



第8章 異形ラーメンの解析

**ポイント：仮想仕事の原理より異型ラーメンの釣合式を求める
部材角間の依存関係を定める**

前章までは、平面骨組の解析を行ってきたが、全て整形ラーメンといわれる骨組である。たわみ角法は、部材の伸縮を無視し、節点の移動を部材角という形で表す。そこには利点と欠点があり、例えばメリットとしては、未知数が少なくなり、手計算では圧倒的に有利である。また、節点における力の釣合や変位の適合では、座標変換を行う必要がない。座標変換は多くの計算を必要とし、手計算では間違える原因となる。

一方、欠点は、部材の伸縮が無視されるため、解析結果から軸力分布が決定できず、節点でのせん断力との力の釣合から求め直す必要が生じる。さらに大きなデメリットとして、部材の伸縮を考慮しないため、全部材の部材角は独立に回転することができず、節点が移動するためには部材角間に依存関係が発生する。整形ラーメンでは、この依存関係を表す独立部材角と従属部材角の関係は明確で、解析は容易であった。この骨組では、独立部材角は各層の層間変形角で表され、しかも、梁には部材角が発生しない。この特徴を有しない骨組は、異形ラーメンとして分類され、前章で示した方法以外の手法を検討しなければならない。そこで、本章では、この異形ラーメンの解析方法について学ぶことにする。

本章では、まず部材角間の依存関係を求める。さらに、これまでの層せん断力あるいは層モーメントの釣合に替えて、仮想仕事の原理により独立部材角の数に対応するモーメントの釣合式を誘導する。さらに、例題を通して、この依存関係と独立部材角の数に対応する釣合式の構築手法を学習する。

キーワード**部材角間の依存関係 仮想仕事の原理による釣合式**

8.1 はじめに

8.2 部材角間の依存関係

たわみ角法では、部材の伸縮を無視するため、節点移動を表す各部材の部材角は独立に回転できるわけではなく、依存関係が存在する。その関係が容易に求まるのが整形骨組である。この依存関係を、図 8-1 で示す 1 層 1 スパンの骨組で考えてみよう。この骨組は 3 つの部材により構

成されており、3自由度の部材角となる。ただし、節点1と4は支持されており、全ての部材が自由に動き得るわけではない。部材を回転して、部材①、②、③の順にx方向、y方向に各々の節点変位を加えていくと、節点4ではゼロとなる。従って、部材角の自由度に2つの制限条件が加わることになる。例題では、部材数3からこの制限条件の2つを引いた1つが独立部材角となり、他の2つは従属部材角となる。このことは、一つの部材は自由に回転可能であるが、他の2部材は従属して回転角が決定されることを意味する。

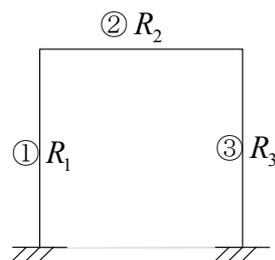


図8-1 整形骨組の部材角

上記の制限条件を他の例を用いてもう少し説明しよう。図8-2の2層1スパンの骨組では、部材数は6であり、図から理解できるように制限条件を表わす閉ループは2つある。そのため、 $6 - 2 \times 2 = 2$ となり、独立部材角は2となる。このように整形骨組では層数分独立部材角が存在することになる。

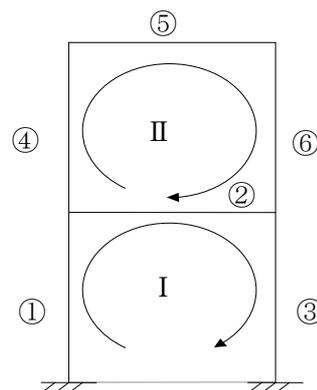


図8-2 2層1スパンラーメン

図8-3の骨組では、部材数が4であり、各々部材角は R_1, R_2, R_3, R_4 となっている。この骨組でも整形骨組と同じく全ての部材が自由に回転できるわけではない。ここにも、2つの制限があり、そのため独立部材角は2つとなり、従属部材角は2つとなる。このような骨組では、各部材の依存関係は簡単に決められず、一般的には直角変位図を利用して求める。ただし、ここでは以下のように異なった手法を用いる。

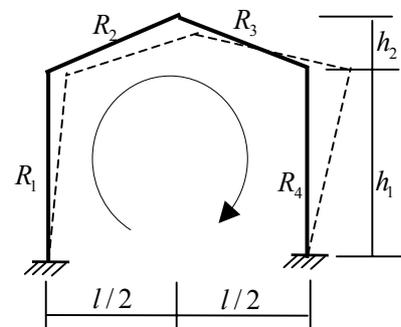


図8-3 異形ラーメンの部材角間の依存関係

ここで使用する方法では、図8-3のループ（閉曲線）上を時計回りに、各部材の部材角によって生じる節点変位をx方向とy方向に分けて順次和を採り、最後にゼロとなるという条件を設ける。また、部材角は微小変形であるとし、結果、部材先端の変位は図8-4に示すように、微小な正方向（時計回り）の回転角Rによって、変位 du, dv が各々次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} du &= Rl_y \\ dv &= -Rl_x \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.1)$$

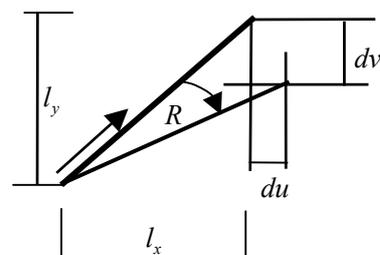


図8-4 部材角によるx、y方向の微小変位

ここで、変位 du, dv はベクトルであり、方向を持つ。また、部材角も時計回りが正方向であり、部材の方向成分 l_x, l_y も始点から終点に向かうベクトルとする。

例として、図 8-3 に示す骨組を用いて、x、y 方向の部材回転角による変位を求めてみよう。

1) x 方向の変位(8.2)

$$h_1 R_1 + h_2 R_2 - h_2 R_3 - h_1 R_4 = 0$$

2) y 方向変位(8.3)

$$-\frac{l}{2} R_2 - \frac{l}{2} R_3 = 0$$

上式から分かるように、部材の始点から終点に向かって、部材の y 方向成分が正の場合、x 方向変位は正となり、成分が負の場合、変位は負となる。同じく、部材の x 方向成分が正の場合、x 方向変位は負となり、成分が負の場合、変位は正となる。

式(8.2)と(8.3)を行列を用いて表現すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & -h_2 & -h_1 \\ 0 & l/2 & l/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{.....(8.4)}$$

上式の制限条件式で、独立部材角を有する部材として両柱を選択する。両柱の部材角を右辺項に移項し、整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad \text{.....(8.5)}$$

次に、独立部材角を各々 1 とした際の従属部材角の値を求める。例えば、 R_1 を 1 とした場合は、

$$\begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{.....(8.6)}$$

となり、上式を解くことによって、従属部材角は、

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \quad \text{.....(8.7)}$$

となる。また、 R_4 を 1 とした場合は、同様の計算によって、

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h_1}{2h_2} \\ -\frac{h_1}{2h_2} \end{Bmatrix} \quad \text{.....(8.8)}$$

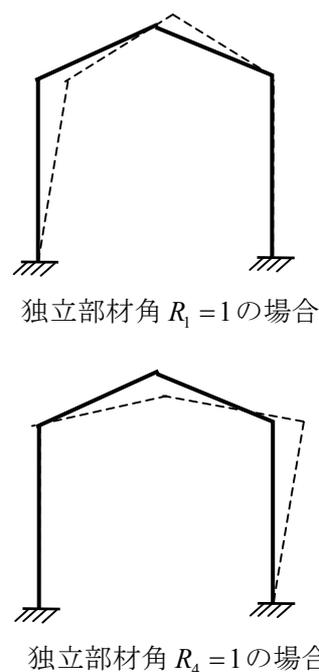


図 8-5 独立部材角と従属部材角の関係

式(8.7)と(8.8)をまとめると、部材角間の依存関係が確立する。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{h_1}{2h_2} & \frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.9)$$

ここで、 R'_1, R'_2 は独立部材角を意味する。

独立部材角を有する部材として、他の部材を指定することもできる。式(8.4)で独立部材角を R_1, R_2 とし、他の部材との依存関係を調べてみよう。式(8.5)と同様に独立部材角を右辺項に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -h_2 & -h_1 \\ l/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.10)$$

同様の操作を行い、独立部材角に対する部材角の関係を求めると、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \frac{2h_2}{h_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.11)$$

以上のように、独立部材角の選択を変えても、式(8.9)と(8.11)のように部材角の依存関係が求められることになる。

一方、独立部材角として、2つの梁を選択する場合について考えてみよう。独立部材角を右辺項に移項すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_2 & -h_2 \\ l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.12)$$

上式で、左辺の係数行列における行列式の値はゼロとなり、従属部材に関する部材角の値が求められない。このように独立部材角の選択は、従属部材による係数行列が特異行列にならず、逆行列が得られるようにしなければならない。

式(8.11)のように、独立部材角と部材角の関係を次式の行列を用いて表す。 H_{ij} は依存関係を表す係数行列である。

$$R_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} R'_j \quad \dots\dots(8.13)$$

ここで、 R'_j は独立部材角である。さらに、上式をこの独立部材角で微分すると下式が得られ、後で使用することになる。

$$\frac{\partial R_i}{\partial R'_j} = H_{ij} \quad \dots\dots(8.14)$$

例として前節の方法を用いて、図 8-6 の整形骨組に関する部材角間の依存関係を求めてみよう。

部材数は 3 であり、制限条件は 2 であることから、独立部材角は 1 となる。前節に従って、図 8-6 の骨組の制限条件を以下のように求める。

$$\begin{bmatrix} h & 0 & -h \\ 0 & -l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.15)$$

独立部材角を柱の部材角 R_1 に採り、上式を整理すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & -h \\ -l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} R_1 \quad \dots\dots(8.16)$$

となる。ここで、 R_1 を 1 に採り、上式を解くと、従属部材角の値は容易に得られる。整理すると次式となる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R'_1 \quad \dots\dots(8.17)$$

上式のように、柱は同一の部材角となり、梁には部材角が生じない。先の整形骨組で用いていた方法と同一の結果が得られたことになる。

次に、図 8-7 に示す異形ラーメンの部材角依存関係を求めてみよう。図中には 2 つのループが見られ、従って、4 つの制限条件があることを示している。部材数は計 7 であり、制限条件が 4 であることから、独立部材角は 3 となる。

第 1 層の制限条件を以下に示す。

1) x 方向の変位

$$h_1 R_1 - h_1 R_4 = 0 \quad \dots\dots(8.18)$$

8.3 部材角間の依存関係の例題

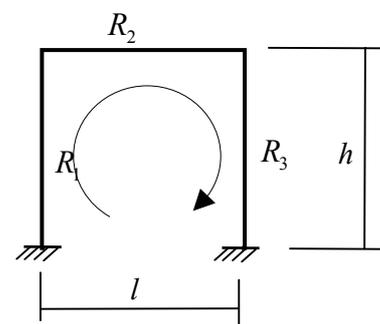


図 8-6 整形骨組

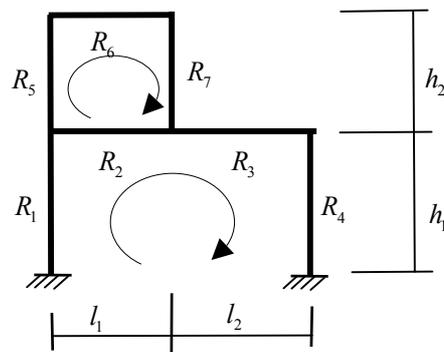


図 8-7 2層の異形ラーメン

2) y 方向変位

$$-l_1 R_2 - l_2 R_3 = 0 \quad \dots\dots(8.19)$$

次に、第2層では、

1) x 方向の変位

$$h_2 R_5 - h_2 R_7 = 0 \quad \dots\dots(8.20)$$

2) y 方向変位

$$-l_1 R_6 + l_1 R_2 = 0 \quad \dots\dots(8.21)$$

式(8.18)から(8.21)までを行列を用いて表現すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & -h_2 \\ 0 & l_1 & 0 & 0 & 0 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.22)$$

