



## 第4章 柱に部材荷重を有する骨組の解析

### ポイント：変数変換を行い、たわみ角法を使い易くする 境界条件と有効剛比

たわみ角法の基本式に使用されている変位は、実際の回転角や部材角であり、その値は非常に小さい。そのため手計算では桁を間違い易く、扱いが難しい。そこで本章では、変数を変換して新しいパラメータと変位を導入し、扱い易いたわみ角法を誘導する。新しいパラメータとして、曲げ剛性の比率である剛比が定義され、その剛比を用いることで釣合式がより簡潔に表現される。ここでは、新たなたわみ角法を用いて少し複雑な骨組を解いてみよう。

#### 4.1 はじめに

#### キーワード

変数変換 新しいたわみ角法 境界条件と有効剛比 柱に部材荷重

新しいたわみ角法を導くに当たって、実際の変位によるたわみ角法の基本式を再度、記述する。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j - 3R) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i - 3R) + C_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.1)$$

$i$  端がピン接合で、 $j$  端が剛接合の場合、上式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{l}(1.5\theta_j - 1.5R) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.2)$$

新しいパラメータを導入して、上記の式(4.1)と(4.2)を変換する。骨組の中で、代表的な部材の一つ取り出し、その部材の曲げ剛性を次式で定義する。

$$K_0 = \frac{2EI_0}{l} \dots\dots(4.3)$$

このパラメータ  $K_0$  を標準剛度と呼ぶ。

#### 4.2 変数変換

たわみ角法の基本式(4.1)の右辺に  $K_0/K_0$  を掛け、整理すると、

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \frac{2EI/l}{K_0} (2\theta_i K_0 + \theta_j K_0 - 3RK_0) - C_{ij} \\ M_{ji} &= \frac{2EI/l}{K_0} (2\theta_j K_0 + \theta_i K_0 - 3RK_0) + C_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.4)$$

となる。ここで、次のような新しいパラメータと変位を定義する。

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{K}{K_0}; \quad K = \frac{2EI}{l} \\ \varphi_i &= \theta_i K_0; \quad \psi = -3RK_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.5)$$

特に、新しいパラメータとして定義した  $k$  は剛比と呼ばれ、標準部材の曲げ剛性に対するその部材の曲げ剛性の比を表す。上のパラメータを使用すると、2つのたわみ角法の基本式は次式のように変換される。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.6)$$

式(4.2)の  $i$  端ピン接合、 $j$  端剛接合の基本式は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= 0 \\ M_{ji} &= k(1.5\varphi_j + 0.5\psi) + C_{ji} + \frac{1}{2}C_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.7)$$

**例題 4-1** 新しく変数変換して求めたたわみ角法の基本式を用いて、図 4-1 に示す構造物の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求めよ。

例題 3-1 で扱った問題を再度解析する。ただし、標準部材を ②部材として、標準剛度  $K_0$  を

$$K_0 = \frac{2EI_b}{l} \dots\dots(4.8)$$

とする。ここで、 $I_b, I_c$  は、各々梁と柱の断面二次モーメントである。また、柱の剛比  $k_c$  は、2 とする。そのため、ここでは、柱の断面二次モーメントは自由に設定することはできず、次式で与えられる。

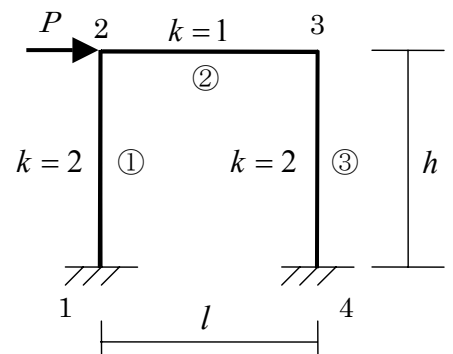


図 4-1 例題 4-1 の骨組

$$k_c = \frac{2EI_c}{\frac{h}{K_0}} = 2; \quad I_c = 2 \frac{h}{l} I_b \quad \dots\dots(4.9)$$

たわみ角法の基本式は、節点1と4が固定であり、従って、 $\varphi_1 = \varphi_4 = 0$ であることを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2(\varphi_2 + \psi) \\ M_{21} &= 2(2\varphi_2 + \psi) \\ M_{23} &= 1(2\varphi_2 + \varphi_3) \\ M_{32} &= 1(2\varphi_3 + \varphi_2) \\ M_{34} &= 2(2\varphi_3 + \psi) \\ M_{43} &= 2(\varphi_3 + \psi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.10)$$

さらに、逆対称の条件  $\varphi_2 = \varphi_3$  を用いると、梁の基本式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{23} &= 3\varphi_2 \\ M_{32} &= 3\varphi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.11)$$

節点2のモーメントの釣合と、式(3.10)より層モーメントの釣合は

$$\left. \begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ 2(2\varphi_2 + \psi) + 3\varphi_2 &= 0 \\ (M_{12} + M_{21}) &= -Ph/2 \\ 2(\varphi_2 + \psi) + 2(2\varphi_2 + \psi) &= -Ph/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.12)$$

として与えられる。式(4.12)の下式を3で割り、整理すると、

$$\left. \begin{aligned} 7\varphi_2 + 2\psi &= 0 \\ 2\varphi_2 + \frac{4}{3}\psi &= -\frac{Ph}{6} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.13)$$

として骨組全体の釣合式が得られる。次に、上式を解くと、

$$\varphi_2 = \frac{Ph}{16} \quad \psi = \frac{-7}{32} Ph \quad \dots\dots(4.14)$$

無論、実際の変位は式(4.5)を用いると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\varphi_2}{K_0} = \frac{Ph}{16} \cdot \frac{l}{2EI_b} = \frac{Phl}{32EI_b} \\ R &= -\frac{\psi}{3K_0} = \frac{7Ph}{3 \cdot 32} \cdot \frac{l}{2EI_b} = \frac{7Phl}{192EI_b} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.15)$$

次に、部材の材端モーメントは、変位の式(4.14)を式(4.10)に代入すると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2(\varphi_2 + \psi) = 2\left(\frac{1}{16} - \frac{7}{32}\right)Ph = -\frac{5}{16}Ph \\ M_{21} &= 2(2\varphi_2 + \psi) = 2\left(\frac{2}{16} - \frac{7}{32}\right)Ph = -\frac{3}{16}Ph \\ M_{23} &= 3\frac{Ph}{16} = \frac{3}{16}Ph \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.16)$$

