項して、材端モーメントを書き直すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) + C_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.27)$$

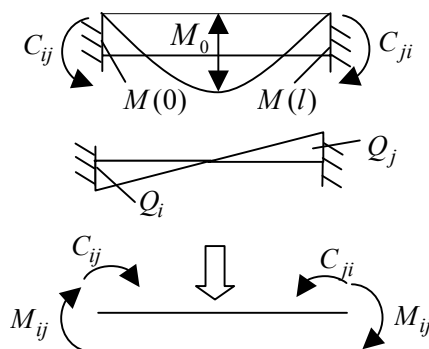


図 1-3 中間荷重がある場合

これで、たわみ角法の完全な形の基本式が得られたことになる。

中間荷重のある場合の梁内部の断面力と変形は、当然材端モーメントによって生じる断面力と変位に、図 1-4 に示される両端固定として求めた断面力と変形を加えて得られる。ここで、 $\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{ji}$ は、式(1.24)中の固定端モーメントを除いた変位によって生じる材端モーメントを示す。この両端固定として求めた断面力を**基本応力**と呼ぶ。これらの基本的考えの説明と応用は、後節で示すことにする。

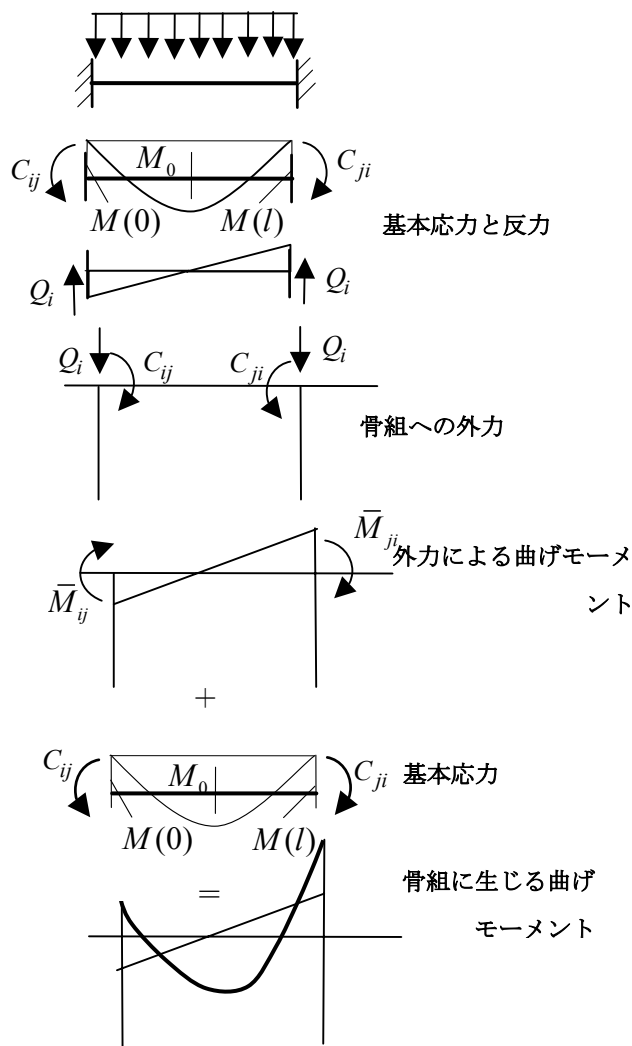


図 1-4 中間荷重が加わる部材の断面力

例題 1-1 式(1.27)で示されるたわみ角法の基本式を用いて、図に示す一端ピン、他端剛接の部材に関する M_{ji} と θ_j 、 R との関係を求めよ。

ヒント：一端がピン接合であるため、 M_{ij} がゼロとなる。これより、回転角 θ_i, θ_j と部材角 R には従属関係が生じる。この関係から θ_i を導き、この値 θ_i を式(1.27)の M_{ji} 式に代入して、 M_{ji} と θ_j 、 R との関係を求める。

たわみ角法の基本式で、一端ピンであるため、次式のように当該節点の曲げモーメントはゼロでなくてはならない。

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) - C_{ij} = 0 \quad \dots\dots(1.28)$$

上式から、 θ_i を求めると、

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2EI} C_{ij} - \theta_j + 3R \right) \quad \dots\dots(1.29)$$

となり、 θ_i を他端の材端モーメントの式に代入すると

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j - 0.5\theta_j + 1.5R - 3R) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \\ &= \frac{2EI}{l}(1.5\theta_j - 1.5R) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \quad \dots\dots(1.30) \end{aligned}$$

として、一端ピン接合を有するたわみ角法の基本式が得られる。ここで、上で求めた基本式を整理して以下に示す。

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(1.5\theta_j - 1.5R) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \quad \dots\dots(1.31) \end{aligned}$$

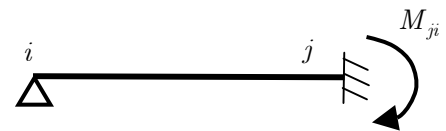


図 1-5 一端ピン接合の梁

1.5 まとめ

本章では、梁の微分方程式を用いてたわみ角法の基本式を導いた。また、部材の中間に加わる部材荷重の扱い方も説明した。今後は、このたわみ角法の基本式を用いて骨組の応力解析を行うが、ここでは、たわみ角法の基本式を理解し、良く覚えておこう。