ここで、独立部材角として、 R_1, R_2, R_5 を選択し、独立部材角の項を右辺に移項する。

$$\begin{bmatrix} 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.23)$$

前節と同様に、独立部材角を各々1として、従属部材角の値を求める。

4 元の連立方程式で一見難しそうであるが、行を入れ替えると次のように係数行列は対角行列となっており、解は容易に求められることになる。

$$\begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.24)$$

1) $R_1 = 1$ の場合、 2) $R_2 = 1$ の場合、 3) $R_5 = 1$ の場合

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} R_1 ; \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1/l_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} R_2 ; \begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} R_5 \quad \dots\dots(8.25)$$

以上をまとめると、従属関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.26)$$

次に、たわみ角法によって骨組全体の釣合式を誘導する。釣合式の数は境界節点を除いた節点数と独立部材角の数の和に等しい。整形骨組では、各層で独立部材角（層間変形角）がひとつあり、そのため、各層で層せん断力の釣合、あるいは層モーメントの釣合を設定することによって独立部材角と同じ数の釣合式が得られた。しかしながら、異形ラーメンでは、梁にも部材角が生じ、層数より多くの独立部材角が存在する。そこで、層モーメントの釣合式に替えて、独立部材角の数だけ釣合式を作る必要が生じる。ここでは、仮想仕事の原理を用いて、釣合式を求めることにする。仮想仕事の原理とは、「釣合のとれている骨組に、境界条件を満たす仮想の変位を与えたとき、その仮想の変位による内力仕事と外力の成す仕事は等しい」である。この仮想仕事の原理を用いて異形ラーメンの釣合式を求めてみよう。

材端力と外力が加わっている部材に仮想の変位を与えたとき、骨組全体の内力仕事 U は材端モーメントを用いると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^{all} \{M'_{ij}(\bar{\theta}_i - \bar{R}_k) + M'_{ji}(\bar{\theta}_j - \bar{R}_k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{all} \{M'_{ij}\bar{\theta}_i + M'_{ji}\bar{\theta}_j - (M'_{ij} + M'_{ji})\bar{R}_k\} \quad \dots\dots(8.27) \end{aligned}$$

上式の all は全部材について和を採ることを意味し、 M'_{ij}, M'_{ji} は部材荷重による固定端モーメントを除いた材端モーメントである。また、 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$ は仮想の変位より得られる部材両端の回転角であり、 \bar{R}_k は同じく部材角を意味する。外力仕事 V は、節点荷重 P_k と節点モーメント荷重、及び部材荷重による固定端モーメント C_{kj} を考慮すると、次式となる。

$$V = \sum_{k=1}^b P_k \bar{u}_i + \sum_{k=1}^c (m_k - C_{kj}) \bar{\theta}_k \quad \dots\dots(8.28)$$

8.4 異形ラーメンの釣合式

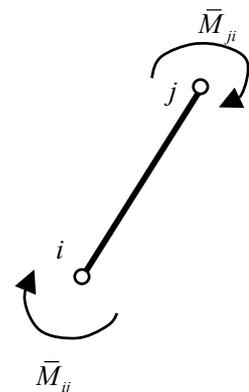


図 8-8 両端ピンに材端モーメントが加わっている部材に部材角が生じた場合

上式で、 b は節点に集中荷重が加わっている節点全てで和を採ることを、また、 c は節点にモーメント荷重 m_k 、あるいは、部材荷重による固定端モーメントが加わっている節点全てについて和を採ることを意味する。

仮想仕事の原理より、仮想変位による内力仕事と外力仕事は等しくなり、結果、次式が得られる。

$$U = V \quad \text{or} \quad W = U - V = 0 \quad \dots\dots(8.29)$$

上式は、式(8.27)と(8.28)で求めた仕事を代入すると、次式となる。

$$\begin{aligned} W = & \sum_{k=1}^{all} \{M'_{ij}\bar{\theta}_i + M'_{ji}\bar{\theta}_j - (M'_{ij} + M'_{ji})\bar{R}_k\} \\ & - \sum_{k=1}^b P_k \bar{u}_i + \sum_{k=1}^c (m_k - C_{kj})\bar{\theta}_k = 0 \quad \dots\dots(8.30) \end{aligned}$$

任意の仮想変位を与えても、上式が常に成立するためには、各仮想変位の係数はゼロでなくてはならない。そのため、次式が成立することになる。

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_i} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial R'_m} = 0 \quad \dots\dots(8.31)$$

前節で学んだように、たわみ角法では部材角には依存関係があり、従って、仮想変位として自由に動き得る部材角は独立部材角であり、この独立部材角に関する係数がゼロでなくてはならない。式(8.30)に式(8.31)の左を適用すると、各節点におけるモーメントの釣合式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta_i} = & \sum_{k=1}^m M'_{ij} - m_i - \sum_{k=1}^m C_{ij} = 0 \\ = & \sum_{k=1}^m M_{ij} - m_i = 0 \quad \dots\dots(8.32) \end{aligned}$$

ここで、 m は当該節点に結合する部材数である。上式は、たわみ角法の節点モーメントの釣合式に相当する。

同様に、式(8.30)に式(8.31)の右を適用すると、各独立部材角に関するモーメントの釣合式が得られる。

$$\frac{\partial W}{\partial R'_m} = - \sum_{i=1}^{all} (M'_{ij} + M'_{ji}) \frac{\partial \bar{R}_i}{\partial R'_m} - \sum_{k=1}^b P_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial R'_m} = 0 \quad \dots\dots(8.33)$$

この方程式は、これまでのたわみ角法では層モーメントの釣合に対応する。上式にたわみ角法の基本式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}
 -\sum_{k=1}^{all} \frac{2EI_k}{l_k} (3\theta_i + 3\theta_j - 6R_k) \frac{\partial \bar{R}_k}{\partial \bar{R}_m} &= \sum_{k=1}^b P_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{R}_m} \\
 \sum_{k=1}^{all} \frac{2EI_k}{l_k} (-\theta_i - \theta_j + 2R_k) \frac{\partial \bar{R}_k}{\partial \bar{R}_m} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^b P_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{R}_m} \quad \dots\dots\dots(8.34)
 \end{aligned}$$

ここで、両辺を3で割るのは、全体釣合式の剛性行列を対称にするためである。変数変換を行うために、上式の左辺に標準剛度 K_0 を分母・分子に掛けると次式となり、釣合式が変数変換されることになる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{all} \frac{2EI_k}{K_0} (-\theta_i K_0 - \theta_j K_0 + 2R_k K_0) \frac{\partial \bar{R}_k}{\partial \bar{R}_m} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^b P_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{R}_m} \\
 \sum_{k=1}^{all} k_k (\varphi_i + \varphi_j + \frac{2}{3}\psi_k) \frac{\partial \bar{R}_k}{\partial \bar{R}_m} &= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^b P_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{R}_m} \quad \dots\dots\dots(8.35)
 \end{aligned}$$

ここで、変数変換したたわみ角法の基本式は、

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= k(2\varphi_i + \varphi_j + \psi) - C_{ij} \\
 M_{ji} &= k(2\varphi_j + \varphi_i + \psi) + C_{ji} \quad \dots\dots\dots(8.36)
 \end{aligned}$$

であり、変換式は次式である。

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{K}{K_0}; \quad K = \frac{2EI}{l} \\
 \varphi_i &= \theta_i K_0; \quad \psi = -3RK_0 \quad \dots\dots\dots(8.37)
 \end{aligned}$$

式(8.34)及び(8.35)が、整形ラーメンにおける層モーメントの釣合に対応するモーメントの釣合式となる。

8.5 例題 8-1

本節では、図 8-9 に示す切妻屋根を有する骨組を用いて、骨組全体の釣合式を求めてみよう。まず、独立部材角を R_1, R_4 とすると、部材角の関係は、式(8.9)に見られるように次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^2 H_{ij} R'_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{h_1}{2h_2} & \frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_4 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(8.38)$$

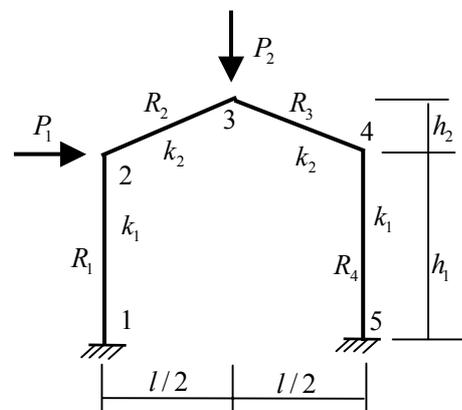


図 8-9 異形ラーメンの解析モデル

次に、仮想仕事の原理を用いたモーメントの釣合を求める。釣

合式は、式(8.32)より求められる。以下、具体的に境界条件を考慮して節点でのモーメントの釣合を求めてみよう。

第1節点

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ k_1(2\varphi_2 + \psi_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \psi_2) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8.39)$$

上式で、従属部材角があるため、式(8.38)を参考に、釣合式を独立部材角で表す。ただし、式(8.38)の部材角関係と変数変換した部材角の関係は同じとなる。

$$k_1(2\varphi_2 + \psi_1) + k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4) = 0 \quad \dots\dots(8.40)$$

第3節点

$$\begin{aligned} M_{32} + M_{34} &= 0 \\ k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \psi_2) + k_3(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi_3) &= 0 \\ k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4) + k_3(2\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_4) &= 0 \\ k_2(\varphi_2 + 4\varphi_3 + \varphi_4) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8.41)$$

第4節点

$$\begin{aligned} M_{43} + M_{45} &= 0 \\ k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_4) + k_1(2\varphi_4 + \psi_4) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8.42)$$

以上をまとめ、行列表示すると、次の節点方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & k_1 - \frac{h_1}{2h_2}k_2 & \frac{h_1}{2h_2}k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1 + k_2) & \frac{h_1}{2h_2}k_2 & k_1 - \frac{h_1}{2h_2}k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.43)$$

次に、式(8.35)を用いてモーメントの釣合を求める。独立部材角は、両柱の部材角 R_1, R_4 である。最初に、仮想変位として独立部材角 \bar{R}'_1, \bar{R}'_4 を与えたときの内部仕事から、式(8.35)の左辺項を求める。ここで、式

(8.38) より、部材角の独立部材角による微分は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_1}{\partial R'_4} \\ \frac{\partial R_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_2}{\partial R'_4} \\ \frac{\partial R_3}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_3}{\partial R'_4} \\ \frac{\partial R_4}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_4}{\partial R'_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h_1}{2h_2} & \frac{h_1}{2h_2} \\ \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{h_1}{2h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8.44)$$

以下に、上式を参考にして各部材の左辺項を求める。

1) 第 1 部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \bar{R}'_1} &= k_1(\varphi_2 + \frac{2}{3}\psi_1) \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{R}'_1} = k_1(\varphi_2 + \frac{2}{3}\psi_1) \\ \frac{\partial U_1}{\partial \bar{R}'_4} &= k_1(\varphi_2 + \frac{2}{3}\psi_1) \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{R}'_4} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.45)$$