得られた材端モーメントを利用して、曲げモーメント図を以下のように描く。また、曲げモーメント図より、せん断力図を、続いて軸力図と反力を求める。

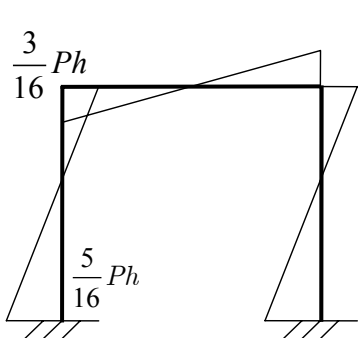


図 4.2(a) 曲げモーメント

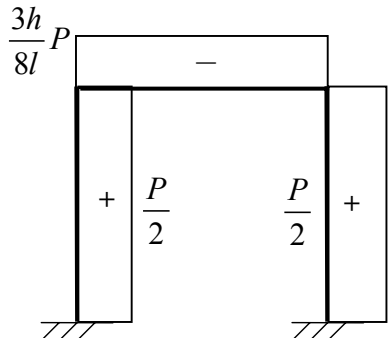


図 4.2(b) せん断力図

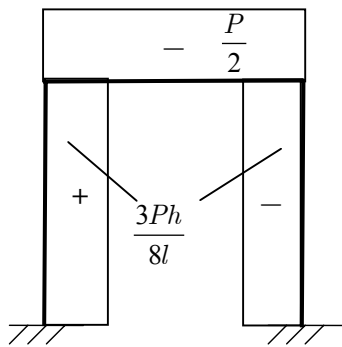


図 4.2(c) 軸力図

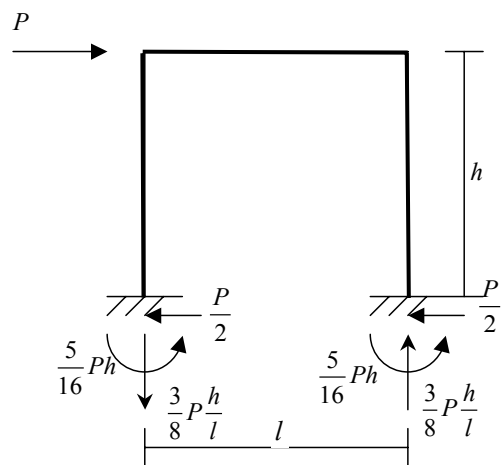


図 4.2(d) 外力と反力

次に、外力と反力による釣合を検討しよう。上下、及び、水平方向の釣合は、図 4-2(d)から容易に分かる。さらに、モーメントの釣合を求める。節点1におけるモーメントを次のように計算する。

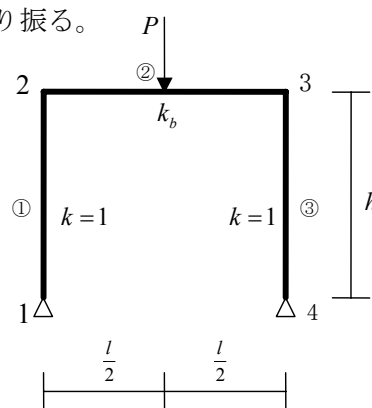
$$M_1 = Ph - \frac{5}{16}Ph - \frac{5}{16}Ph - \frac{3}{8}P \cdot \frac{h}{l} \cdot l \rightarrow 0 \quad \dots\dots(4.17)$$

上のように、モーメントの釣合も得られていることが分かる。

**例題 4-2** ピン支持境界の門型骨組に対し、梁の中央に集中荷重が加わる場合の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求めよ。

最初に、図 4-3 に示すように構造物の節点番号、部材番号を割り振る。  
次に、部材 2 の部材荷重による基本応力を求める。

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{Pl}{8} \\ M_0 &= \frac{Pl}{4} \\ Q &= \frac{P}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.18)$$



各部材の基本式は、ピン支持境界(式(4.7))を考慮して

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} &= 1(1.5\varphi_2 + 0.5\psi) \\ M_{23} &= k_b(2\varphi_2 + \varphi_3) - C \\ M_{32} &= k_b(2\varphi_3 + \varphi_2) + C \\ M_{34} &= 1(1.5\varphi_3 + 0.5\psi) \\ M_{43} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.19)$$

図 4-3 例題 4-2 の骨組

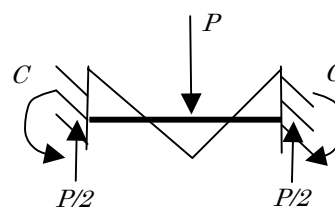


図 4-4 梁の基本応力

となる。ここでの固定端モーメントの符号は、中間荷重のある部材の反力であるモーメントの方向で正負を決めれば良い。

節点 2 と 3 でのモーメントの釣合、及び層モーメントの釣合は、

$$\left. \begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} + M_{34} &= 0 \\ M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.20)$$

となり、上式に式(4.19)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} (2k_b + 1.5)\varphi_2 + k_b\varphi_3 + 0.5\psi - C &= 0 \\ k_b\varphi_2 + (2k_b + 1.5)\varphi_3 + 0.5\psi + C &= 0 \\ 1.5\varphi_2 + 0.5\psi + 1.5\varphi_3 + 0.5\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.21)$$

以上をまとめ、行列形式で表すと、

$$\begin{bmatrix} 2k_b+1.5 & k_b & 0.5 \\ k_b & 2k_b+1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \\ -C \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(4.22)$$

ただし、層モーメントの釣合式(4.21)の第3式を1/3することで、剛性行列が対称となっていることに注意しよう。

式(4.22)を解くために、まず、次の計算を行う。ここで、①などは、式(4.22)の中の式番号である。

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} - 2(3k_b + 1.5) \cdot \textcircled{3} \quad \dots\dots(4.23)$$

上式で、①+②は次式となる。

$$(3k_b + 1.5)\varphi_2 + (3k_b + 1.5)\varphi_3 + \psi = 0 \quad \dots\dots(4.24)$$

次に、 $2(3k_b + 1.5) \cdot \textcircled{3}$ は、

$$2(3k_b + 1.5) \left\{ 0.5\varphi_2 + 0.5\varphi_3 + \frac{1}{3}\psi \right\} = 0 \quad \dots\dots(4.25)$$

となり、最後に全てを計算すると、

$$\left\{ 1 - \frac{2}{3}(3k_b + 1.5) \right\} \psi = 0 \quad \dots\dots(3.26)$$

が得られる。上式では、係数はゼロとならないから、

$$\psi = 0 \quad \dots\dots(4.27)$$

となり、部材角は生じないことになる。さらに、式(4.24)に $\psi = 0$ を適用すると

$$\varphi_2 = -\varphi_3 \quad \dots\dots(4.28)$$

が得られる。

実は、この骨組は対称構造で荷重も対称であるため、応力状態、変形状態は対称であることが分かる。従って、対称条件として下式が与えられることになる。

$$\left. \begin{array}{l} \psi = 0 \\ \varphi_2 = -\varphi_3 \end{array} \right\} \dots\dots(4.29)$$

骨組と荷重の状態が対称であると、上式が最初から得られており、この条件を用いれば未知数が少なく、より効率的な釣合式となる。

次に、式(4.29)を用いると、式(4.22)の第1式より、回転角 $\varphi_2$ は次式となる。

$$\varphi_2 = \frac{C}{(k_b + 1.5)} \quad \dots\dots(4.30)$$

得られた回転角 $\varphi_2$ を式(4.19)の基本式に代入すると、次のように材端モーメントが得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{21} &= 1.5 \cdot \frac{C}{k_b + 1.5} \\ M_{23} &= k_b(2\varphi_2 - \varphi_3) + C \\ &= k_b \left( \frac{C}{k_b + 1.5} \right) - C = \frac{-1.5C}{k_b + 1.5} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.31)$$

また、梁中央の曲げモーメントは、次のように求められる。

$$\begin{aligned} M_c &= M_0 - 0.5(M_{ji} - M_{ij}) \\ &= 2C - 0.5 \left( \frac{1.5C}{k_b + 1.5} + \frac{1.5C}{k_b + 1.5} \right) \\ &= \frac{(2k_b + 1.5)C}{k_b + 1.5} \quad \dots\dots(4.32) \end{aligned}$$

以上より、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図が以下のように表される。

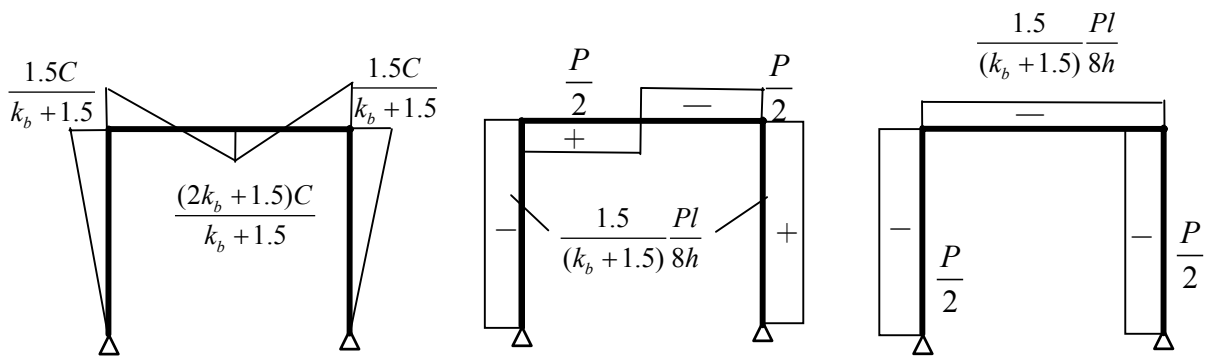


図 4-5(a) 曲げモーメント図

図 4-5(b) せん断力図

図 4-5(c) 軸力図

次に、得られた結果を用いて、梁の剛性を変化させ、骨組に生じる曲げモーメントの分布状態が如何に変化するかについて検討しよう。最初

に、梁の曲げ剛性に比較して、柱の曲げ剛性が非常に大きい場合について分析する。この場合、柱頭の曲げモーメントと梁の中央の曲げモーメントは、式(4.31)と(4.32)の中で剛比 $k_b$ をゼロに近づけると、

$$\left. \begin{aligned} M_{21} &= C \\ M_c &= C \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.33)$$

となり、梁は両端固定の状態と同じとなる。

逆に、梁の曲げ剛性が柱に比較して、極端に大きい場合は剛比 $k_b$ を無限大にすることで、柱頭の曲げモーメントと梁の中央の曲げモーメントが得られる。この場合、

$$\left. \begin{aligned} M_{21} &= 0 \\ M_c &= 2C \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.34)$$

となり、梁の応力は、両端ピン支持の状態となる。実際に設計される梁と柱の曲げ剛性の比はその中間であり、従って、曲げモーメントも図4-6(a)と4-6(b)の中間の状態となる。

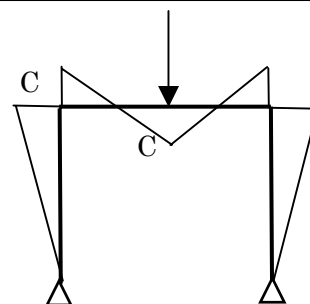


図 4-6(a) 両端固定に近いモーメント図

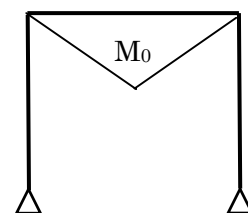


図 4-6(b) 両端ピン支持に近いモーメント図

本節では、柱に中間荷重(部材荷重)が加わる場合の層せん断力の釣合について検討する。前節では、柱に中間荷重のない場合の層せん断力の釣合式を、各層の柱頭で仮想的に切断し、それより上層の水平力と切断面の柱のせん断力との力の釣合から求めた。ここでも、同様の方法を用いるが、柱に加わる中間荷重をどのように扱うかが問題となる。

梁の部材荷重と同様に、まず、図4-7(a)のように両端固定とした状態の応力・反力を求める。次に、この反力と釣合う節点外力を骨組に加え、たわみ角法を用いて応力解析を行う。後は、解析結果の部材応力に先に求めておいた両端固定の応力状態を足すことで、実際に生じる応力状態が得られる。この手続きを行う際、理解しにくいのは次の2点であろう。ひとつは、層せん断力に関する釣合式の立て方、二つ目は、最終的に求める柱のせん断力である。この2点についてさらに検討しよう。

最初に、層せん断力と外力との釣合について考える。層せん断力と外力の釣合は、図4-7(b)を参考にすると、柱頭において

$$-\sum Q_j - \sum \bar{Q}_j + \sum P_i = 0 \quad \dots\dots(4.35)$$

となる。上式の左辺第1項は、切断面における全柱のせん断力の和であ

### 4.3 柱に部材荷重がある場合で、両端剛接合部材の層せん断力の釣合

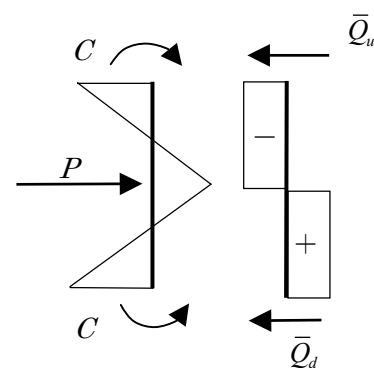


図 4-7(a) 部材荷重による曲げモーメント、せん断力と反力



り、また第2項では、柱に加わる部材荷重によって生じる節点外力を切断面にある柱全てについて和を取っている。第3項は切断面より上層の水平荷重の和である。ただし、上層の柱に中間荷重がある場合は、それらの総和をこの値に加えている。つまり、この切断面より上の水平外力の総和を表す。

部材荷重のない場合のたわみ角法の基本式は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) \\ \bar{M}_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.36)$$

であるため、式(4.36)の第1項の柱のせん断力は、

$$Q_j = -(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})/h \dots\dots(4.37)$$

であり、従って、上式を式(4.35)に代入することで、層せん断力の釣合式が以下のように与えられる。

$$\Sigma \frac{(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji})}{h} = \Sigma \bar{Q}_j - \Sigma P_i \dots\dots(4.38)$$

また、層モーメントの釣合は、両辺に当該層の高さ  $h$  をかけることで次式となる。

$$\Sigma(\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}) = \Sigma \bar{Q}_j h - \Sigma P_i h \dots\dots(4.39)$$

部材の中間に荷重がある場合は、両端固定の応力状態と節点荷重による部材の応力状態を重ね合わせることで断面力を求めることができる。ただし、次式で示す材端モーメントの基本式を用いれば、部材端部の応力は自動的に得られる。この場合、部材内部の応力は基本式から得た応力状態に単純梁の応力状態を重ねることに相当する。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\ M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.40)$$