2) 第 2 部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial \bar{R}'_1} &= k_2\{\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\} \frac{\partial R_2}{\partial \bar{R}'_1} = k_2\{\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\}(-\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2 + (-\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3 + \frac{1}{6}(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1 - (\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4\} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \bar{R}'_4} &= k_2\{\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\} \frac{\partial R_2}{\partial \bar{R}'_4} = k_2\{\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}(-\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\}(\frac{h_1}{2h_2}) \\ &= k_2\{(\frac{h_1}{2h_2})\varphi_2 + (\frac{h_1}{2h_2})\varphi_3 + \frac{1}{6}(-\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1 + (\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.46)$$

3) 第 3 部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial \bar{R}'_1} &= k_2\{\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{2}{3}(\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\}(\frac{h_1}{2h_2}) = k_2\{\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3 + \frac{h_1}{2h_2}\varphi_4 + \frac{1}{6}(\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1 - (\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4\} \\ \frac{\partial U_3}{\partial \bar{R}'_4} &= k_2\{\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{2}{3}(\frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_4)\}(-\frac{h_1}{2h_2}) = k_2\{-\frac{h_1}{2h_2}\varphi_3 - \frac{h_1}{2h_2}\varphi_4 + \frac{1}{6}(-\frac{h_1}{h_2})^2\psi_1 + (\frac{h_1}{h_2})^2\psi_4\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.47)$$

4) 第 4 部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_4}{dR'_1} &= 0 \\ \frac{dU_4}{dR'_4} &= k_1(\varphi_4 + \frac{2}{3}\psi_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.48)$$

次に、外力仕事を求める。外力に対応する 2 節点及び 3 節点の変位 (u_2, v_3) は、部材角によって次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1 R_1 \\ \frac{l}{2} R_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.49)$$

ここで、後で使用する独立部材角に関する微分係数は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial u_2}{\partial R'_4} \\ \frac{\partial v_3}{\partial R'_1} & \frac{\partial v_3}{\partial R'_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ \frac{l}{2} \frac{\partial R_2}{\partial R'_1} & \frac{l}{2} \frac{\partial R_2}{\partial R'_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ \frac{l}{2} \frac{h_1}{h_2} & -\frac{l}{2} \frac{h_1}{h_2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8.50)$$

仮想変位による外力仕事は、図 8-9 を参考にして、

$$V = V_2 + V_3 = P_1 \bar{u}_2 + P_2 \bar{v}_3 \quad \dots\dots(8.51)$$

で与えられる。上式及び式(8.50)を利用して、式(8.35)の右辺項を計算する。

1) 第2節点 (水平方向荷重)

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dR'_1} &= -\frac{1}{3} (P_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial R'_1}) = -\frac{1}{3} P_1 h_1 \\ \frac{dV_2}{dR'_4} &= -\frac{1}{3} (P_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial R'_4}) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots(8.52)$$

2) 第3節点 (鉛直方向荷重)

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dR'_1} &= -\frac{1}{3} P_2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial R'_1} = -\frac{1}{3} P_2 \frac{l}{2} \left(-\frac{h_1}{2h_2}\right) = \frac{P_2 l}{12} \frac{h_1}{h_2} \\ \frac{dV_3}{dR'_4} &= -\frac{1}{3} P_2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial R'_4} = -\frac{1}{3} P_2 \frac{l}{2} \left(\frac{h_1}{2h_2}\right) = -\frac{P_2 l}{12} \frac{h_1}{h_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots(8.53)$$

これで、2つの独立部材角に関する項は全て求められた。これらをまとめて、各独立部材角に関するモーメントの釣合式は、行列表示を用いると、次のように表される。

$$\begin{bmatrix} k_1 - k_2 \left(\frac{h_1}{2h_2}\right) & 0 & k_2 \left(\frac{h_1}{2h_2}\right) & \frac{2}{3} \left(k_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 k_2\right) & -\frac{1}{3} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 k_2 \\ k_2 \left(\frac{h_1}{2h_2}\right) & 0 & k_1 - k_2 \left(\frac{h_1}{2h_2}\right) & -\frac{1}{3} k_2 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 & \frac{2}{3} \left(k_1 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{P_1 h_1}{3} + \frac{P_2 l}{12} \frac{h_1}{h_2} \\ \\ -\frac{P_2 l}{12} \frac{h_1}{h_2} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.54)$$

節点方程式(8.43)と仮想仕事による釣合式(8.54)をまとめると、全体の釣合式が得られる。以上のように得られた5元の連立方程式は次式となり、剛性行列は対称となっている。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1-k_2 \frac{h_1}{2h_2} & k_2 \frac{h_1}{2h_2} \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & k_2 \frac{h_1}{2h_2} & k_1-k_2 \frac{h_1}{2h_2} \\ k_1-k_2 \frac{h_1}{2h_2} & 0 & k_2 \frac{h_1}{2h_2} & \frac{2}{3}(k_1+\frac{1}{2}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2) & -\frac{1}{3}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2 \\ k_2 \frac{h_1}{2h_2} & 0 & k_1-k_2 \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{1}{3}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2 & \frac{2}{3}(k_1+\frac{1}{2}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P_1 h_1}{3} + \frac{P_2 h_1}{12 h_2} \\ -\frac{P_2 h_1}{12 h_2} \end{Bmatrix} \dots\dots(8.55)$$

次に、独立部材角を変更して釣合式を求めてみよう。独立部材角を R_1, R_2 とすると、部材角間の依存関係は式(8.11)より以下のようなのである。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \frac{2h_2}{h_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \end{Bmatrix} \dots\dots(8.56)$$

各部材のたわみ角法による基本式は、境界条件と部材角間の依存関係を考慮すると以下のようなのである。

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= k_1(\varphi_2 + \psi_1) \\ M_{21} &= k_1(2\varphi_2 + \psi_1) \\ M_{23} &= k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \psi_2) \\ M_{32} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \psi_2) \\ M_{34} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 - \psi_2) \\ M_{43} &= k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 - \psi_2) \\ M_{45} &= k_1(2\varphi_4 + \psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2) \\ M_{54} &= k_1(\varphi_4 + \psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.57)$$

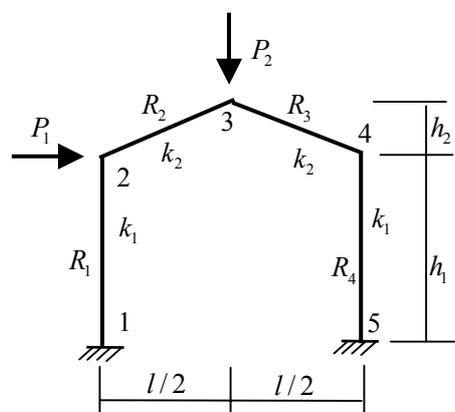


図 8-10 異形ラーメンの解析モデル

上式を用いて、各節点におけるモーメントの釣合より、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & k_1 & \frac{2h_2}{h_1}k_1-k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots(8.58)$$

次に、式(8.35)を用いてモーメントの釣合を求める。独立部材角は、柱と梁の部材角 R_1, R_2 である。最初に、仮想変位として独立部材角 \bar{R}'_1, \bar{R}'_2 を与えたときの内部仕事から、式(8.35)の左辺項を求める。ここで、式(8.56)より、部材角の独立部材角による微分は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_1}{\partial R'_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_2}{\partial R'_2} \\ \frac{\partial R_3}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_3}{\partial R'_2} \\ \frac{\partial R_4}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_4}{\partial R'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \frac{2h_2}{h_1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8.59)$$

以下に、上式を参考にして、各部材の左辺項を求める。

1) 第1部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{dR'_1} &= k_1(\varphi_2 + \frac{2}{3}\psi_1) \frac{\partial R_1}{\partial R'_1} = k_1(\varphi_2 + \frac{2}{3}\psi_1) \\ \frac{dU_1}{dR'_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.60)$$

2) 第2部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_2}{dR'_1} &= k_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}\psi_2) \frac{\partial R_2}{\partial R'_1} = 0 \\ \frac{dU_2}{dR'_2} &= k_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}\psi_2) \frac{\partial R_2}{\partial R'_2} = k_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{2}{3}\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.61)$$

3) 第3部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_3}{dR'_1} &= k_2(\varphi_3 + \varphi_4 - \frac{2}{3}\psi_2) \frac{\partial R_3}{\partial R'_1} = 0 \\ \frac{dU_3}{dR'_2} &= k_2(\varphi_3 + \varphi_4 - \frac{2}{3}\psi_2) \frac{\partial R_3}{\partial R'_2} = k_2(-\varphi_3 - \varphi_4 + \frac{2}{3}\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.62)$$

4) 第4部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_4}{dR'_1} &= k_1(\varphi_4 + \frac{2}{3}(\psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2)) \frac{\partial R_4}{\partial R'_1} = k_1(\varphi_4 + \frac{2}{3}(\psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2)) \\ \frac{dU_4}{dR'_2} &= k_1(\varphi_4 + \frac{2}{3}(\psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2)) \frac{\partial R_4}{\partial R'_2} = k_1(\varphi_4 + \frac{2}{3}(\psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2)) \frac{2h_2}{h_1} \\ &= k_1(\frac{2h_2}{h_1}\varphi_4 + \frac{4}{3}(\frac{h_2}{h_1}\psi_1 + 2(\frac{h_2}{h_1})^2\psi_2)) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.63)$$

次に、外力仕事を求める。外力に対応する変位は、部材角によって式(8.49)で与えられ、また、式(8.56)より、その微分係数は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial u_2}{\partial R'_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial R'_1} & \frac{\partial v_3}{\partial R'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8.64)$$

外力仕事は、上式を参考にして次のように求められる。

1) 節点 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dR'_1} &= -\frac{P_1}{3} \frac{\partial u_1}{\partial R'_1} = -\frac{P_1}{3} h_1 \\ \frac{dV_1}{dR'_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.65)$$

2) 節点 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_2}{d\psi_1} &= 0 \\ \frac{dV_2}{dR'_2} &= -\frac{P_2}{3} \frac{\partial v_3}{\partial R'_2} = -\frac{P_2}{6} l \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.66)$$

以上をまとめて、全体釣合式を行列形式で以下に示す。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & k_1 & \frac{2h_2}{h_1}k_1-k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 & \frac{4}{3}k_1 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 \\ k_2 & 0 & \frac{2h_2}{h_1}k_1-k_2 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 & \frac{4}{3}(k_2+2(\frac{h_2}{h_1})^2k_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P_1 h_1}{3} \\ -\frac{P_2 l}{6} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.67)$$

8.6 例題 8-2

図 8-11 に示す例題 8-2 を用いて、再度異形ラーメンの解析を実施する。部材角間の依存関係は既に求められており、式(8.26)より次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.68)$$

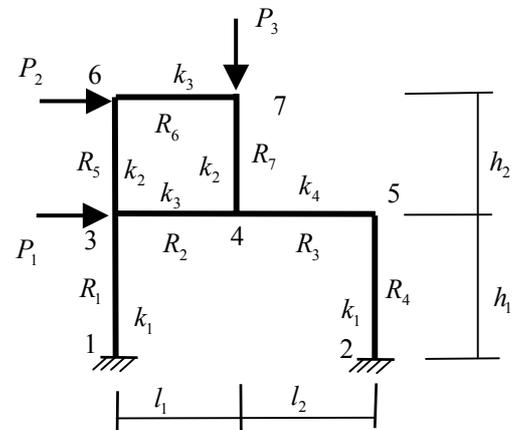


図 8-11 2層の異形ラーメン

ここで、独立部材角は、柱の R'_1, R'_5 と梁の R'_2 である。

節点数は7で、固定支持の2を除くと、節点回転角は5自由度となる。独立部材角は3であり、従って、全自由度は8となる。最初に、式(8.68)を参照して、節点方程式を作る。部材荷重は無いので、節点方程式では荷重ベクトルはゼロとなる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\ k_3 & 2(k_2+k_3+k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3 - \frac{l_1}{l_2}k_4 & k_2 \\ 0 & k_4 & 2(k_1+k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 2(k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2+k_3) & 0 & k_3 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots(8.69)$$