同様に、せん断力は、解析から得られた応力に両端固定として得た基本応力のせん断力を足すことで得られる。

$$Q = Q_j + \bar{Q}_j \dots\dots(4.41)$$

ここで、 $Q_j$  は骨組の解析で得た応力であることから、せん断力は式

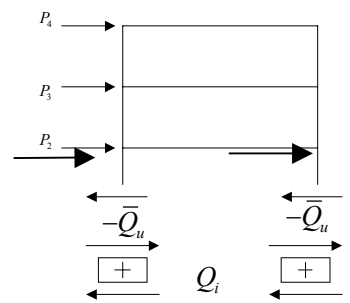


図 4-7(b) 柱に部材荷重がある場合の層方程式

(4.36)の  $\bar{M}_{ij}$ ,  $\bar{M}_{ji}$  を用いると

$$Q_j = -\frac{\bar{M}_{ji} + \bar{M}_{ij}}{h} \quad \dots\dots(4.42)$$

として与えられる。また、 $\bar{Q}_j$ は両端固定梁のせん断力である。

**例題 4-3 柱に中間荷重がある構造物の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求めよ。**

図 4-8 に示す骨組の応力解析を行う。

最初に、部材 1 と 3 に加わる水平荷重に対する基本応力を求める。

1 部材	3 部材	} \dots\dots(4.43)
${}_1C = \frac{Ph}{8} = C$	${}_3C = -\frac{Ph}{8} = -C$	
${}_1M_0 = 2C$	${}_3M_0 = -2C$	
${}_1\bar{Q}_i = Q_j = \frac{P}{2}$	${}_3\bar{Q}_i = -\frac{P}{2}$	

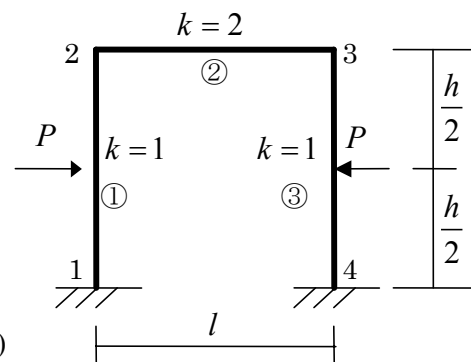


図 4-8 例題 4-3 の骨組

次に、各部材に対し、たわみ角法の基本式を用いる。

$\begin{cases} M_{12} = 1(2\varphi_1 + \varphi_2 + \psi) - C \\ M_{21} = 1(2\varphi_2 + \varphi_1 + \psi) + C \\ M_{23} = 2(2\varphi_2 + \varphi_3) \\ M_{32} = 2(2\varphi_3 + \varphi_2) \\ M_{34} = 1(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi) - C \\ M_{43} = 1(2\varphi_4 + \varphi_3 + \psi) + C \end{cases}$	} \dots\dots(4.44)
--	--------------------

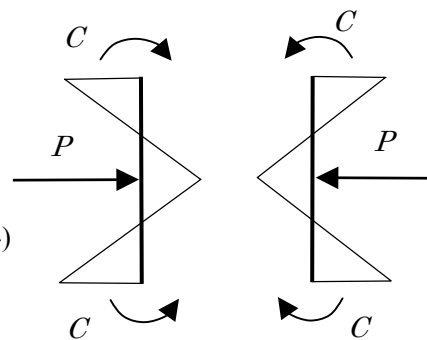


図 4-9(a) 柱の基本応力

骨組は節点 1 と 4 で固定、また、対称構造物で対称荷重であるため、変形・応力状態は対称となる。従って、次の境界条件と対称条件が与えられる。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_4 = 0 \\ \psi = 0 ; \varphi_2 = -\varphi_3 \end{cases} \quad \dots\dots(4.45)$$

上式を式(4.44)に適用すると、基本式は以下ようになる。

$$\begin{cases} M_{12} = \varphi_2 - C = -M_{43} \\ M_{21} = 2\varphi_2 + C = -M_{34} \\ M_{23} = 2\varphi_2 = -M_{32} \end{cases} \quad \dots\dots(4.46)$$

上式から分かるように、未知数は、 $\varphi_2$  のひとつであり、方程式はひとつあれば良い。そこで、節点2でのモーメントの釣合を考えると、

$$\left. \begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ 2\varphi_2 + C + 2\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.47)$$

が得られる。上の釣合式を解くと、回転角  $\varphi_2$  は

$$\varphi_2 = -\frac{C}{4} \dots\dots(4.48)$$

となる。上式を材端モーメントに代入すると、

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= -\frac{C}{4} - C = -\frac{5}{4}C \\ M_{21} &= -\frac{C}{2} + C = \frac{C}{2} \\ M_{23} &= -\frac{C}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.49)$$

となる。

部材1の中央位置(荷重点)の曲げモーメントは、図4-9(b)を参考にして、

$$\begin{aligned} M_c &= M_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{C}{2} + \frac{5}{4}C \right) \\ &= 2C - \frac{7}{8}C = \frac{9}{8}C \end{aligned} \dots\dots(4.50)$$

となる。実際の柱内部の応力状態は、図4-9(c)で示されるように、両端固定の応力状態に解析結果による応力を重ね合わせた断面力分布となる。

曲げモーメント図とせん断力図は式(4.49)と(4.50)より、図4-10(a)、図4-10(b)のように表される。

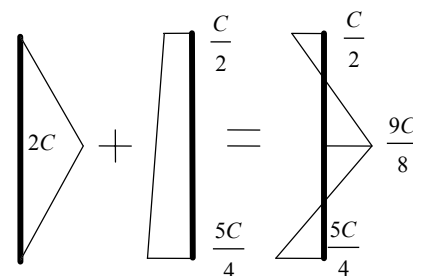


図4-9(b) 柱の曲げモーメント

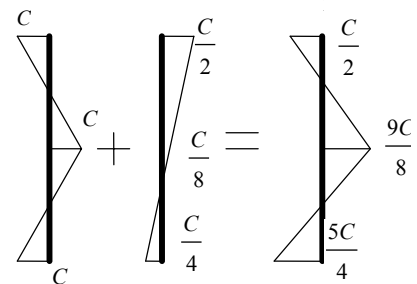


図4-9(c) 柱の曲げモーメント

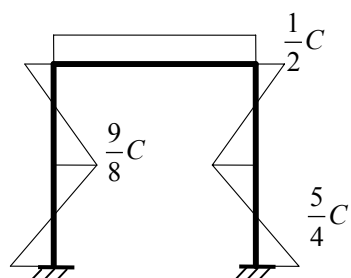


図4-10(a) モーメント図

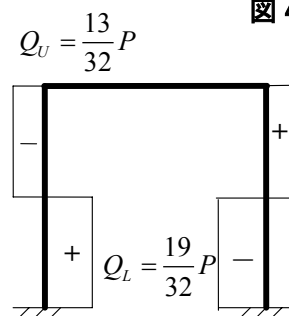


図4-10(b) せん断力図

次に、柱のせん断力は次式より得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_L &= \left(\frac{9}{8}C + \frac{5}{4}C\right) / \frac{h}{2} = \frac{19}{8} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{Ph}{8} = \frac{19}{32}P \\ Q_U &= \left(\frac{9}{8}C + \frac{C}{2}\right) / \frac{h}{2} = \frac{13}{8} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{Ph}{8} = \frac{13}{32}P \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.51)$$

せん断力図を元に、節点での力の釣合を利用すると軸力図が次のように得られる。

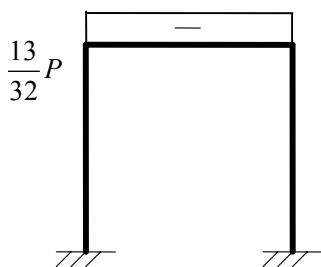


図 4-10(c) 軸力図

**例題 4-4 荷重が逆対称となっている骨組の応力解析を行い、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図を求めよ。**

図 4-11 に示す骨組の応力解析を行う。最初に、中間荷重のある 1 と 3 部材の基本応力を求める。この基本応力を以下に示すが、特に 3 部材の固定端モーメントが例題 4-3 と逆になっていることに注意されたい。

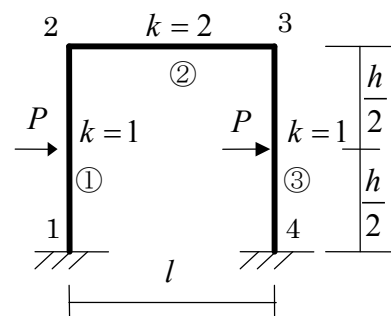


図 4-11 例題 4-4 の骨組

$$\left. \begin{aligned} {}_1C &= \frac{Ph}{8} = C & {}_3C &= C \\ {}_1M_0 &= 2C & {}_3M_0 &= 2C \\ {}_1\bar{Q}_i &= Q_j = \frac{P}{2} & {}_3\bar{Q}_i &= \frac{P}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.52)$$

次に、固定境界、及び逆対称条件は

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_4 = 0 \\ \varphi_2 &= \varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.53)$$

として与えられる。境界条件を考慮すると、たわみ角法の基本式は次のようになる。この時、変形と応力状態は逆対称であるため、2つの柱の応力は同じとなる。

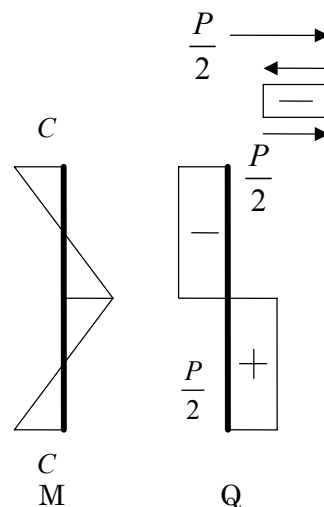


図 4-12 柱の基本応力

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \varphi_2 + \psi - C = M_{43} \\ M_{21} &= 2\varphi_2 + \psi + C = M_{34} \\ M_{23} &= 6\varphi_2 = M_{32} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.54)$$

次に釣合式を求めよう。まず、節点2でのモーメントの釣合は、

$$\left. \begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ 8\varphi_2 + \psi + C &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.55)$$

となる。

層せん断力の釣合は

$$-(Q_1 + Q_3 + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_3) = 0 \quad \dots\dots(4.56)$$

となり、層モーメントの釣合は、

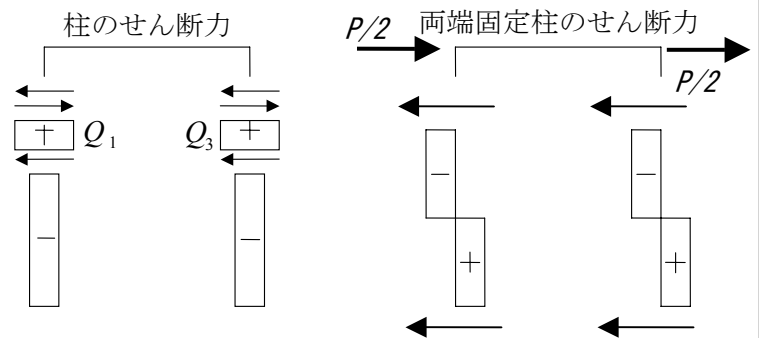


図 4-13 層せん断力の釣合

$$\left. \begin{aligned} M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43} &= -\frac{P}{2}h - \frac{P}{2}h \\ 2(\varphi_2 + \psi + 2\varphi_2 + \psi) &= -2\left(\frac{Ph}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.57)$$

となる。再度、式(4.55)と(4.57)より、2つの釣合式を整理すると、

$$\left. \begin{aligned} 8\varphi_2 + \psi &= -C \\ \varphi_2 + \frac{2}{3}\psi &= -\frac{Ph}{6} = -\frac{4}{3}C \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.58)$$

として、釣合式が得られる。上式を解くと、骨組の変位が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2}{13}C \\ \psi &= -\frac{29}{13}C \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.59)$$

得られた回転角  $\varphi_2$  と部材角  $\psi$  をたわみ角法の基本式(4.54)に代入すると、各部材の材端モーメントが以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{2}{13}C - \frac{29}{13}C - C = -\frac{40}{13}C \\ M_{21} &= \frac{4}{13}C - \frac{29}{13}C + C = -\frac{12}{13}C \\ M_{23} &= \frac{12}{13}C \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.60)$$

部材1の中央の曲げモーメントは

$$\begin{aligned} {}_1M_C &= M_0 - \frac{1}{2} \left( -\frac{12}{13}C + \frac{40}{13}C \right) \\ &= \frac{12}{13}C \end{aligned} \quad \dots\dots(4.61)$$

部材のせん断力は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} {}_cQ_L &= \left( \frac{40}{13} + \frac{12}{13} \right) \frac{2C}{h} = \frac{8Ph}{h \cdot 8} = P \\ {}_cQ_U &= 0 \\ {}_bQ &= \left( \frac{12}{13} + \frac{12}{13} \right) \frac{C}{l} = \frac{3Ph}{13l} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.62)$$

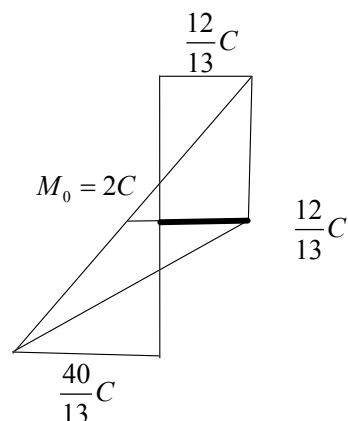


図4-14 求めた応力と基本応力を重ね合わせる

以上をまとめると、曲げモーメント図、せん断力図、軸力図は、次のように得られる。

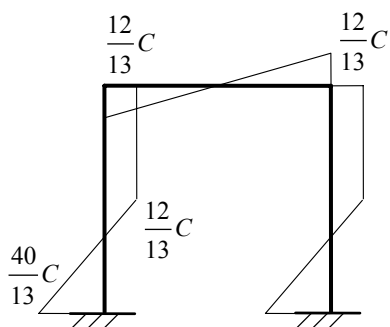


図4-15(a) 曲げモーメント図

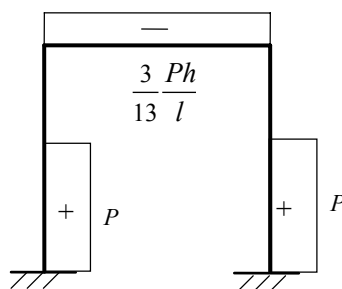


図4-15(b) せん断力図

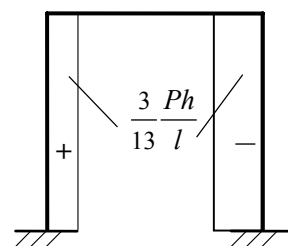


図4-15(c) 軸力図

反力と外力との力の釣合は、図4-15(d)より上下及び水平方向共に満足していることが分かる。また、節点1におけるモーメントの釣合は、

$$M_1 = -\frac{40}{13}C - \frac{40}{13}C + 2P \cdot \frac{h}{2} - \frac{3}{13}P \cdot \frac{h}{l} \cdot l \rightarrow 0 \quad \dots\dots(4.63)$$