次に、式(8.35)を用いてモーメントの釣合を求める。独立部材角は、両柱の部材角 R_1, R_5 と梁の R_2 である。最初に、仮想変位として独立部材角 $\bar{R}'_1, \bar{R}'_2, \bar{R}'_5$ を与えたときの内力仕事から、式(8.35)の左辺項を求める。ここで、式(8.68)より独立部材角による微分は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_1}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_1}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_2}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_2}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_3}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_3}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_3}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_4}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_4}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_4}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_5}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_5}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_5}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_6}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_6}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_6}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial R_7}{\partial R'_1} & \frac{\partial R_7}{\partial R'_2} & \frac{\partial R_7}{\partial R'_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_1/l_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(8.70)$$

以下に、上式を参考にして、各部材の左辺項を求める。

7) 第1部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{dR'_1} &= k_1(\varphi_3 + \frac{2}{3}\psi_1) \\ \frac{dU_1}{dR'_2} &= 0; \quad \frac{dU_1}{dR'_5} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.71)$$

2) 第2部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_2}{dR'_1} = 0; \quad \frac{dU_2}{dR'_5} = 0 \\ \frac{dU_2}{dR'_2} = k_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{2}{3}\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.72)$$

3) 第3部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial R'_1} = 0; \quad \frac{\partial U_3}{\partial R'_5} = 0 \\ \frac{\partial U_3}{\partial R'_2} = k_4(\varphi_4 + \varphi_5 - \frac{2}{3}\frac{l_1}{l_2}\psi_2) \frac{\partial R_3}{\partial R'_2} = k_4(-\frac{l_1}{l_2}\varphi_4 - \frac{l_1}{l_2}\varphi_5 + \frac{2}{3}(\frac{l_1}{l_2})^2\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.73)$$

4) 第4部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_4}{\partial R'_1} = k_1\varphi_5 + \frac{2}{3}k_1\psi_1 \\ \frac{\partial U_4}{\partial R'_2} = 0; \quad \frac{\partial U_4}{\partial R'_5} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.74)$$

5) 第5部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_5}{\partial R'_1} = 0; \quad \frac{\partial U_5}{\partial R'_2} = 0 \\ \frac{\partial U_5}{\partial R'_5} = k_2(\varphi_3 + \varphi_6 + \frac{2}{3}\psi_5) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.75)$$

6) 第6部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial R'_1} = 0; \quad \frac{\partial U_3}{\partial R'_5} = 0 \\ \frac{\partial U_3}{\partial R'_2} = k_3(\varphi_6 + \varphi_7 + \frac{2}{3}\psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.76)$$

7) 第7部材

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_7}{\partial R'_1} = 0; \quad \frac{\partial U_7}{\partial R'_2} = 0 \\ \frac{\partial U_7}{\partial R'_5} = k_2(\varphi_4 + \varphi_7 + \frac{2}{3}\psi_5) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8.77)$$

次に、仮想変位によって生じる外力仕事を求める。外力に対応する変位は、部材角によって次のように生じる。

$$\begin{cases} u_2 \\ u_6 \\ v_7 \end{cases} = \begin{cases} h_1 R_1 \\ h_1 R_1 + h_2 R_5 \\ l_1 R_6 \end{cases} \dots\dots(8.78)$$

式(8.70)より、上式の微分係数は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial R'_1} & \frac{\partial u_2}{\partial R'_2} & \frac{\partial u_2}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial u_6}{\partial R'_1} & \frac{\partial u_6}{\partial R'_2} & \frac{\partial u_6}{\partial R'_5} \\ \frac{\partial v_7}{\partial R'_1} & \frac{\partial v_7}{\partial R'_2} & \frac{\partial v_7}{\partial R'_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & h_2 \\ 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8.79)$$

各節点における外力仕事は以下のように求められる。

1) 節点 3

$$\frac{dV_3}{dR'_1} = -\frac{P_1 h_1}{3}; \quad \frac{dV_6}{dR'_2} = 0; \quad \frac{dV_7}{dR'_5} = 0 \quad \dots\dots(8.80)$$

2) 節点 6

$$\frac{dV_3}{dR'_1} = -\frac{P_2 h_1}{3}; \quad \frac{dV_6}{dR'_2} = 0; \quad \frac{dV_7}{dR'_5} = -\frac{P_2 h_2}{3} \quad \dots\dots(8.81)$$

3) 節点 7

$$\frac{dV_3}{dR'_1} = 0; \quad \frac{dV_6}{dR'_2} = -\frac{P_3 l_1}{3}; \quad \frac{dV_7}{dR'_5} = 0 \quad \dots\dots(8.82)$$

以上の結果をまとめ、全体釣合式を行列形式で以下に示す。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1 + k_2 + k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\ k_3 & 2(k_2 + k_3 + k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3 - \frac{l_1}{l_2} k_4 & k_2 \\ 0 & k_4 & 2(k_1 + k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2} k_4 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 2(k_2 + k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2 + k_3) & 0 & k_3 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_1) & 0 & 0 \\ k_3 & k_3 - \frac{l_1}{l_2} k_4 & -\frac{l_1}{l_2} k_4 & k_3 & k_3 & 0 & \frac{2}{3}(2k_3 + (\frac{l_1}{l_2})^2 k_4) & 0 \\ k_2 & k_2 & 0 & k_2 & k_2 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_5 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (P_1 + P_2)h_1 \\ P_3 l_1 \\ P_2 h_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.83)$$

8.7 課題 1

前節で示した 2 つの例題について、たわみ角法による応力解析を行い、その結果と SPACE の結果を比較してみよう。まず、ひとつ目の例題を再び示す。ここでは、梁、柱共に以下の同じ H 型断面を使用する。

材質は SS400、H400x200x8x13 であり、断面二次モーメントは

23500 cm⁴であり、ヤング係数は 20500kN/cm²とする。柱の剛比 k_1 を 1 とすると、梁の剛比は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{2EI}{h_1}; \quad K_2 = \frac{2EI}{l_2}; \quad l_2 = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.162 \\ \frac{h_2}{h_1} &= 0.333; \quad k_2 = \frac{\frac{2EI}{l_2}}{\frac{2EI}{h_1}} = \frac{300}{316.2} = 0.9487 \end{aligned} \right\} \dots (8.84)$$

ここで、 l_2 は梁 1 本の長さであり、 l は骨組のスパン長の 6m である。

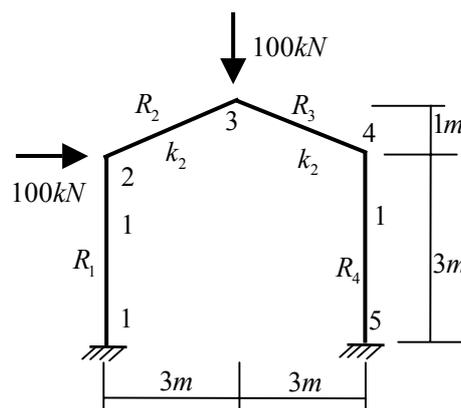


図 8-12 課題 1 の異形ラーメン

独立部材角を R_1, R_2 とすると、釣合式は式(8.67)より次式となる。

$$\begin{bmatrix} 2(k_1+k_2) & k_2 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 2(k_1+k_2) & k_1 & \frac{2h_2}{h_1}k_1 - k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 & \frac{4}{3}k_1 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 \\ k_2 & 0 & \frac{2h_2}{h_1}k_1 - k_2 & \frac{4}{3}\frac{h_2}{h_1}k_1 & \frac{4}{3}(k_2 + 2(\frac{h_2}{h_1})^2k_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P_1 h_1}{3} \\ -\frac{P_2 l}{6} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.8974 & 0.9487 & 0 & 1 & 0.9487 \\ 0.9487 & 3.7948 & 0.9487 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 3.8974 & 1 & -0.282 \\ 1 & 0 & 1 & 1.3333 & 0.4444 \\ 0.9487 & 0 & -0.282 & 0.4444 & 1.5611 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \end{Bmatrix} \dots (8.85)$$

上の 5 元の連立方程式の解を求めることは、かなり難しいので、ここでは添付した Excel の連立方程式を解くプログラムで解を求めることにする。

得られた方程式の解は、

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47.64 \\ -19.49 \\ 30.35 \\ -115.26 \\ -54.75 \end{Bmatrix} \dots (8.86)$$

となり、各部材の断面力は次式で計算される。

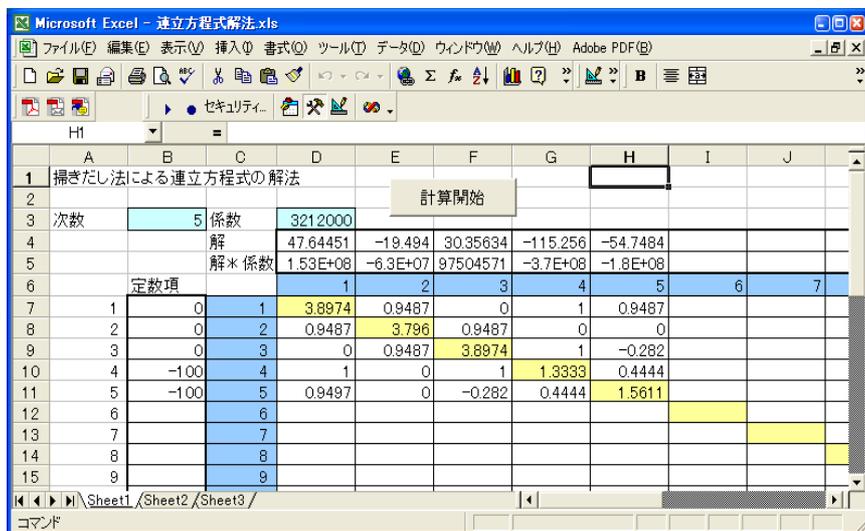


図 8-13 Excel による連立方程式の解

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= k_1(\varphi_2 + \psi_1) = (47.64 - 115.26) = -67.62 \\
 M_{21} &= k_1(2\varphi_2 + \psi_1) = (2 \cdot 47.64 - 115.26) = -19.98 \\
 M_{23} &= k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \psi_2) = 0.9487(2 \cdot 47.64 - 19.49 - 54.75) = 19.96 \\
 M_{32} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \psi_2) = 0.9487(-2 \cdot 19.49 + 47.64 - 54.75) = -43.73 \\
 M_{34} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 - \psi_2) = 0.9487(-2 \cdot 19.49 + 30.35 + 54.75) = 43.75 \\
 M_{43} &= k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 - \psi_2) = 0.9487(2 \cdot 30.35 - 19.49 + 54.75) = 91.04 \\
 M_{45} &= k_1(2\varphi_4 + \psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2) = (2 \cdot 30.35 - 115.26 - 2 \cdot 0.333 \cdot 54.75) = -91.05 \\
 M_{54} &= k_1(\varphi_4 + \psi_1 + \frac{2h_2}{h_1}\psi_2) = (30.35 - 115.26 - 2 \cdot 0.333 \cdot 54.75) = -121.41
 \end{aligned}
 \tag{8.87}$$

この材端モーメントを用いて曲げモーメント図、及びせん断力図を以下に示す。

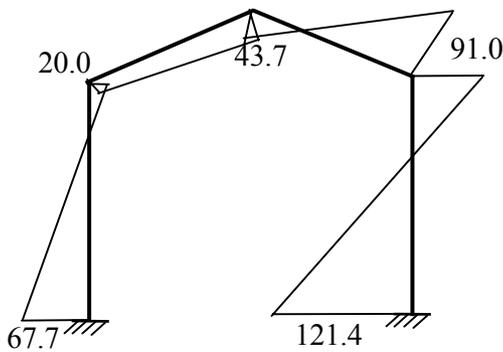


図 8-14(a) 課題 1 の異形ラーメンの曲げモーメント図

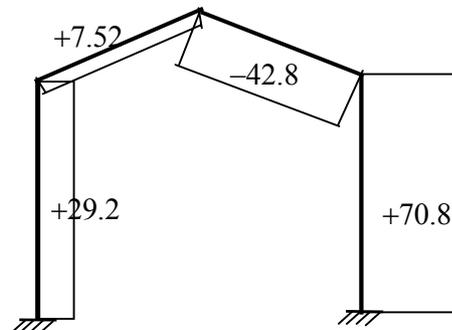


図 8-14(b) 課題 1 の異形ラーメンのせん断力図

同じ例題で、独立部材角を R_1, R_4 にした釣合式 (8.55) を用いて、応力解析を実施する。式 (8.55) に式 (8.73) に示した剛比や長さを代入し、釣合式を以下の示す。

$$\begin{bmatrix}
 2(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & k_1 - k_2 \frac{h_1}{2h_2} & k_2 \frac{h_1}{2h_2} \\
 k_2 & 4k_2 & k_2 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & 2(k_1 + k_2) & k_2 \frac{h_1}{2h_2} & k_1 - k_2 \frac{h_1}{2h_2} \\
 k_1 - k_2 \frac{h_1}{2h_2} & 0 & k_2 \frac{h_1}{2h_2} & \frac{2}{3}(k_1 + \frac{1}{2}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2) & -\frac{1}{3}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2 \\
 k_2 \frac{h_1}{2h_2} & 0 & k_1 - k_2 \frac{h_1}{2h_2} & -\frac{1}{3}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2 & \frac{2}{3}(k_1 + \frac{1}{2}(\frac{h_1}{h_2})^2 k_2)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \varphi_2 \\
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \psi_1 \\
 \psi_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\frac{P_1 h_1}{3} + \frac{P_2 l h_1}{12 h_2} \\
 -\frac{P_2 l h_1}{12 h_2}
 \end{Bmatrix}
 \tag{8.88}$$

ここで、 l は骨組のスパン長の 6m であり、荷重項は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} -\frac{P_1 h_1}{3} + \frac{P_2 l h_1}{12 h_2} \\ -\frac{P_2 l h_1}{12 h_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{100 \cdot 3}{3} + \frac{100 \cdot 6 \cdot 3}{12 \cdot 1} \\ -\frac{100 \cdot 6 \cdot 3}{12 \cdot 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ -150 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.89)$$

式(8.84)のパラメータを代入すると、骨組全体の釣合式は、次式となる。

$$\begin{bmatrix} 3.8974 & 0.9487 & 0 & -0.4231 & 1.4231 \\ 0.9487 & 3.7948 & 0.9487 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 3.8974 & 1.4231 & -0.4231 \\ -0.4231 & 0 & 1.4231 & 3.5128 & -2.8461 \\ 1.4231 & 0 & -0.4231 & -2.8461 & 3.5128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -150 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.90)$$

上式を解くと、以下の解が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47.63 \\ -19.49 \\ 30.36 \\ -115.25 \\ -151.72 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8.91)$$

たわみ角法の基本式に、上の変位を代入すると、各部材の材端モーメントが次のように得られる。

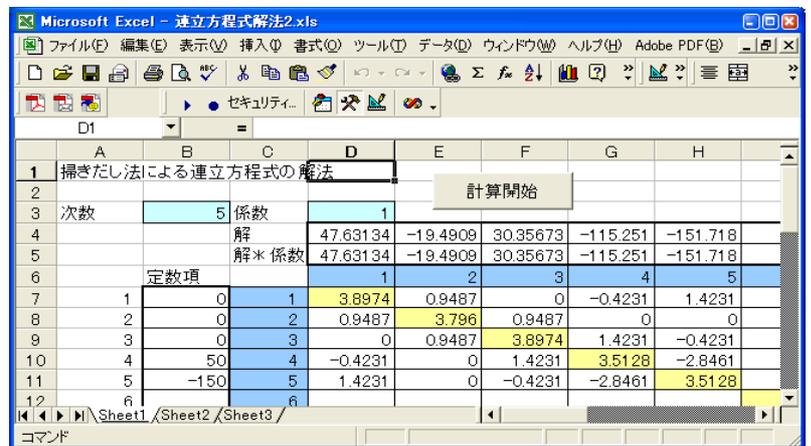


図 8-15 Excel による連立方程式の解

$$\begin{aligned} M_{12} &= k_1(\varphi_2 + \psi_1) = (47.63 - 115.25) = -67.62 \\ M_{21} &= k_1(2\varphi_2 + \psi_1) = (2 \cdot 47.63 - 115.25) = -19.99 \\ M_{23} &= k_2(2\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_2) = 0.9487(2 \cdot 47.63 - 19.49 - 1.5 \cdot (-115.25 + 151.72)) = 19.97 \\ M_{32} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_2) = 0.9487(-2 \cdot 19.49 + 47.63 - 1.5 \cdot (-115.25 + 151.72)) = -43.69 \\ M_{34} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_4 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_2) = 0.9487(-2 \cdot 19.49 + 30.36 + 1.5 \cdot (-115.25 + 151.72)) = 43.72 \\ M_{43} &= k_2(2\varphi_4 + \varphi_3 + \frac{h_1}{2h_2}\psi_1 - \frac{h_1}{2h_2}\psi_2) = 0.9487(2 \cdot 30.36 - 19.49 + 1.5 \cdot (-115.25 + 151.72)) = 91.01 \\ M_{45} &= k_1(2\varphi_4 + \psi_2) = (2 \cdot 30.36 - 151.72) = -91.00 \\ M_{54} &= k_1(\varphi_4 + \psi_2) = (30.36 - 151.72) = -121.36 \end{aligned} \quad \dots\dots(8.92)$$

この例でも、式(8.87)で求めた材端モーメントと同じとなっており、独立部材角を交換しても、正確な解が得られることが分かる。次に、先の例題の結果を用いて、節点2の水平方向変位と節点3の鉛直方向変位

を求めてみよう。まず、基準剛度は次式で与えられる。

$$K_0 = \frac{2EI}{h_1} = \frac{2 \cdot 20500 \cdot 23500}{300} = 3.212 \cdot 10^6 \quad \dots\dots\dots(8.93)$$

従って、節点2の水平方向変位は、

$$\delta_2 = R_1 h_1 = \frac{\psi_1 h_1}{-3K_0} = \frac{-115.25 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 0.358 \text{cm} \quad \dots\dots\dots(8.94)$$

同様に、節点3の鉛直方向変位は、次式のように計算される。

$$\delta_2 = R_1 \frac{l}{2} = \frac{\psi_2 l}{-3K_0} = \frac{-54.75 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 0.170 \text{cm} \quad \dots\dots\dots(8.95)$$

ここで、部材角 ψ_1, ψ_2 は荷重の単位で $kN \cdot m$ を使用しているため、100倍しておく必要がある。

次に、SPACE を用いて、数値計算を実施する。解析モデルの作成は、既に何度も行っているのので、ここでは、重要な部分のみ説明する。読者は、独自に解析モデルを作成されたい。

まず、SPACE を起動する。このSPACEの「ファイル」→「新規作成」メニューを用いて、「たわみ角法演習解析モデル」-「第8章」フォルダ内の「課題1」フォルダ中にコントロールファイルを作成する。ここでは、コントロールファイルの名前を「異形ラーメン.ct1」とする。その後、各種のコントロール情報を設定した後、モデラーを起動する。

最初は、初期設定ウィザードが自動的にダイアログを表示させるので、これに従ってデータを入力すれば良い。入力仕様の詳細は、マニュアル「モデラー使用編」を参照されたい。

ウィザードに従って、まず、タイトルを入力し、次に平面フレームを選択し、構造物の規模として、「スパン数」を2に、階数も2にセットする。本来は1層、1スパンではあるが、このような異形ラーメンでは、2層2スパンとして設定するとデータが入力し易い。次に、図8.16のように、スパン長と階高をセットする。

さらに、使用する部材断面を作成登



図 8-16 解析モデルのスパン長と階高をセットする

録する。図 8-17 で、鉄骨を選択し、材料は SS400 を、また、部材モデルは、弾性とする。断面は、H-400x200x8x13 とし、DB 値を採用する。梁・柱共に同一の断面を使用する。図 8-18 に示す梁用の G1 と柱用の C1 を設定する。

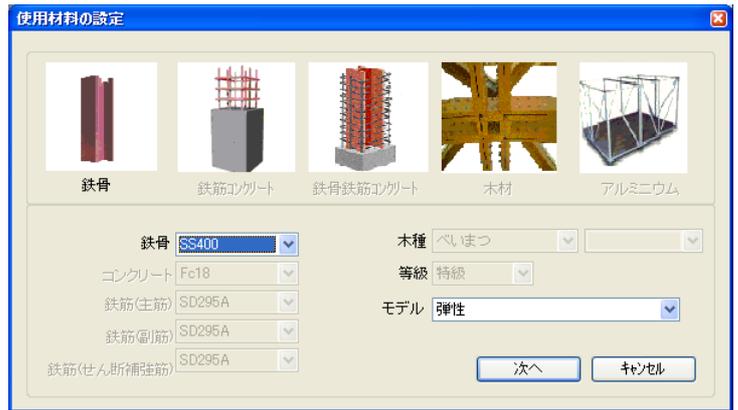


図 8-17 部材モデルの設定

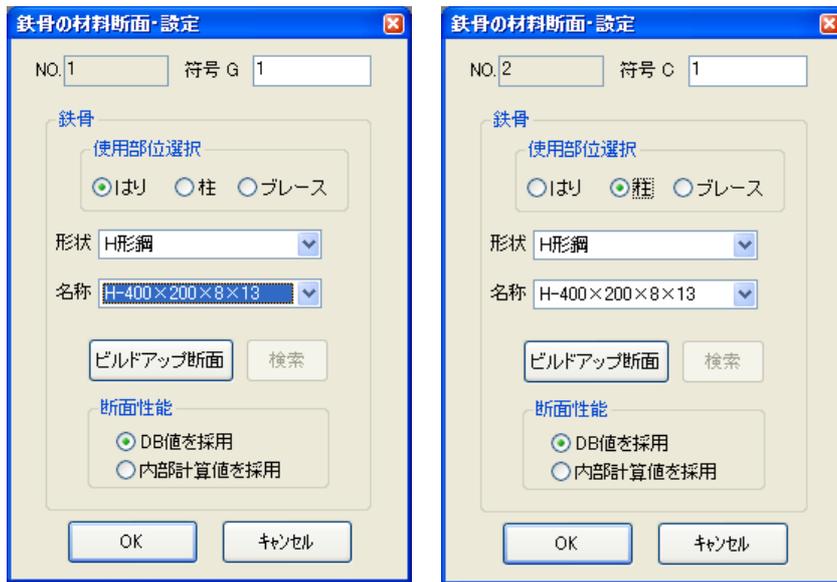


図 8-18 梁・柱の H 型断面の設定

設定した断面要素モデルを用いて、図 8-19 に示す解析モデルを作成する。梁・柱ともに、1 部材で設定する。特に、柱の方向に注意し、部材回転角は 0 度とする。規定値の -90 度のままとすると、骨組の柱は H 型の弱軸方向となる。