となり、釣合がとれていることが分かる。

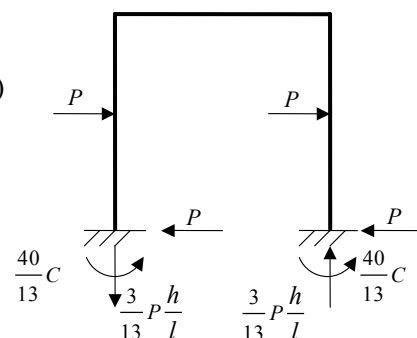


図4-15(d) 外力と反力

4.4 課題

本節では、例題 4-4 を実際に SPACE を用いて、数値解析を実施し、たわみ角法で求めた結果と比較してみよう。まず、例題 4-4 を以下に示す。ただし、ここでは、鋼材は SS400 を使用し、部材断面は、全て H-400x200x8x13 を使用するものとする。また、スパンは 6m とし、階高は 3m とする。使用する部材の断面二次モーメントは 23500 cm<sup>4</sup> であり、ヤング係数は 20500kN/cm<sup>2</sup> とする。ただし、これらの値は、SPACE のデータベースより求めた値である。

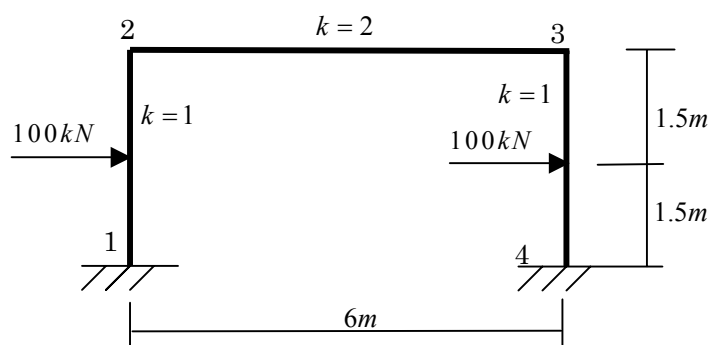


図 4-16 例題 4-4 の門型ラーメン

例題 4-4 では、部材の曲げ剛性は剛比で与えられており、梁の剛比は柱の 2 倍となっている。上記のように同一断面を使用して解析すると、梁長さが柱の長さの 2 倍となっているため、梁の剛比は 0.5 となる。そこで、例題 4-4 の曲げ剛性と同一とするため、梁の断面二次モーメントを 4 倍に変更する。また、部材の断面積も、前章の課題のように、部材の軸方向変位を無視するために 1000 倍の値とする。

たわみ角法で求めた断面力の分布は、図 4-15 で与えられている。ここで、各断面力の値を求めておこう。まず、固定端モーメントは、

$$C = \frac{Ph}{8} = \frac{100 \cdot 3}{8} = 37.5kNm \quad \dots\dots(4.64)$$

となり、また、材端モーメントは式(4.60)より次式のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= -\frac{40}{13}C = -\frac{40 \cdot 37.5}{13} = -115.38kNm \\ M_{21} &= -\frac{12}{13}C = -\frac{12 \cdot 37.5}{13} = -34.62kNm \\ M_{23} &= \frac{12}{13}C = \frac{12 \cdot 37.5}{13} = 34.62kNm \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.65)$$

同じく、柱中央の曲げモーメントは、式(4.61)より

$${}_1M_c = \frac{12}{13}C = \frac{12 \cdot 37.5}{13} = 34.62kNm \quad \dots\dots(4.66)$$

部材のせん断力は式(4.62)より、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} {}_cQ_L &= \frac{8}{h} \frac{Ph}{8} = P = 100kN \\ {}_cQ_U &= 0 \\ {}_bQ &= \frac{3}{13} \frac{Ph}{l} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 3}{13 \cdot 6} = 11.54kN \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.67)$$

得られた結果を元に、図 4-15(a) と 4-15(b)及び 4-15(c)より、曲げモーメント図、せん断力図、及び軸力図が、次のように求められる。

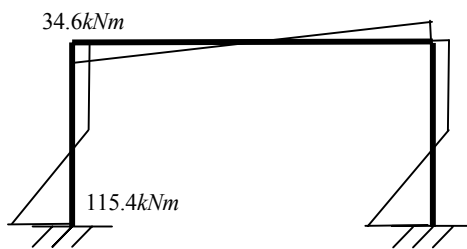


図 4-17(a) 曲げモーメント図

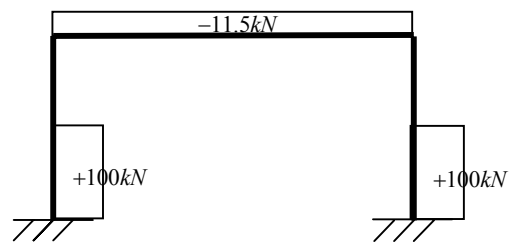


図 4-17(b) せん断力図

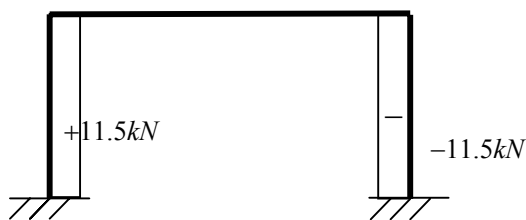


図 4-17(c) 軸力図

柱頭の水平変位は、式(4.59)の下より、次式で与えられる。

$$K_0 = \frac{2EI}{h} = \frac{2 \cdot 20500 \cdot 23500}{300} = 3.212 \cdot 10^6 \quad \dots\dots(4.68)$$

$$\begin{aligned} \delta &= R_1 h = \frac{\psi_1 h}{-3K_0} = \frac{1}{3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} \cdot \frac{29 \cdot 37.5 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 100}{13} \\ &= \frac{0.32625 \cdot 10^8}{1.25268 \cdot 10^8} = 0.260cm \quad \dots\dots(4.69) \end{aligned}$$

次に、SPACE を用いて、数値計算を実施する。まず、SPACE を起動す



る。この SPACE の「ファイル」→「新規作成」メニューを用いて、「たわみ角法演習解析モデル」-「第4章」フォルダ内の「課題1」フォルダ中にコントロールファイルを作成する。コントロールファイルの名前を「門型ラーメン.ct1」としよう。その後、各種のコントロール情報を設定した後、モデラーを起動する。モデラーによる骨組の設定は、前章とほぼ同じであり、異なる部分のみ説明することになる。

最初は、初期設定ウィザードが自動的にダイアログを表示させるので、これに従ってデータを入力すれば良い。まず、タイトルを入力し、次に平面フレームを選択し、構造物の規模として、「スパン数」を1に、階数は1にセットする。次に、スパン長を600cmに、階高を300cmにセットする。

さらに、使用する部材断面を作成登録する。まず、鉄骨を選択し、材料はSS400を、また、部材モデルは弾性とする。断面は、H-400x200x8x13とし、DB値を採用する。梁用の断面をG1として設定し、また、柱用は、同じ断面で設定し、記号をC1とする。要素データを設定した後、OKボタンを押して、CAD画面に戻る。