右図のように、固定境界と荷重を設定する。これらは、図中の骨組透視図で検証すると共に、図 8-20 のように、節点情報を用いて、チェックする。

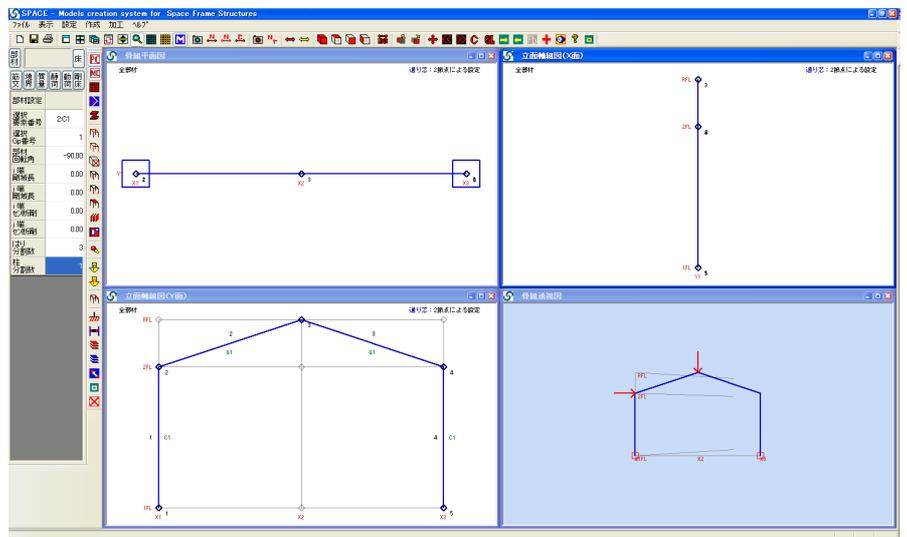


図 8-19 解析モデルの作成



図 8-20(a) 節点境界条件



図 8-20(b) 節点荷重

解析モデルが完成した後、モデラーのメニューより、図 8-21 に示すファイル出力ダイアログを使用して、構築した解析モデルをファイルに出力する。これでモデラーを閉じ、次に数値解析を実施する。

解析を実施する前に、解析用パラメータを設定する。まず、SPACE のメニューより、図 8-22 に示す「静的解析用コントロール」ダイアログを表示させ、図のように設定する。線形解析であるため、1 回の解析で良いわけであるが、ここでは、アニメーションなどの表示の都合上、図のように、荷重増分法を用い、20 回に分けて計算する。次に、「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログを表示させ、図 8-23 のように設定する。ここでは特に、「せん断変形を考慮しない」と「応力出力」にチェックマークを入れ、OK ボタンを押してダイアログを閉じる。



図 8-21 解析モデルのファイル出力ダイアログ



図 8-22 「静的解析用コントロール」ダイアログ

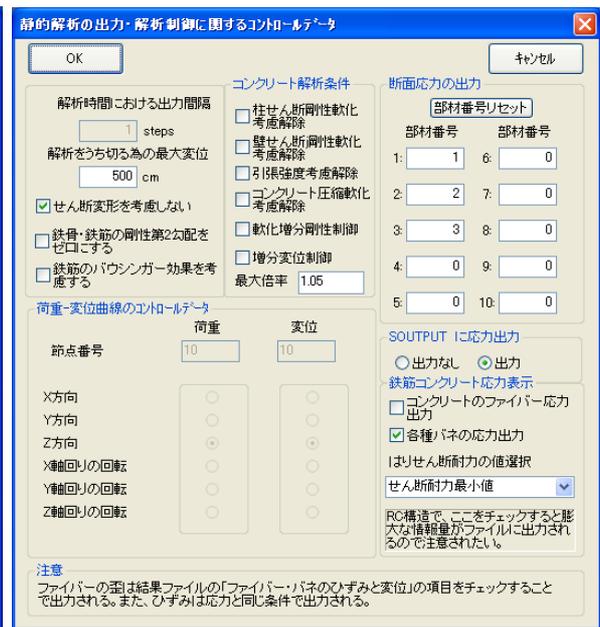


図 8-23 「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログ

解析パラメータを設定した後、静的ソルバーを起動し、線形解析を実施する。解析経過が、図の 8-24 に示すように図示される。

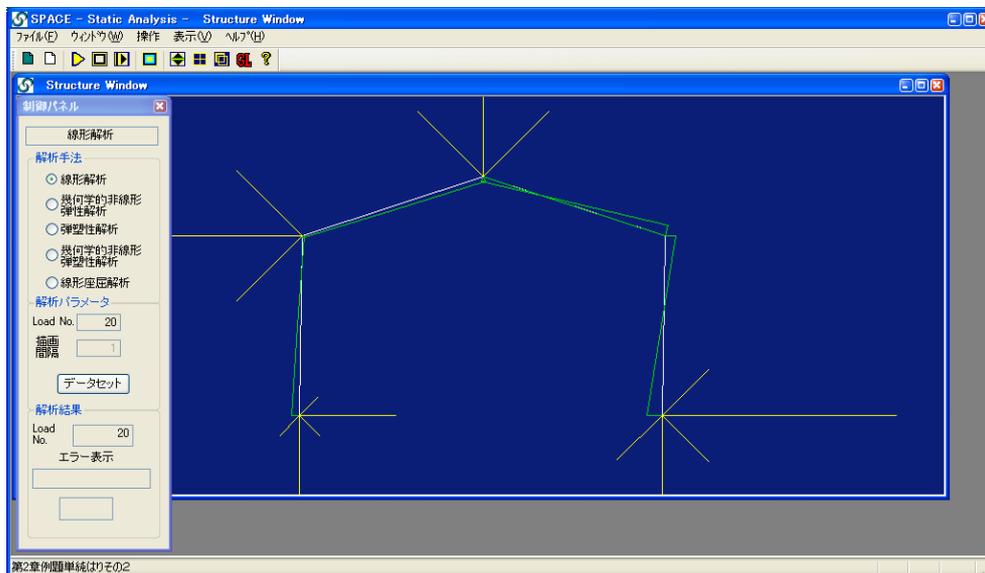


図 8-24 解析経過の曲げモーメント表示と変形表示

解析が正常終了した後、解析結果を出力表示で確認する。SPACE のメニューより、「表示」→「静的解析の途中経過の表示」を選択し、解析経過と結果を表示させる。ファイルの最後に出力されている 20 回目の解析結果を図 8-25 に示す。

図に示されている各部材の曲げモーメントの値と式(8.87)とを比較すると、良い一致が得られていることが分かる。SPACE の解析で、材軸方向の変位を許しているにもかかわらず、このモデルではたわみ角法の曲げモーメント分布と一致している。その要因の分析は、読者の演習としよう。

材番号	部材モデル	Nx	Qy	Qz	Mx	My	Mz
1	1	-31.4998	0.0000	-29.2079	0.0000	6763.1079	0.0000
		-31.4998	0.0000	-29.2079	0.0000	-1999.2703	0.0000
2	1	-77.1207	0.0000	-7.4972	0.0000	-1999.2703	0.0000
		-77.1207	0.0000	-7.4972	0.0000	-4370.0912	0.0000
3	1	-88.8210	0.0000	-42.5984	0.0000	9100.7110	0.0036
		-88.8210	0.0000	-42.5984	0.0000	-4370.0912	-0.0017
4	1	-68.4994	0.0000	-70.7929	0.0000	12137.1631	0.0000
		-68.4994	0.0000	-70.7929	0.0000	-9100.7110	0.0000

図 8-25 課題 1 の静的解析結果である部材断面力

次に静的プレゼンターを起動し、図 8-26 に示すように、せん断力図と曲げモーメント図を表示させる。下図と図 8-14 の曲げモーメントとせん断力の分布は、良い一致を示している。

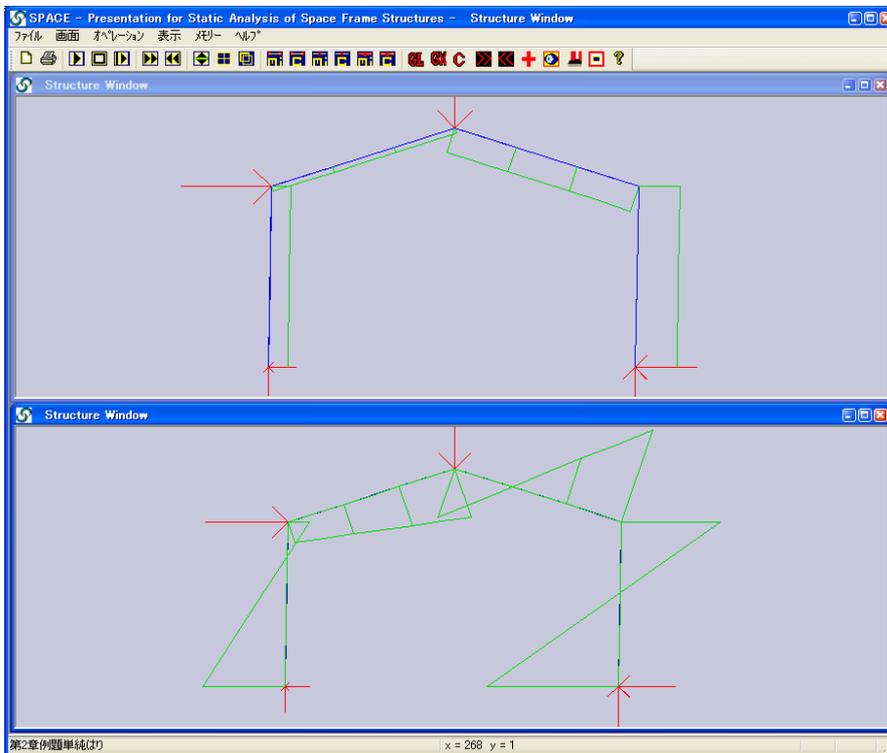


図 8-26 プレゼンターによるせん断力と曲げモーメント分布の表示

さらに、図8-26で、節点2と3の上で、Ctrl キーとマウス右ボタンを同時にクリックすることで、図8-27(a)と(b)のダイアログを表示させ、その節点の解析結果の情報を表示させる。このダイアログから分かるように、当該節点の変位と式(8.94)と(8.95)に示される節点変位と同じ値となっている。



図8-27(a) 節点2の変位情報



図8-27(b) 節点3の変位情報

8.8 課題2

本節では、課題2として例題8-2の骨組を、たわみ角法を用いて応力解析を行い、その結果とSPACEによる解析結果と比較する。ここでは、全て同じH型断面を使用する。材質はSS400、断面はH400x200x8x13とする。使用する独立部材角は R_1, R_2, R_5 である。

1階柱の剛比 k_1 を1とすると梁及び他の部材の剛比は以下のようにある。

$$\begin{aligned}
 & l_1 = 3m; l_2 = 4m; h_1 = h_2 = 3m \\
 & K_0 = \frac{2EI}{h_1}; \quad K_4 = \frac{2EI}{l_2} \\
 & k_1 = k_2 = k_3 = 1 \\
 & k_4 = \frac{K_4}{K_0} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{300}{400} = 0.75 \\
 & \frac{l_1}{l_2} = 0.75; \quad \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = 0.5625
 \end{aligned}
 \quad \dots (8.96)$$

上の値を用いて、式(8.83)の骨組全体の釣合式を作成する。

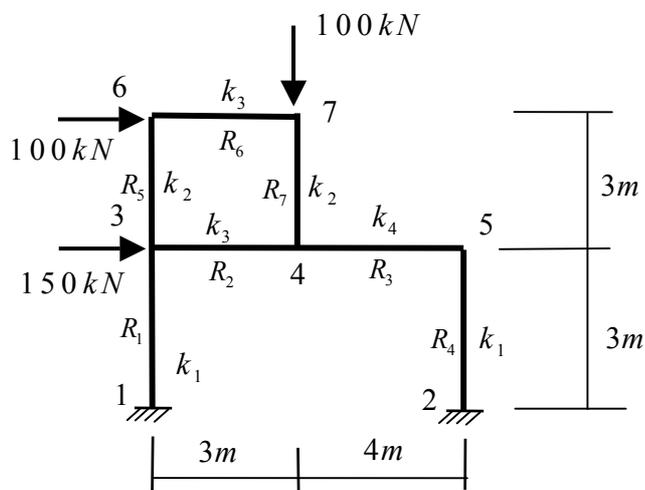


図8-28 2層の異形ラーメン

$$\begin{bmatrix}
 2(k_1+k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_2 & 0 & k_1 & k_3 & k_2 \\
 k_3 & 2(k_2+k_3+k_4) & k_4 & 0 & k_2 & 0 & k_3 - \frac{l_1}{l_2}k_4 & k_2 \\
 0 & k_4 & 2(k_1+k_4) & 0 & 0 & k_1 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & 0 \\
 k_2 & 0 & 0 & 2(k_2+k_3) & k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\
 0 & k_2 & 0 & k_3 & 2(k_2+k_3) & 0 & k_3 & k_2 \\
 k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_1) & 0 & 0 \\
 k_3 & k_3 - \frac{l_1}{l_2}k_4 & -\frac{l_1}{l_2}k_4 & k_3 & k_3 & 0 & \frac{2}{3}(2k_3 + \frac{l_1}{l_2}k_4) & 0 \\
 k_2 & k_2 & 0 & k_2 & k_2 & 0 & 0 & \frac{2}{3}(2k_2)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \varphi_5 \\
 \varphi_6 \\
 \varphi_7 \\
 \psi_1 \\
 \psi_2 \\
 \psi_5
 \end{Bmatrix}
 = -\frac{1}{3}
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 (P_1+P_2)h_1 \\
 P_3l_1 \\
 P_2h_2
 \end{Bmatrix}
 \dots\dots\dots(8.97)$$

荷重項は、

$$-\frac{1}{3}
 \begin{Bmatrix}
 (P_1+P_2)h_1 \\
 P_3l_1 \\
 P_2h_2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -250 \\
 -100 \\
 -100
 \end{Bmatrix}
 \dots\dots\dots(8.98)$$

であり、式(8.96)の剛比などの値を代入すると次の釣合式が得られる。

$$\begin{bmatrix}
 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 5.5 & 0.75 & 0 & 1 & 0 & 0.4375 & 1 \\
 0 & 0.75 & 3.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5625 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\
 1 & 0.4375 & -0.5625 & 1 & 1 & 0 & 1.6146 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1.333
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \varphi_5 \\
 \varphi_6 \\
 \varphi_7 \\
 \psi_1 \\
 \psi_2 \\
 \psi_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -250 \\
 -100 \\
 -100
 \end{Bmatrix}
 \dots\dots\dots(8.99)$$

Excel を用いて、上式の解を求め、その結果を以下に示す。

$$\begin{Bmatrix}
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \varphi_5 \\
 \varphi_6 \\
 \varphi_7 \\
 \psi_1 \\
 \psi_2 \\
 \psi_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 145.95 \\
 38.78 \\
 36.28 \\
 102.15 \\
 137.87 \\
 -324.18 \\
 -298.85 \\
 -393.57
 \end{Bmatrix}
 \dots\dots(8.100)$$

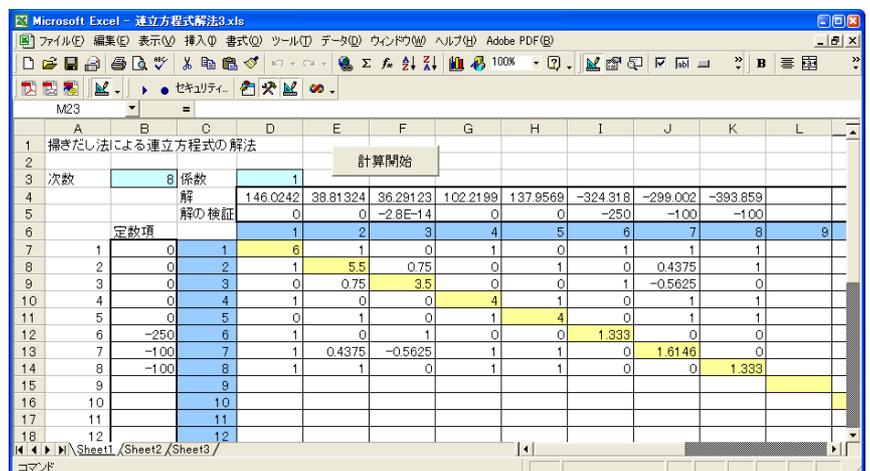


図 8-29 Excel による連立方程式の解

次に、式(8.100)を用いて各部材の材端モーメントを計算する。

$$\begin{aligned}
 M_{13} &= k_1(\varphi_3 + \psi_1) = (146.02 - 324.32) = -178.30 \\
 M_{31} &= k_1(2\varphi_3 + \psi_1) = (2 \cdot 145.95 - 324.18) = -32.28 \\
 M_{34} &= k_3(2\varphi_3 + \varphi_4 + \psi_2) = (2 \cdot 145.95 + 38.78 - 298.85) = -31.85 \\
 M_{43} &= k_3(2\varphi_4 + \varphi_3 + \psi_2) = (2 \cdot 38.78 + 145.95 - 298.85) = -75.36 \\
 M_{45} &= k_4(2\varphi_4 + \varphi_5 - \frac{l_1}{l_2}\psi_2) = 0.75(2 \cdot 38.78 + 36.28 + 0.75 \cdot 298.85) = 253.48 \\
 M_{54} &= k_4(2\varphi_5 + \varphi_4 - \frac{l_1}{l_2}\psi_2) = 0.75(2 \cdot 36.28 + 38.78 + 0.75 \cdot 298.85) = 251.61 \\
 M_{51} &= k_1(2\varphi_5 + \psi_1) = (2 \cdot 36.28 - 324.18) = -251.68 \\
 M_{15} &= k_1(\varphi_5 + \psi_1) = (36.28 - 324.18) = -287.90 \\
 M_{36} &= k_2(2\varphi_3 + \varphi_6 + \psi_5) = (2 \cdot 145.95 + 102.15 - 393.57) = 0.48 \\
 M_{63} &= k_2(2\varphi_6 + \varphi_3 + \psi_5) = (2 \cdot 102.15 + 145.95 - 393.57) = -43.32 \\
 M_{67} &= k_3(2\varphi_6 + \varphi_7 + \psi_2) = (2 \cdot 102.15 + 137.87 - 298.85) = 43.32 \\
 M_{76} &= k_3(2\varphi_7 + \varphi_6 + \psi_2) = (2 \cdot 137.87 + 102.15 - 298.85) = 79.04 \\
 M_{74} &= k_2(2\varphi_7 + \varphi_4 + \psi_5) = (2 \cdot 137.87 + 38.78 - 393.57) = -79.05 \\
 M_{47} &= k_2(2\varphi_4 + \varphi_7 + \psi_5) = (2 \cdot 38.78 + 137.87 - 393.57) = -178.14
 \end{aligned}
 \tag{8.101}$$

上の材端曲げモーメントを用いて、図 8-30 に曲げモーメント図とせん断力図、及び軸力図を示す。

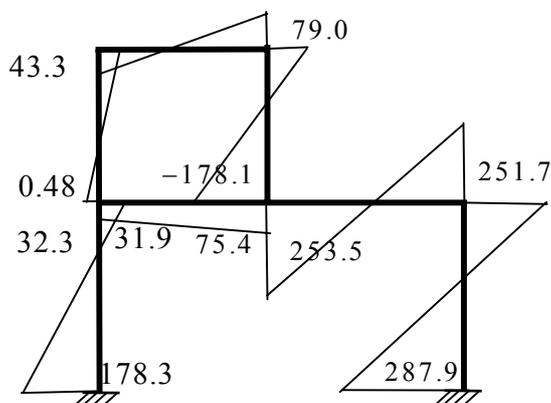


図 8-30(a) 曲げモーメント図

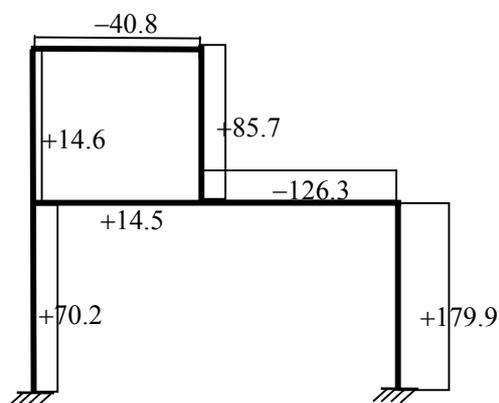


図 8-30(b) せん断力図

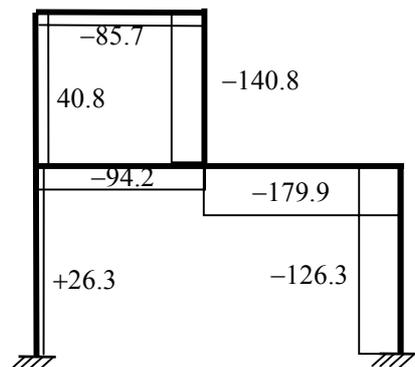


図 8-30(c) 軸力図

次に、各層床レベルの水平方向変位と第2層床中央柱の鉛直方向変位を求めておこう。まず、基準剛度は前課題と同じであり、次の値となる。

$$K_0 = \frac{2EI}{h_1} = \frac{2 \cdot 20500 \cdot 23500}{300} = 3.212 \cdot 10^6 \quad \dots\dots\dots(8.102)$$

従って、第1層柱頭の水平方向変位は、

$$\delta_2 = R_1 h_1 = \frac{\psi_1 h_1}{-3K_0} = \frac{-324.18 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 1.01 \text{cm} \quad \dots\dots\dots(8.103)$$

同様に、第2層柱頭の水平方向変位は、

$$\delta_2 = \delta_1 + R_1 h_2 = \frac{\psi_1 h_1}{-3K_0} + \frac{\psi_5 h_2}{-3K_0} = 1.01 + \frac{-393.57 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 2.24 \text{cm} \quad \dots\dots\dots(8.104)$$

同じく、第2層床中央柱の鉛直方向変位は次式のように計算される。

$$\delta_2 = R_2 l_1 = \frac{\psi_2 l_1}{-3K_0} = \frac{-298.85 \cdot 100 \cdot 300}{-3 \cdot 3.212 \cdot 10^6} = 0.93 \text{cm} \quad \dots\dots\dots(8.105)$$

ここで、部材角 ψ_1, ψ_2 は荷重の単位で $kN \cdot m$ を使用しているため、100倍しておく必要がある。

次に、SPACE を用いて、数値計算を実施する。解析モデルの作成は、既に何度も行っているなので、ここでは、重要な部分のみ説明する。読者は、独自に解析モデルを作成されたい。

まず、SPACE を起動する。このSPACEの「ファイル」→「新規作成」メニューを用いて、「たわみ角法演習解析モデル」-「第8章」フォルダ内の「課題2」フォルダ中にコントロールファイルを作成する。コントロールファイルの名前を「異形ラーメン.ct1」としよう。その後、各種のコントロール情報を設定した後、モデラーを起動する。