図4-18のようにCAD画面を使用して、柱と梁を設定する。その際、柱は2分割に、梁は1分割とする。また、柱の部材回転は0とする。骨組の形状が設定されると、次に境界と荷重を割り付ける。

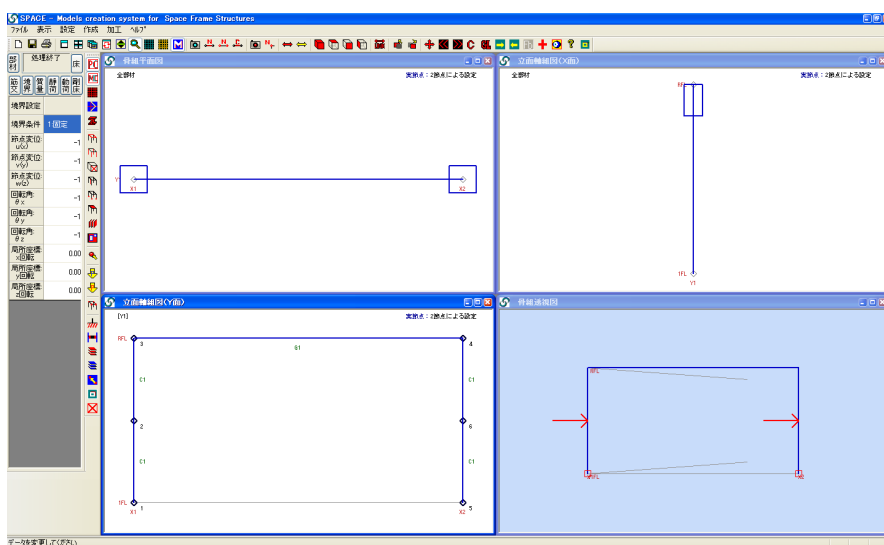


図 4-18 CAD 画面  
で骨組モデルを  
割り付ける

図4-18の右下の子ウインドウで、右クリックしてプルダウンメニューを表示させ、「透視図表示項目選択」を選択する。当該ダイアログが表示されるので、境界と静的荷重\_1にチェックマークを入れ、OKボタンを押すと、上図のように荷重と境界が表示され、設定を確認する。

図 4-18 の左下の子ウインドウで、節点情報を表示させるために、ツールチップで、「実節点」と「集団による設定」に変更し、マウスをドラッグして骨組全体を囲む。この操作で、図 4-19 の節点情報が得られ、設定状況を確認する。

座標	局所座標系	境界条件・剛床			静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	変位u(x)	変位v(y)	変位w(z)	回転θx	回転θy	回転θz	剛床番号			
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0		
2	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0		
6	0	0	0	0	0	0	0	0		

図 4-19(a) 節点情報を表示させ、境界条件を確認する

座標	局所座標系	境界条件・剛床			静的荷重1	静的荷重2	動的荷重1	動的荷重2	動的荷重3	質量
節点番号	Px	Py	Pz	Mx	My	Mz				
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
2	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
6	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				

図 4-19(b) 節点情報を表示させ、荷重を確認する

再度、「要素データ登録」チップを押して、「要素データ登録」ダイアログを表示させ、「変更・削除・復帰」ボタンを押す。図 4-20(a)に示される断面に関する情報の中で、柱・梁共に断面積の値を 1000 倍にして軸方向の剛性を上昇させ、見かけ上、部材の軸方向変位が生じないようにする。さらに、梁の断面二次モーメントを 4 倍に変更する。変更後は、図 4-20(b)に示される。

要素データ変更										
要素データ		材端データ								
要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm <sup>2</sup> )	せん断弾性係数 (kN/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	断面極二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	y軸断面二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	z軸断面二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	y軸区せん (cm <sup>2</sup> )
1	有効	G1	1	20500.0000	7900.0000	83.37000	35.68000	23500.00000	1740.00000	
2	有効	C1	1	20500.0000	7900.0000	83.37000	35.68000	23500.00000	1740.00000	

図 4-20(a) 変更前（解析モデルに合わせるために、断面特性を変更する）

要素データ変更

断面変更

要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm <sup>2</sup> )	せん断弾性係数 (kN/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	断面極二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	y軸断面二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	z軸断面二次モーメント (cm <sup>4</sup> )	y軸せん断係数 (cm <sup>2</sup> )
1	有効	G1	1	20500.0000	7900.0000	83370.00	35.68000	94000.00000	740.00000	
2	有効	C1	1	20500.0000	7900.0000	83370.00	35.68000	23500.00000	1740.00000	

図 4-20 (b) 変更後（解析モデルに合わせるために、断面特性を変更する）

解析モデルを全て設定した後、メニューの「ファイル」→「ファイルへの出力」を選択すると図 4-21 のダイアログが表示される。ここで、「構造ファイル」と「静的荷重ファイル\_1」、「情報ファイル」を指定し、OK ボタンを押して解析モデルを出力する。

解析を実施する前に、解析用パラメータを設定する。まず、SPACE のメニューより、図 4-22 に示す「静的解析用コントロール」ダイアログを表示させ、図のように設定する。線形解析であるため、1 回の解析で良いわけであるが、ここでは、アニメーションなどの表示の都合上、図のように荷重増分法を用い、20 回に分けて計算する。次に、「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログを表示させ、図 4-23 のように設定する。ここでは特に、「せん断変形を考慮しない」と「応力出力」にチェックマークを入れ、OK ボタンを押して次に進む。