最初は、初期設定ウィザードが自動的にダイアログを表示させるので、これに従ってデータを入力すれば良い。ウィザードに従って、まず、タイトルを入力し、次に平面フレームを選択し、構造物の規模として、「スパン数」を2に、階数も2にセットする。次に、スパン長として、3mと4mに、階高を2層とも3mにセットする。

さらに、使用する部材断面を作成登録する。鉄骨を選択し、材料はSS400を、また、部材モデルは、弾性とする。断面は、H-400x200x8x13とし、DB値を採用する。梁・柱共に同一の断面を使用し、梁用のG1と

柱用の C1 を設定する。

骨組の形状を、図 8-28 を参照して構築し、さらに節点 1 と 2 を固定境界とし、また、荷重も図のように設定する。これらは、モデラーの骨組透視図で検証すると共に、節点情報を用いてチェックする。作成した解析モデルが、図 8-31 に示されている。

解析モデルが完成した後、モデラーのメニューから表示させたファイル出力ダイアログを使用して、構築した解析モデルをファイルに出力する。これでモデラーを閉じ、次に数値解析を実施する。

解析を実施する前に、解析用パラメータを設定する。まず、SPACE のメニューより、「静的解析用コントロール」ダイアログを表示させ、前課題と同じパラメータを、図 8-22 を参照して設定する。ここでも、線形解析であるため、1 回の解析で良いわけであるが、アニメーションなどの表示の都合上、図のように、荷重増分法を用い、20 回に分けて計算する。次に、「静的解析の出力・解析制御に関するコントロールデータ」ダイアログを表示させ、同じく図 8-23 のように設定する。ここでは特に、「せん断変形を考慮しない」と応力出力にチェックマークを入れ、OK ボタンを押してダイアログを閉じる。

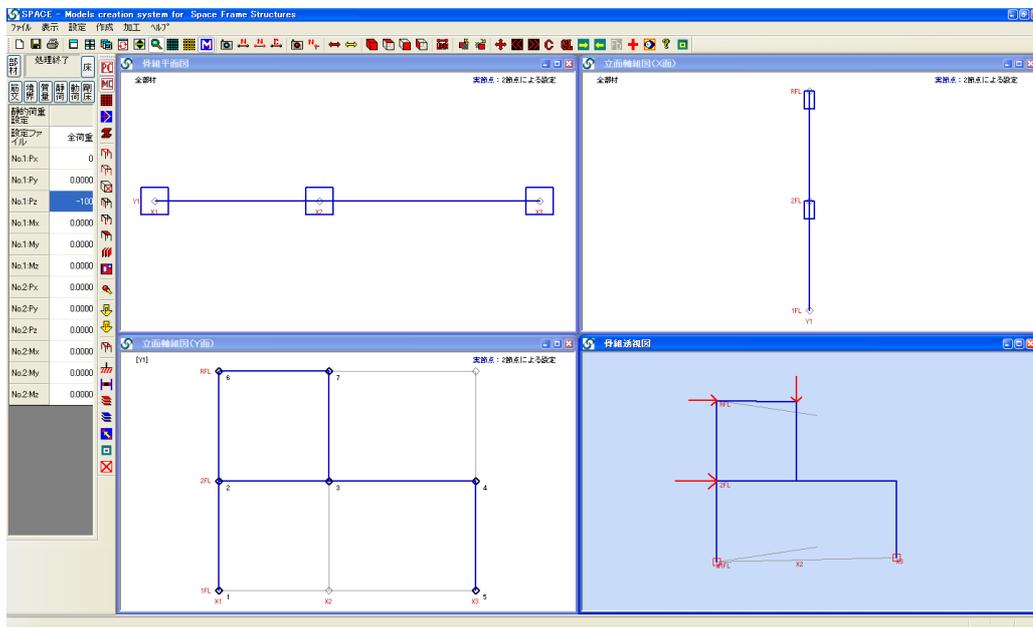


図 8-31 解析モデルの作成

解析が正常終了した後、解析結果を出力表示で確認する。SPACE のメニューより、「表示」→「静的解析の途中経過の表示」を選択し、解析経過と結果を表示させる。ファイルの最後に出力されている 20 回目の解析結果を図 8-32 に示す。この結果と式(8.101)とでは、少し値が異なる。

っている。これは、部材の軸方向変位を考慮しているか、否かの差である。

table number: 0							
材番号	部材モデル	Nx	Qy	Qz	Mx	My	Mz
1	1	26.1986	0.0000	-72.7408	0.0000	18412.6033	0.0000
		26.1986	0.0000	-72.7408	0.0000	-3409.6356	0.0000
2	1	-91.0369	0.0000	-13.7321	0.0000	-3366.8122	0.0000
		-91.0369	0.0000	-13.7321	0.0000	-7486.4494	0.0000
3	1	-177.2590	0.0000	126.1980	0.0000	-25550.4971	0.0000
		-177.2590	0.0000	126.1980	0.0000	24928.6912	0.0000
4	1	-126.1965	0.0000	-177.2600	0.0000	28249.3228	0.0000
		-126.1965	0.0000	-177.2600	0.0000	-24928.6912	0.0000
5	1	39.9302	0.0000	-13.7776	0.0000	-42.8234	0.0000
		39.9302	0.0000	-13.7776	0.0000	-4176.1116	0.0000
6	1	-86.2220	0.0000	39.9301	0.0000	-4176.1116	0.0000
		-86.2220	0.0000	39.9301	0.0000	7802.9163	0.0000
7	1	-139.9294	0.0000	-86.2232	0.0000	18064.0477	0.0000
		-139.9294	0.0000	-86.2232	0.0000	-7802.9163	0.0000

図 8-32 課題 2 の静的解析結果である部材断面力

そこで、図 8-33 に示すように、モデラーを用いて、部材断面の断面積を 1000 倍して、解析を実施し直す。その結果を図 8-34 に示す。

要素データ変更									
要素データ		材端データ							
要素番号	現在の状態	符号	モデル	ヤング係数 (kN/cm ²)	せん断弾性係数 (kN/cm ²)	断面積 (cm ²)	断面極二次モーメント (cm ⁴)	y軸断面二次モーメント (cm ⁴)	z軸断面二次モーメント (cm ⁴)
1	有効	G1	1	20500.0000	7900.0000	83370.000	35.68000	23500.00000	1740.00000
2	有効	C1	1	20500.0000	7900.0000	83370.000	35.68000	23500.00000	1740.00000

図 8-33 断面積を 1000 倍して、軸方向変位を無視する

stable number: U							
材番号	部材モデル	Nx	Qy	Qz	Mx	My	Mz
1	1	26.2711	0.0000	-70.1736	0.0000	17823.2099	0.0000
		26.2711	0.0000	-70.1736	0.0000	-3228.8646	0.0000
2	1	-94.1059	0.0000	-14.5128	0.0000	-3181.2332	0.0000
		-94.1059	0.0000	-14.5128	0.0000	-7535.0678	0.0000
3	1	-179.8262	0.0000	126.2705	0.0000	-25347.9694	0.0000
		-179.8262	0.0000	126.2705	0.0000	25160.2280	0.0000
4	1	-126.2690	0.0000	-179.8273	0.0000	28787.9505	0.0000
		-126.2690	0.0000	-179.8273	0.0000	-25160.2280	0.0000
5	1	40.7834	0.0000	-14.2793	0.0000	-47.6315	0.0000
		40.7834	0.0000	-14.2793	0.0000	-4331.4330	0.0000
6	1	-85.7203	0.0000	40.7833	0.0000	-4331.4330	0.0000
		-85.7203	0.0000	40.7833	0.0000	7903.5491	0.0000
7	1	-140.7826	0.0000	-85.7215	0.0000	17812.9016	0.0000
		-140.7826	0.0000	-85.7215	0.0000	-7903.5491	0.0000

図 8-34 断面積を 1000 倍にした課題 2 の静的解析結果である部材断面力

次に静的プレゼンターを起動し、図 8-35 に示すように、せん断力図と曲げモーメント図を表示させる。下図と図 8-30 の曲げモーメントとせん断力の分布は、良い一致を示している。また、図 8-34 に示されている各部材の曲げモーメントの値と式(8.101)とを比較すると、良い一致が得られていることが分かる。

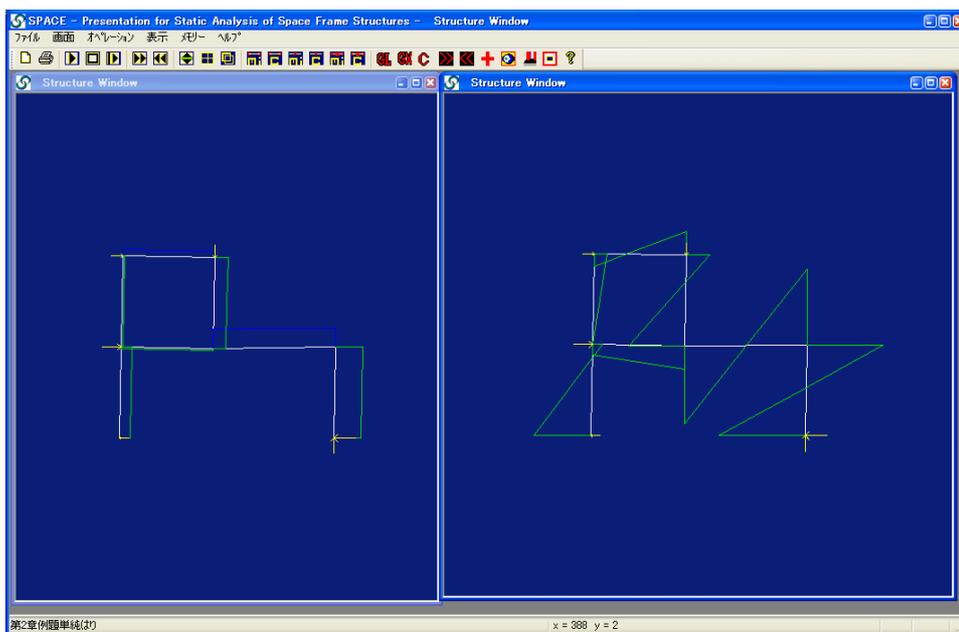


図 8-35 プレゼンターによるせん断力と曲げモーメント図の表示

さらに、図 8-35 で、節点 3 と 6 及び 4 の上で、Ctrl キーとマウス右ボタンを同時にクリックすることで、図 8-36、8-37 と 8-38 のダイアログを表示させ、その節点の解析結果の情報を表示させる。このダイアログから分かるように、当該節点の変位は式(8.102)、(8.103)、(8.104)に示される節点変位と各々同じ値となっている。



図 8-36 第 1 層柱頭の変位情報



図 8-37 第 2 層柱頭の変位情報



図 8-38 第 2 層床中央柱下の変位情報

前章では、整形ラーメンの機械的作表法について学び、かなり、大きな骨組でも容易に解析が可能となった。本章では異形ラーメンの釣合式を導いたが、その作成過程はかなり面倒である。そこで、この異形ラーメンにおいても、前章のように機械的に釣合式を構築する方法を考える。行列形式で表わされた骨組全体の釣合式は、表 8-1 のように、節点方程式と独立部材角によるモーメントの釣合に分類される。

8.9 異形ラーメンの機械的作表法

表 8-1 たわみ角法による剛性行列の特徴

	節点回転角 φ	独立部材角 ψ	荷重項
節点方程式	I	III	P I
独立部材角によるモーメント方程式	IV	II	P II

異形ラーメンの剛性行列も、整形ラーメンと同様に対称行列となっており、領域IVは領域IIIの転値行列となっている。参考のために、第7章で学んだ機械的作表法の一般的な特徴を示す表を再度示す。ここでは、節点方程式と層方程式に分かれており、層方程式が独立部材角によるモーメントの釣合式に対応している。