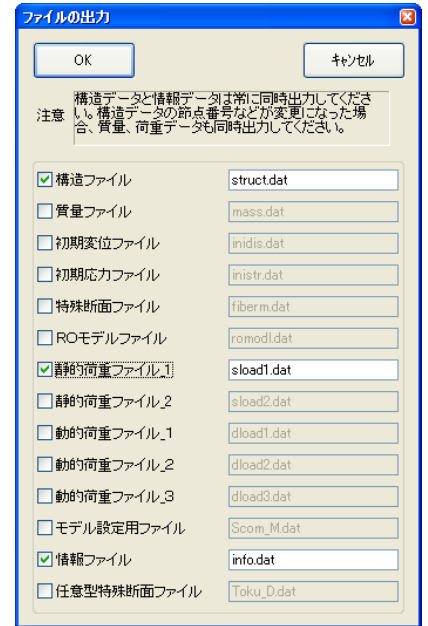


図 4-21 「解析モデルのファイル出力」ダイアログ



図 4-22 「静的解析用コントロール」ダイアログ

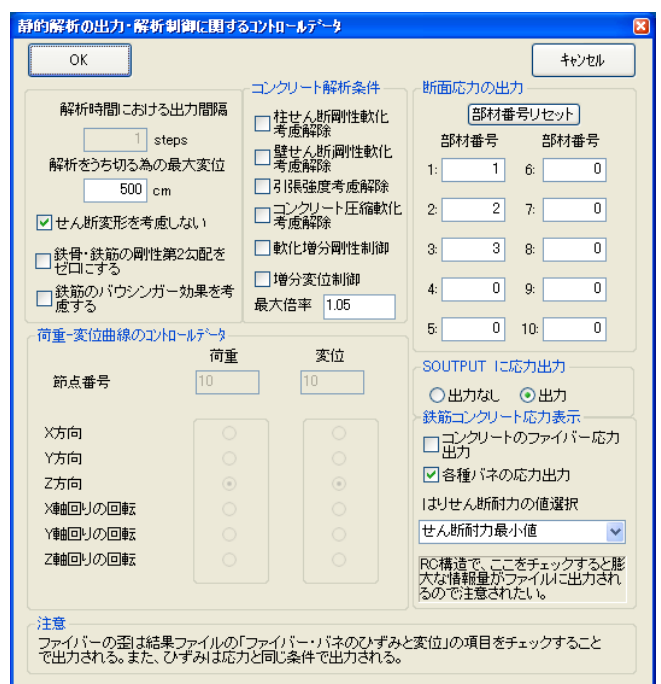


図 4-23 「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログ

解析パラメータを設定した後、静的ソルバーを起動し、線形解析を実施する。

解析が正常終了した後、解析結果を出力表示で確認する。SPACE のメニューより、「表示」→「静的解析の途中経過の表示」を選択し、解析経過と結果を表示させる。ファイルの最後に出力されている 20 回目の解析結果を図 3-24 に示す。図に見られるように両者の断面力は良い一致を示している。

```

divided step number: 20 -----
stable number: 0
材番号 部材モデル      Nx      Qy      Qz      Mx      My      Mz
1      1      11.5393  0.0000  -100.0000  0.0000  11538.4717  0.0000
      11.5393  0.0000  -100.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000
2      1      11.5384  0.0000  0.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000
      11.5384  0.0000  0.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000
3      1      0.0001  0.0000  11.5384  0.0000  -3461.5285  0.0000
      0.0001  0.0000  11.5384  0.0000  3461.5285  0.0000
4      1      -11.5376  0.0000  -100.0000  0.0000  11538.4717  0.0000
      -11.5376  0.0000  -100.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000
5      1      -11.5384  0.0000  0.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000
      -11.5384  0.0000  0.0000  0.0000  -3461.5285  0.0000

```

図 4-24 課題の静的解析結果である部材断面力

次に静的プレゼンターを起動し、図 4-25 に示すように、せん断力図と曲げモーメント図を表示させる。下図とたわみ角法で求めた図 4-17 の曲げモーメント分布とせん断力分布は、一致している。

さらに、図 4-25 の柱頭位置で、Ctrl キーとマウス右ボタンを同時にクリックすることで、図 4-26 のダイアログを表示させ、その節点の解析結果の情報を観察する。このダイアログから分かるように、当該節点の水平変位は、式(4.69)に示される節点変位と同じ値となっている。

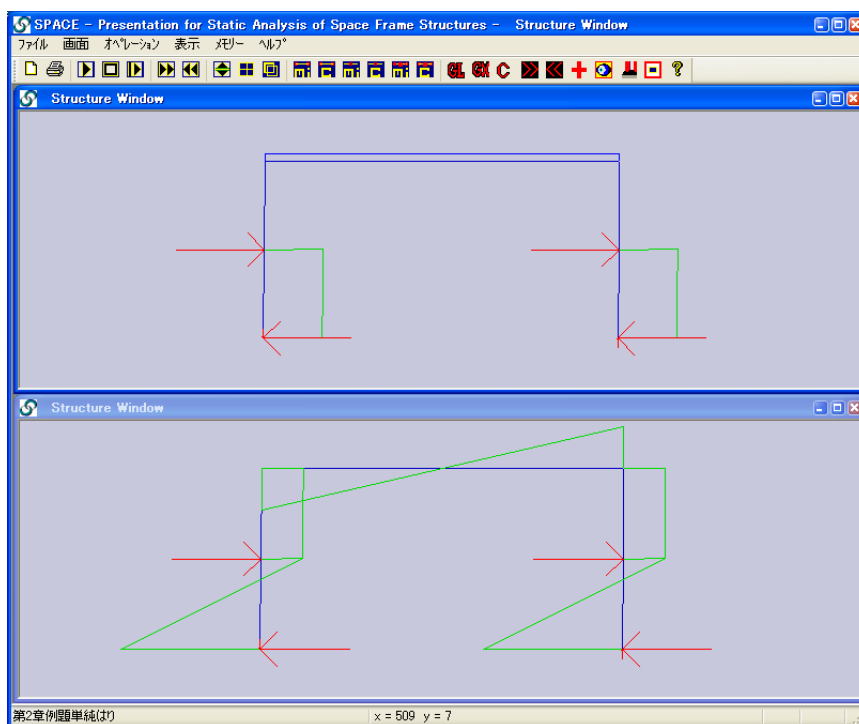


図 4-25 課題のせん断力分布と曲げモーメント分布



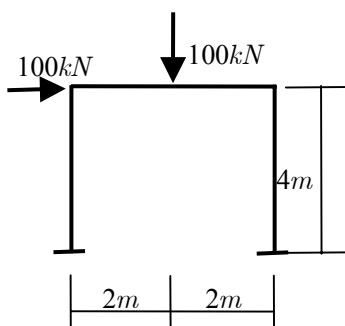
図 4-26 骨組柱頭の水平方向変位

4.5 まとめ

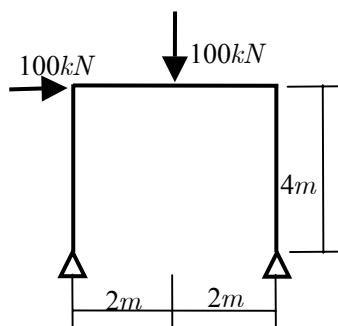
本章では、柱に部材荷重がある場合に対して、たわみ角法による解析方法を学んだ。さらに、たわみ角法の基本式を、新しいパラメータを導入することで変換し、扱いやすいたわみ角法を導いた。この新たなパラメータである剛比を用いることで、容易に応力解析が実施されることを、例題を通して確認した。また、SPACE を用いて課題を数値計算し、その結果とたわみ角法で解析した結果とを比較・検証した。

4.6 問題

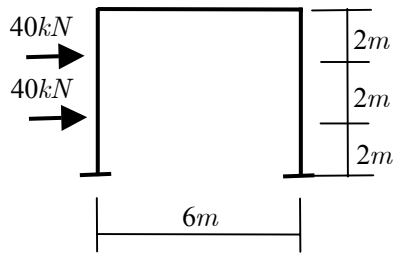
**問題 4-1** 次の骨組の応力解析を、たわみ角法で行い、曲げモーメント図、せん断力図及び軸力図を描き、さらに、反力を求めて、外力と反力の力の釣合を確認せよ。なお、鋼材は、SS400 を使用し、部材断面は、全て H-400x200x8x13 を使用するものとする。また、SPACE を用いて、同上の解析を実施し、互いの結果を比較することで、たわみ角法の結果を検証しなさい。



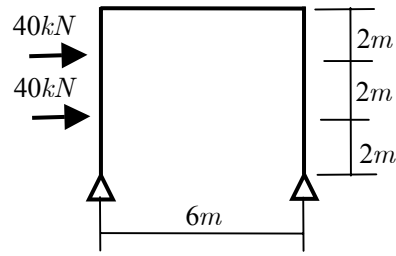
問 4-1



問 4-2



問 4-3



問 4-4

柱の基本応力は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 C &= \frac{2Pl}{9} \\
 M_0 &= \frac{Pl}{3} = 1.5C \\
 Q &= P
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.70)$$